부산교육 2018-81

www.pen.go.kr

2018학년도
수리논술 나침반

X

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

일러두기

☑ 본 수리논술나침반 10은 수리논술나침반 시리즈의 10번째 책으로 대입 수리논술을 준비하는 2018학년도 수험생 및 수학교사들을 위하여 수학교사 동아리 ‘부산수학나침반’에서 만들고 부산시교육청에서 발간하는 수리논술 관련 책자입니다.

☑ 이 교재는 2017학년도에 치러진 전국 각 대학의 모의 논술과 실제 입시(2018 대입)에 출제된 수시 논술 기출문제 위주로 만들어진 책자입니다.

☑ 교재는 각 대학별 모의와 수시 순으로 묶었으며, 각 대학별 모의 논술과 수시 논술은 다음의 순서로 구성되어 있습니다.

1. 기출문제 : 2018 대입 전국대학 모의와 수시 논술 기출문제
2. 풀어보기 : 해당 대학의 논술 기출문제와 유사한 문제로서 주로 전국 모의고사나 수능에 나왔던 문제 또는 EBS에 있는 문제 위주로 발췌하여 학생들이 어려운 논술의 답안을 작성하기 전에 워밍업을 할 수 있도록 준비하였습니다.

☑ 학교에서 선생님들이 수업하실 때 편리하게 사용하시도록 대학의 해설 뿐 아니라 자체적으로 제작한 다른 풀이들도 수록하였습니다.

2018 수리논술 나침반X

Contents

01 가톨릭대학교(자연계) 모의[1)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음(간호학과 제외)	수학(3문항, 6문제)	120분

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산은 다음과 같다.

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$

③ $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

④ $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동하면서 발산한다.

(ㄴ) **[수열의 극한에 대한 기본 성질]** 수렴하는 두 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

② $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$(단, k는 상수)

③ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

④ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\ne 0$, $\beta\ne 0$)

(ㄷ) 두 양수 a, b에 대하여 다음을 만족하는 점 (a, b)로 이루어진 영역을 A라고 하자.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}a^{n+1}+5^{n+1}b^{n+1}}{3^na^n+5^nb^n}=3a}$$

(ㄹ) 제시문 (ㄷ)의 영역 A에 속하는 점 (a, b)에 대하여 $b-a^2$의 최댓값을 M이라고 하자.

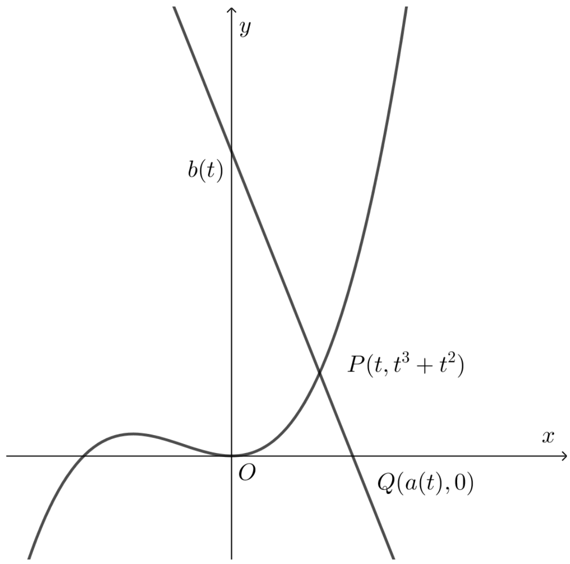
1) 가톨릭대학교 홈페이지

논제 1. (20점) 제시문 (ㄷ)의 영역 A를 좌표평면 위에 나타내고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (10점) 제시문 (ㄹ)에서 정의된 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 아래 그림은 삼차함수 $y=x^3+x^2$의 그래프이다. 원점 $\mathrm{O}(0,0)$와 이 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(t,\, t^3+t^2)$사이의 거리를 $a(t)$라고 하자. (단, $t>0$)



(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 점 $\mathrm{P}(t,\, t^3+t^2)$와 $a(t)$에 대하여 점 P와 점 $\mathrm{Q}(a(t),\, 0)$를 지나는 직선 l의 y절편을 $b(t)$라고 하자. 이 때 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$이다.

논제 1. (15점) 제시문 (ㄴ)의 함수 $b(t)$를 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (15점) 제시문 (ㄴ)의 $b(t)$에 대하여 우극한 $\lim\limits_{t\to 0+} b(t)$를 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) [확률의 덧셈정리] 두 사건 A, B에 대하여
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$이 성립한다. 특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

(ㄴ) [조건부확률] 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 다음과 같다. (단, $\mathrm{P}(A) > 0$)

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

(ㄷ) [확률의 곱셈정리] 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다. (단, $\mathrm{P}(A) > 0, \mathrm{P}(B) > 0$)

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

(ㄹ) 특정 질병 D에 걸렸는지 진단하는 초음파 검사가 있다. 이 검사 방법으로 진단할 때, D에 걸린 사람을 D에 걸렸다고 정확하게 진단할 확률은 q이고, D에 걸리지 않은 사람을 D에 걸렸다고 오진할 확률은 0.02라고 한다. D에 걸린 사람의 비율이 10%인 어느 실험 집단에서 임의로 한 명을 택하여 이 초음파 검사를 한 결과 D에 걸렸다고 진단했을 때 실제로 D에 걸렸을 확률을 p라고 하자.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄹ)에서 q가 0.9일 때 p를 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㄹ)에서 p가 0.84 이상이기 위한 q의 범위를 구하고 그 근거를 논술하시오.

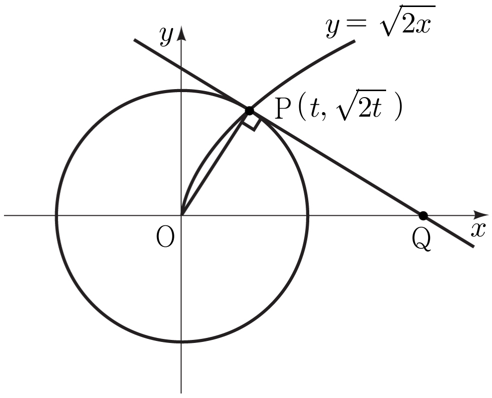
• 풀어보기

문제1. 자연수 k에 대하여 $a_k = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} ka_k$의 값을 구하시오.

(2014년 11월 대수능)

문제2. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sqrt{2t})$가 있다. 원점 O를 중심으로 하고 선분 OP를 반지름으로 하는 원을 C, 점 P에서의 원 C의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 원 C의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to +0} \frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은? (단, $t>0$)

(2011년 4월 전국연합)



① $\sqrt{2}\pi$ ② 2π ③ $2\sqrt{2}\pi$ ④ 4π ⑤ $4\sqrt{2}\pi$

문제3. 표와 같이 두 상자 A, B 에는 흰 구슬과 검은 구슬이 섞여서 각각 100개씩 들어 있다.

(단위 : 개)

	상자 A	상자 B
흰 구슬	a	$100-2a$
검은 구슬	$100-a$	$2a$
합계	100	100

두 상자 A, B 에서 각각 1 개씩 임의로 꺼낸 구슬이 서로 같은 색일 때, 그 색이 흰 색일 확률은 $\frac{2}{9}$이다. 자연수 a 의 값을 구하시오. (2016년 6월 모평)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 33

1) $\dfrac{6}{k}>1$ 일 때 $k=1,2,3,4,5$ 이고 $a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n}+1}=\dfrac{6}{k}$ 이므로

$a_1=6,\ a_2=3,\ a_3=2,\ a_4=\dfrac{3}{2},\ a_5=\dfrac{6}{5}$

2) $\dfrac{6}{k}=1$ 일 때 $k=6$이고 $a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n}+1}=\dfrac{1}{1+1}$이므로 $a_6=\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{6}{k}<1$ 일 때 $k=7,8,9,10$ 이고 $a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n}+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$

즉, $a_7=a_8=a_9=a_{10}=0$ 이다.

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{10}ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=6\times5+3+0\times4=33$

풀어보기(문제2) 정답 ④

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+2t}$ 이므로 $S(t)=(t^2+2t)\pi$ 이고 원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식이

$tx+\sqrt{2t}\,y=t^2+2t$이므로 $\mathrm{Q}(t+2,\ 0)$, $\overline{\mathrm{OQ}}=t+2$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2t+4}$ 이므로

$\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{(t^2+2t)\pi}{(t+2)-\sqrt{2t+4}}=4\pi$ 이다.따라서 $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}=4\pi$

풀어보기(문제3) 정답 30

두 상자 A, B에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 흰색으로 같을 확률을 $\mathrm{P}(W)$이라 하면

$\mathrm{P}(W)=\dfrac{a}{100}\times\dfrac{100-2a}{100}$

두 상자 A, B에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 검은색으로 같을 확률을 $\mathrm{P}(B)$이라

하면 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{100-a}{100}\times\dfrac{2a}{100}$

두 상자 A, B에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 서로 같은 색일 확률을 $P(S)$이라 하면

$\mathrm{P}(W|S)=\dfrac{\mathrm{P}(W\cap S)}{\mathrm{P}(S)}=\dfrac{\mathrm{P}(W\cap S)}{\mathrm{P}(W\cap S)+\mathrm{P}(B\cap S)}$

$$=\frac{\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}}{\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}+\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}}=\frac{-2a^2+100a}{-4a^2+300a}=\frac{-2a+100}{-4a+300}=\frac{2}{9}$$

식을 정리하면 $10a=300$이다. 따라서 $a=30$이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

논제 1. (20점)

(i) $3a>5b$인 경우, 제시문 (ㄱ)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5b}{3a}\right)^n=0$이므로 제시문(ㄴ)에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}a^{n+1}+5^{n+1}b^{n+1}}{3^na^n+5^nb^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a+5b\left(\frac{5b}{3a}\right)^n}{1+\left(\frac{5b}{3a}\right)^n}=\frac{3a+5b\cdot 0}{1+0}=3a\text{이다.}\ (\cdots 5\text{점})$$

(ii) $3a=5b$인 경우, 제시문 (ㄱ)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5b}{3a}\right)^n=1$이므로 제시문(ㄴ)에 의해

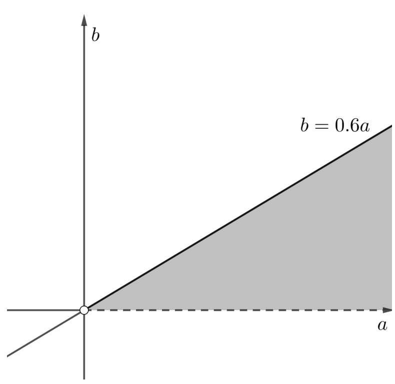
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}a^{n+1}+5^{n+1}b^{n+1}}{3^na^n+5^nb^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a+5b\left(\frac{5b}{3a}\right)^n}{1+\left(\frac{5b}{3a}\right)^n}=\frac{3a+5b}{1+1}=3a\text{이다.}\qquad(\cdots 5\text{점})$$

(iii) $3a<5b$인 경우, 제시문 (ㄱ)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3a}{5b}\right)^n=0$이므로 제시문(ㄴ)에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}a^{n+1}+5^{n+1}b^{n+1}}{3^na^n+5^nb^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a\left(\frac{3a}{5b}\right)^n+5b}{\left(\frac{3a}{5b}\right)^n+1}=\frac{3a\cdot 0+5b}{1+0}=5b\text{이다.}\ (\cdots 5\text{점})$$

따라서 두 양수 a,b에 대해서 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}a^{n+1}+5^{n+1}b^{n+1}}{3^na^n+5^nb^n}=3a$일 필요충분조건은 다음과 같다.

$3a\geq 5b, a>0, b>0$따라서 영역 A는 아래 그림에서 색칠된 부분이다. (…5점)



~논제 2.(10점)

$b-a^2=k$라고 두자. $b-a^2$의 최댓값 M은 곡선 $b=a^2+k$과 직선 $b=\frac{3}{5}a$가 접할 때의 k 값과 같다. 직선의 기울기가 $\frac{3}{5}$이므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{3}{10}, \frac{9}{50}\right)$이 된다. (…5점)

따라서 $M=\frac{9}{50}-\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$이다. (…5점)

[문항2] 대학발표 예시답안

논제 1. (15점)

원점 O와 점 $\mathrm{P}(t, t^2+t^3)$사이의 거리는 $a(t)=t\sqrt{1+t^2(1+t)^2}$이므로

점 Q의 좌표는 $(a(t),0)=(t\sqrt{1+t^2(1+t)^2},0)$이 된다. (…5점)

직선 l의 기울기는 $s=\dfrac{-t^2-t^3}{t\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-t}$이므로 l의 방정식은 다음과 같다.

$$y=sx+b=\frac{-t^2-t^3}{t\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-t}(x-a(t)) \qquad (\cdots 5점)$$

따라서 $b(t)=t^2+t^3+\dfrac{t^2+t^3}{\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-1}=t^2+t^3+\dfrac{\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}+1}{t+1}$이 된다. (…5점)

(나침반 다른 풀이) 원점 O와 점 $\mathrm{P}(t, t^2+t^3)$사이의 거리는 $a(t)=t\sqrt{1+t^2(1+t)^2}$이므로 점 Q의 좌표는 $(a(t),0)=(t\sqrt{1+t^2(1+t)^2},0)$이 된다.

직선 l의 기울기는 $s=\dfrac{-t^2-t^3}{t\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-t}$이고 y절편이 $b(t)$이므로 l의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\frac{-t^2-t^3}{t\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-t}x+b(t)$$

직선 l은 점 Q를 지나므로 $(a(t),0)=(t\sqrt{1+t^2(1+t)^2},0)$를 대입하면

$$b(t)=\frac{(t^2+t^3)\cdot t\sqrt{1+t^2(1+t)^2}}{t\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-t}=\frac{t^2(t+1)\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}}{\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-1}$$

논제 2.(15점)

$$\lim_{t\to 0+} b(t)=\lim_{t\to 0+}\left(t^2+t^3+\frac{t^2+t^3}{\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-1}\right)=\lim_{t\to 0+}\left(t^2+t^3+\frac{\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}+1}{t+1}\right)$$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\left(\dfrac{\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}+1}{t+1}\right)$ (…10점) 따라서 $\lim\limits_{t\to 0+} b(t)=2$이다. (…5점)

(나침반 다른 풀이)

$$\lim_{t\to 0+} b(t) = \lim_{t\to 0+} \frac{t^2(t+1)\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}}{\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}-1}$$

$$= \lim_{t\to 0+} t\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}\ \frac{\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}+1}{t(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{t^4+2t^3+t^2+1+\sqrt{t^4+2t^3+t^2+1}}{t+1} = 2$$

[문항3] 대학발표 예시답안

논제 1.(20점)

특정 질병 D에 걸린 사건을 D, 초음파 검사에서 D에 걸렸다고 나올 사건을 B라고 할 때

$\mathrm{P}(B|D)=0.9$, $\mathrm{P}(B\,|\,D^c)=0.02$, $\mathrm{P}(D)=0.1$, $\mathrm{P}(D^c)=0.9$이다. (…5점)

$$\mathrm{P}(D|B)=\frac{\mathrm{P}(D\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(D\cap B)}{\mathrm{P}(D\cap B)+\mathrm{P}(D^c\cap B)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(B|D)\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(B|D)\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(B|D^c)\mathrm{P}(D^c)}=\frac{0.9\times 0.1}{0.9\times 0.1+0.02\times 0.9}=0.833$$

(…10점)

즉, 초음파 검사 결과에서 D에 걸렸다고 나왔을 때 그 환자가 특정 질병에 걸렸을 확률 $\mathrm{P}(D|B)=0.833$이다. (…5점)

(나침반 다른 풀이)

실험집단의 사람들 수를 a라 하고 특정 질병 D에 걸린 사건을 D, 초음파 검사에서 D에 걸렸다고 나올 사건을 B라고 할 때

$n(D)=0.1a$, $n(B\cap D)=0.09a$, $n(D^c)=0.9a$ $n(D^c\cap B)=0.018a$ 이다. 이를 표로 나타내면

	D에 걸린 사람 (사건 D)	D에 걸리지 않은 사람 (사건 D^c)	
D에 걸렸다고 진단받은 사람 (사건 B)	$0.09a$	$0.018a$	$0.108a$
D에 걸리지 않았다고 진단받은 사람 (사건 B^c)	$0.01a$	$0.882a$	$0.892a$
	$0.1a$	$0.9a$	a

$$\mathrm{P}(D|B)=\frac{\mathrm{P}(D\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{n(D\cap B)}{n(B)}=\frac{0.09a}{0.108a}=\frac{5}{6}$$

논제 2.(20점)

초음파 검사에서 특정 질병에 걸렸을 때 D에 걸렸다고 나올 확률을 x라 할 때

$$\mathrm{P}(D|B)=\frac{\mathrm{P}(D\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B|D)\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(B|D)\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(B|D^c)\mathrm{P}(D^c)}=\frac{x\times 0.1}{x\times 0.1+0.02\times 0.9}\geq 0.84$$ 이다.

(…15점)

따라서 위 부등식을 풀면 $x\geq\dfrac{0.18\times 0.84}{0.16}=0.945$이다. 즉 초음파 검사 결과에서 D에 걸렸다고 나왔을 때 그 환자가 특정 질병에 걸렸을 확률이 0.84이상이기 위한 초음파 검사에서 특정 질병에 걸렸을 때 D에 걸렸다고 나올 확률은 94.5%이상이다. (…5점)

(나침반 다른 풀이) 실험집단의 사람들 수를 a라 하고 특정 질병 D에 걸린 사건을 D, 초음파 검사에서 D에 걸렸다고 나올 사건을 B라고 할 때

$n(D)=0.1a,\ n(B\cap D)=0.1aq,\ n(B^c\cap D)=0.1a(1-q),\ n(D^c)=0.9a\ \ n(D^c\cap B)=0.018a$이다.

이를 표로 나타내면

	D에 걸린 사람 (사건 D)	D에 걸리지 않은 사람 (사건 D^c)	
D에 걸렸다고 진단받은 사람 (사건 B)	$0.1aq$	$0.018a$	$0.1aq+0.018a$
D에 걸리지 않았다고 진단받은 사람 (사건 B^c)	$0.1a(1-q)$	$0.882a$	$0.1a(1-q)+0.882a$
	$0.1a$	$0.9a$	a

$$\mathrm{P}(D|B)=\frac{\mathrm{P}(D\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{n(D\cap B)}{n(B)}=\frac{0.1aq}{0.1aq+0.018a}=\frac{0.1q}{0.1q+0.018}\geq 0.84$$

따라서 위 부등식을 풀면 $q\geq\dfrac{0.18\times 0.84}{0.16}=0.945$이다.

즉, 초음파 검사 결과에서 D에 걸렸다고 진단했을 때 실제로 D에 걸렸을 확률이 0.84이상이기 위하여 D에 걸린 사람을 정확하게 진단할 확률은 94.5%이상이다.

02 가톨릭대학교(의학계) 모의[2)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 영어, 과탐(2과목 평균)중 3개영역 1등급 및 한국사 4등급 이내	수학(4문항, 8문제), 통합형 의학논술 (1문항, 1문제)	120분

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (80점)

(ㄱ) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a^2)a^n$에 대하여 이 급수가 수렴하는 실수 a의 집합을 I라고 하자.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 집합 I에 대하여 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$는 다음과 같다. (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합)

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)x+(1-x^2)x^2+(1-x^2)x^3+\cdots & (x\in I)\\ x & (x\notin I)\end{cases}$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=f(1-x^{2018})$$

논제 1. (40점) 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$의 그래프를 그리고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (40점) 제시문 (ㄷ)의 함수 $g(x)$에 대하여 극한 $\lim_{x\to0}g(x)$를 조사하고 그 근거를 논술하시오.

2) 가톨릭대학교 홈페이지

[문항 2] 제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (70점)

(ㄱ) 자연수 n에 대하여 포물선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{A}(n, n^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_n이라고 하자.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 점 $\mathrm{A}(n, n^2)$과 접선 l에 대하여 점 A에서 l에 접하고 동시에 x축과 접하는 원의 중심을 $\mathrm{B}(x_n, y_n)$이라고 하자. (단, $x_n > a_n$)

논제 1. (50점) 제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)에 주어진 a_n과 x_n을 각각 n에 관한 식으로 각각 나타내고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)에 주어진 a_n과 x_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-4a_n^2}{a_n}$을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) [사건의 독립과 종속] 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다. 한편 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때 두 사건 A와 B는 서로 종속이라고 한다.

(ㄴ) [확률의 곱셈정리] 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0, \mathrm{P}(B)>0$)

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

(ㄷ) [독립사건의 곱셈정리] 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다. (단, $\mathrm{P}(A)>0, \mathrm{P}(B)>0$)

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

(ㄹ) 1에서 n까지의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때 택한 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라고 한다.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄹ)에서 $n=10$일 때 사건 A와 사건 B가 서로 독립인지 종속인지를 말하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (50점) 제시문 (ㄹ)의 사건 A와 사건 B가 서로 독립인 자연수 n중에서 10부터 100까지의 모든 짝수들의 합을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (80점)

(ㄱ) 실수 a에 대하여 정의역이 $[a, 2\pi]$인 함수 $f(t)$를 다음과 같이 정의하자.

(단, $0 \le a \le 2\pi$)

$$f(t) = \int_a^t (\sin u + \cos u)du$$

또한, 이 함수 $f(t)$가 최댓값을 갖는 t의 값 중 가장 작은 값을 $g(a)$라고 하자.

(ㄴ) [삼각함수의 덧셈정리] 실수 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(ㄷ) [삼각함수의 합성] 실수 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \text{ (단, } \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{)}$$

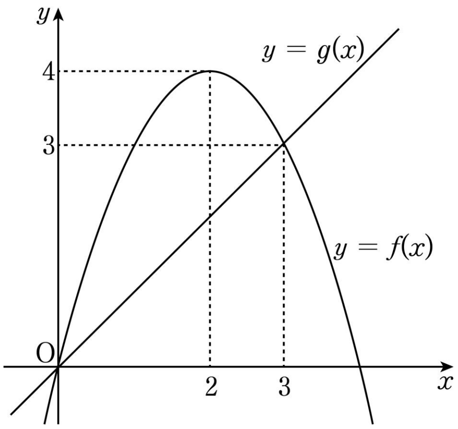
논제 1. (40점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(a)$는 구간 $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$에서 일정한 값 c를 갖는다. c 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (40점) 구간 $[0, 2\pi]$에서 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(a)$의 그래프를 그리고 그 근거를 논술하시오.

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 원점과 점 $(3, 3)$에서 만난다.

$h(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^{n+1}+5\{g(x)\}^{n}}{\{f(x)\}^{n}+\{g(x)\}^{n}}$일 때, $h(2)+h(3)$의 값은? (2016년 3월 전국연합)



문제2. 휴대 전화의 메인 보드 또는 액정 화면 고장으로 서비스 센터에 접수된 200 건에 대하여 접수 시기를 품질보증 기간 이내, 이후로 구분한 결과는 다음과 같다.

(단위: 건)

구분	메인보드 고장	액정화면 고장	합계
품질보증기간이내	90	50	140
품질보증기간이후	a	b	60

접수된 200 건 중에서 임의로 선택한 1 건이 액정 화면 고장 건일 때, 이 건의 접수 시기가 품질보증 기간 이내일 확률이 $\dfrac{2}{3}$이다. $a-b$의 값을 구하시오. (단, 메인 보드와 액정 화면 둘 다 고장인 경우는 고려하지 않는다.) (2016년 9월 모평)

문제 3. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고, $0 \le x < 2$일 때 $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 구간 $[0, 2)$에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은? (2017년 3월 전국연합)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 2

문제4. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = -1$, $a_n = 2-\dfrac{1}{2^{n-2}}$ $(n \ge 2)$이다. 구간 $[-1,\ 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 $f(x)=\sin(2^n \pi x)$ $(a_n \le x \le a_{n+1})$이다. $-1<\alpha<0$인 실수 α에 대하여 $\displaystyle\int_\alpha^t f(x)dx=0$을 만족시키는 $t\,(0<t<2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1-\cos(2\pi\alpha))$의 값은? (2018년 9월 모평)

① -48　　② -50　　③ -52　　④ -54　　⑤ -56

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

직선 $y=g(x)$ 는 원점과 점 $(3,\ 3)$ 을 지나므로 직선의 방정식은 $y=x$ 이다.

문제에서 $f(2)=4$, $g(2)=2$ 이므로

$$h(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(2)\}^{n+1}+5\{g(2)\}^n}{\{f(2)\}^n+\{g(2)\}^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5\times 2^n}{4^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\times\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n}=4$$

마찬가지로 문제에서 $f(3)=3$, $g(3)=3$ 이므로

$$h(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(3)\}^{n+1}+5\{g(3)\}^n}{\{f(3)\}^n+\{g(3)\}^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5\times 3^n}{3^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times 3^n}{2\times 3^n}=4$$

따라서 $h(2)+h(3)=8$

풀어보기(문제2) 정답 10

임의로 선택한 1건이 액정 화면 고장건일 때, 이 건의 접수 시기가 품질보증 기간 이내일 확률은 $\frac{50}{50+b}$ 이다. $\frac{50}{50+b}=\frac{2}{3}$ 에서 $b=25$. 또한 $a+b=60$로부터 $a=35$, 따라서

$a-b=10$

풀어보기(문제3) 정답 ①

$a=-1$ 일 때 구간 $[0,2)$ 에서 $f(x)=x+1$ 이므로 $x=0$ 에서 극댓값을 갖지 않는다.

이것은 모순이므로 $a\neq -1$

구간 $[0,2)$ 에서 $f(x)$ 가 극솟값을 갖도록 하는 a 의 값의 범위를 구하면

$f(x)=\frac{(x-a)^2}{x+1}$ 에서 $f'(x)=\frac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=-a-2$

(i) $a<-a-2$ 일 때

$a<-a-2$ 에서 $a<-1$이고, $x=-a-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=-a-2$ 에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0,2)$ 에서 극솟값을 갖는다.

즉, $0<-a-2<2$, $-4<a<-2$이고 a는 정수이므로 $a=-3$

(ii) $a>-a-2$ 일 때

$a>-a-2$ 에서 $a>-1$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$ 에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0,2)$ 에서 극솟값을 갖는다. 즉, $0<a<2$ 이고 a는 정수이므로 $a=1$

(i), (ii)에 의해서 조건을 만족하는 정수 a의 값은 -3 또는 1이다.

따라서 모든 정수 a의 값의 곱은 $(-3)\times 1=-3$이다.

풀어보기(문제4) 정답 ②

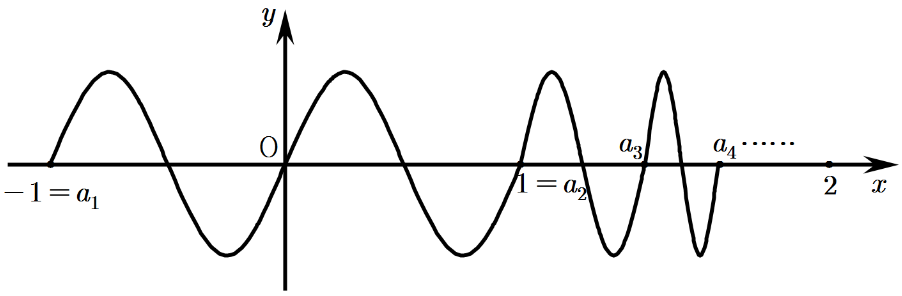
(i) $a_1 \le x \le a_2$ (즉, $-1\le x\le 1$)일 때, $f(x)=\sin 2\pi x$

(ii) $a_2 \le x \le a_3$ (즉, $1\le x\le 2-\dfrac{1}{2}$)일 때, $f(x)=\sin 2^2\pi x$

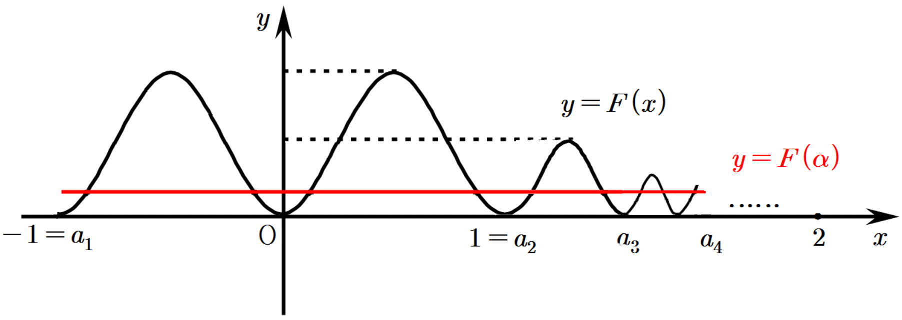
(iii) $a_3 \le x \le a_4$ (즉, $2-\dfrac{1}{2}\le x\le 2-\dfrac{1}{2^2}$)일 때, $f(x)=\sin 2^2\pi x$

⋮

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$F(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)dx$ 라고 하면 $F'(t)=f(t)$이고 $\displaystyle\int_0^{a_2} f(t)dt=0$, $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt=0$, $n\ge 2$이 성립하므로 $y=F(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



방정식 $\displaystyle\int_\alpha^t f(x)dx=0$ 을 만족시키는 $t\,(0<t<2)$의 값의 개수를 구하는 것은 방정식 $F(t)=F(\alpha)$을 만족하는 t 의 값의 개수를 구하는 것과 같다.

위의 그림에서 극댓값을 크기순으로 나열하면 $\dfrac{1}{\pi}$, $\dfrac{1}{2\pi}$, $\dfrac{1}{2^2\pi}$, $\cdots$ 이므로 $t\,(0<t<2)$의 개수가 103개가 되기 위해서는 $F(\alpha)$의 값이 52번째 극댓값과 같을 때이다.

따라서 $F(\alpha)=\dfrac{1}{2^{51}\pi}$ 이어야 한다.

즉, $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx=\dfrac{1}{2^{51}\pi}$ 이고 $-1<\alpha<0$ 이므로

$$\int_0^{\alpha}\sin 2\pi x\,dx = \frac{1}{2^{51}\pi}\ ,\quad \left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2^{51}\pi}\ ,\ 1-\cos 2\pi\alpha = 2^{-50}$$

그러므로 $\log_2(1-\cos 2\pi\alpha) = -50$ 이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

논제 1. (40점)

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a^2)a^n$ 이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $a^2=1$ 또는 $|a|<1$ 이다.

즉, $I=[-1,1]$ 이 된다.…10점

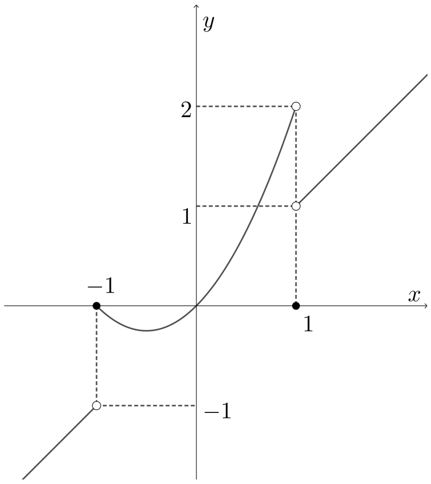
$-1<x<1$ 인 경우,

$$f(x)=(1-x^2)x+(1-x^2)x^2+(1-x^2)x^3+\cdots=\frac{(1-x^2)x}{1-x}=(1+x)x$$

$x=-1$ 인 경우, $f(-1)=0$

$x=1$ 인 경우, $f(1)=0$ 이다. …20점

함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



…10점

논제 2. (40점)

$0<|x|<1$ 인 x 에 대하여 $0<x^{2018}<1$ 이므로 $0<1-x^{2018}<1$ 이다.

따라서 $0<|x|<1$ 인 x 에 대하여 $f(1-x^{2018})=(1-x^{2018})(2-x^{2018})$ 이다. …20점

그러므로 $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}f(1-x^{2018})=\lim_{x\to 0}(1-x^{2018})(2-x^{2018})=2$ 이다. …20점

[문항2] 대학발표 예시답안

논제 1. (50점)

$f'(x)=2x$ 이므로 $f'(n)=2n$

점 A를 지나는 직선의 식은 $y=2nx-n^2$이고 $a_n=\frac{n}{2}$가 된다. …20점

접선 l과 x축이 만나는 점을 C, 원과 x축이 접하는 점을 D라고 하면

C의 x좌표가 $\frac{n}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\frac{n^2}{4}+n^4}$이다. …20점

원의 중심의 x좌표 x_n과 D의 x좌표가 같으므로

$x_n=$C의 x좌표$+\overline{\mathrm{CD}}=\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+n^4}=\frac{n+\sqrt{n^2+4n^4}}{2}$ …10점

논제 2. (20점)

$$\frac{x_n-4a_n^2}{a_n}=2\frac{\frac{n+\sqrt{n^2+4n^4}}{2}-n^2}{n}=1+\sqrt{1+4n^2}-2n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-4a_n^2}{a_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4n^2}+2n}=1$$ …20점

[문항3] 대학발표 예시답안

논제 1. (20점)

$n=10$이므로 사건 $A, B, A\cap B$는 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}, B=\{3, 6, 9\}, A\cap B=\{6\}$임을 알 수 있다. …10점

이때 사건 $A, B, A\cap B$의 확률은 각각 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$ 이다.

…5점

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{20}\neq\frac{1}{10}=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다. …5점

논제 2. (50점)

임의의 n에 대하여 $A, B, A\cap B$는 각각 2의 배수, 3의 배수, 6의 배수이고 그 사건의 원소의 개수는 각각 $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$를 넘지 않는 최대 정수이다. …10점

$n=6k$일 때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3k}{6k}\frac{2k}{6k}=\frac{k}{6k}=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

$n=6k+2$일 때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3k+1}{6k+2}\frac{2k}{6k+2}=\frac{k}{6k+2}=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

$n=6k+4$일 때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3k+2}{6k+4}\frac{2k+1}{6k+4}\neq\frac{k}{6k+4}=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다. …25점

두 사건 A, B가 서로 독립인 10에서 100까지의 짝수 n은 $12, 18, \cdots, 96$과 $14, 20, \cdots, 98$이다.

따라서 구하는 합은 $26 + \cdots + 194 = \dfrac{15 \times 220}{2} = 1650$이다. …15점

[문항4] 대학발표 예시답안

논제 1. $f'(t) = \sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})$이고

$f(t) = -\sqrt{2}\cos(t + \frac{\pi}{4}) + c$이다. $(c = \sqrt{2}\cos(a + \frac{\pi}{4})$ …20점

$f'(t) = 0$에서 $t = \dfrac{3\pi}{4}$ 또는 $t = \dfrac{7\pi}{4}$

t	a	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$0 \le a \le \dfrac{3\pi}{4}$이므로 최댓값은 $t = \dfrac{3\pi}{4}$ 또는 $t = 2\pi$일 때 가능하다.

$f(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} + c$이고 $f(2\pi) = -\sqrt{2}\cos(\frac{9\pi}{4}) = -1 + c$이므로 $f(x)$는 $t = \dfrac{3\pi}{4}$에서 최댓값을 가진다. 따라서 $g(a) = \dfrac{3\pi}{4}$ …20점

논제 2. (40점)

1) $\dfrac{3\pi}{4} < a < \dfrac{3\pi}{2}$일 때

t	a	$\cdots$	$\frac{7\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	극소	↗	

양 끝점에서의 값을 비교하면 $f(a) = 0$

$f(2\pi) = -\sqrt{2}\cos(\frac{9\pi}{4}) = -1 + c$이고 $c < 1$이므로 $f(a)$가 최댓값이 된다.

따라서 $g(a) = a$…10점

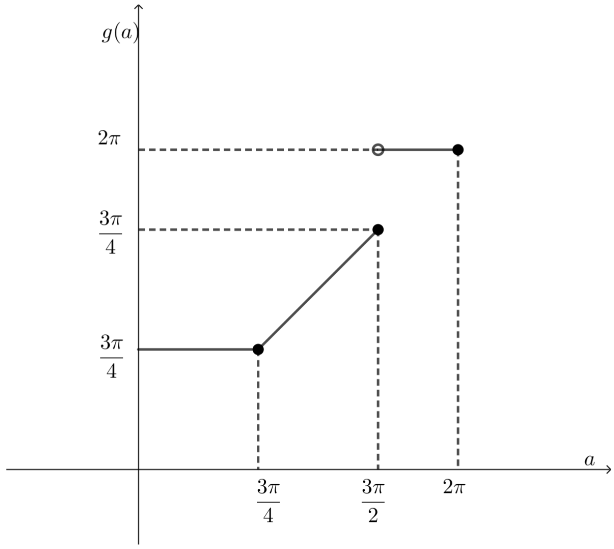
2) $a = \dfrac{3\pi}{2}$일 때

1)에서와 마찬가지로 양 끝점에서의 값을 비교하면
$f(a)$와 $f(2\pi)$가 최댓값으로 동일하므로 a와 2π중 작은 값을 택해 $g(a) = a$이다. …10점

3) $\frac{3\pi}{2} < a \leq 2\pi$ 일 때

1)에서와 마찬가지로 양 끝점에서의 값을 비교하면

$f(2\pi)$ 에서 최댓값을 가지므로 $g(a) = 2\pi$ …10점



…10점

03 가톨릭대학교(자연계) 수시[3)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	*자연, 공학계열: 없음 *간호학과: 2등급 2개	수학(3문항, 6문제)	120분

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 똑같은 공 20개와 서로 다른 네 상자 A_1, A_2, A_3, A_4가 있다. 철수와 영희는 다음과 같은 방법으로 네 상자에 공을 넣으려고 한다.

> 철수의 방법: 20개의 공의 전부를 네 상자에 넣는데, A_k 상자에는 k보다 많은 수의 공을 넣으려고 한다. (단, $k=1, 2, 3, 4$)

> 영희의 방법: 네 상자 A_1, A_2, A_3, A_4에 20개 공의 전부 또는 일부를 넣으려고 한다. (단, 공을 하나도 넣지 않을 수도 있다.)

(ㄴ) **[조합의 수]** 서로 다른 n개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 조합의 수는 다음과 같다.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \ (0 \le r \le n) $$

(ㄷ) **[중복조합의 수]** 서로 다른 n개의 원소 중에서 중복을 이용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수는 다음과 같다.

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

논제 1. (15점) 제시문 (ㄱ)의 철수의 방법으로 상자에 공을 넣을 수 있는 경우의 수를 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (15점) 제시문 (ㄱ)의 영희의 방법으로 상자에 공을 넣을 수 있는 경우의 수를 2018로 나눈 나머지를 구하고 그 근거를 논술하시오.

3) 가톨릭대학교 홈페이지

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) **[연속확률변수와 확률밀도함수]** 키, 길이, 무게, 온도 등과 같이 어떤 구간에 속하는 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 연속확률변수라 한다. 일반적으로 $\alpha \le x \le \beta$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 다음 성질을 만족하는 함수 $f(x)$가 존재한다.

1. $f(x) \ge 0$
2. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.
3. 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이이다. (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

이때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라 하며, X는 확률밀도함수가 $f(x)$인 확률분포를 따른다고 한다.

(ㄴ) 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=kx^3 \quad (1 \le x \le 2)$$

이고, $Y=X^2$이라고 하자.

(ㄷ) 연속함수 $g(y)$는 제시문 (ㄴ)의 연속확률변수 Y와 $1 \le a \le b \le 4$인 임의의 실수 a, b에 대하여 다음을 만족한다.

$$\mathrm{P}(a \le Y \le b) = \int_a^b g(y)dy$$

(ㄹ) **[적분과 미분의 관계]** 함수 $f(t)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

논제 1. (15점) 제시문 (ㄴ)의 상수 k의 값과 제시문 (ㄴ)의 연속확률변수 Y에 대하여 확률 $\mathrm{P}(1 \le Y \le 2)$를 각각 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (15점) 제시문 (ㄷ)의 연속함수 $g(y)$에 대하여 $g(3)$의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제1, 논제2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) **[좌표평면 위의 두 점 사이의 거리]** 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(ㄴ) 실수 a, b에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 점 (a, b) 전체의 집합을 E라고 하자.

i) $b \neq 0$
ii) 점 $\mathrm{P}(0, 0)$, $\mathrm{Q}(a, b)$, $\mathrm{R}(a+b, 0)$는 반지름이 1인 동일한 원 위에 있다.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 집합 E에 속한 점 (x, y)와 점 $\mathrm{S}(-\sqrt{2}, 1)$ 사이의 거리의 최솟값을 m이라고 하자.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄴ)의 집합 E에 속한 모든 점을 좌표평면 위에 나타내고 그 근거를 논술하시오.

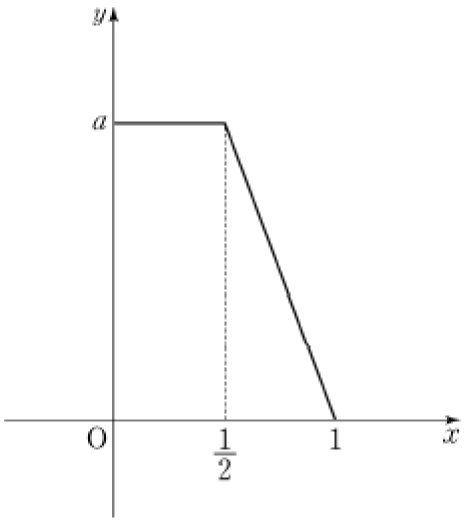
논제 2. (20점) 제시문 (ㄷ)의 m의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

• 풀어보기

문제1. 고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m 개를 주문하는 경우의 수가 36 일 때, 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m 개를 주문하는 경우의 수는? (2013년 6월 모평)

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

문제2. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 1$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다. (2016년 9월 모평)



① $\frac{10}{9}$ ② $\frac{11}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{13}{9}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ②

서로 다른 3종류에서 중복을 허락하여 m가지를 선택하는 경우의 수가 36가지이므로

$${}_3\mathrm{H}_m = {}_{m+2}\mathrm{C}_m = {}_{m+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(m+2)(m+1)}{2} = 36 \quad \therefore\ m=7$$

고구마 피자, 새우피자, 불고기 피자를 적어도 하나씩 포함하여 7개를 선택하는 경우의 수는 $x+y+z=7\,(x,\ y,\ z$는 자연수$)$ 의 해의 순서쌍과 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = 15$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ③

확률밀도함수의 성질에 의하여 주어진 확률밀도함수의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{2}\times a + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a = 1$이다.

따라서 $a = \frac{4}{3}$이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

논제 1.

A_k 상자에 최소한 $k+1$개 이상의 공을 넣어야 하므로 구하는 경우의 수는 네 상자 A_1, A_2, A_3, A_4에 각각 2, 3, 4, 5개 총 14개의 공을 미리 넣고 나머지 6개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 넣는 방법의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개의 원소 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수이다. 즉, ${}_4\mathrm{H}_6 = {}_9\mathrm{C}_6 = 84$이다.

논제 2.

네 상자 A_1, A_2, A_3, A_4에 넣은 공의 수를 r이라 하고 나머지 $20-r$개의 공을 가상의 또 다른 상자에 넣는다고 하면 구하는 경우의 수는 똑같은 공 20개를 서로 다른 5개의 상자에 넣는 방법의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 20개를 택하는 중복조합의 수이다. 즉, ${}_5\mathrm{H}_{20} = {}_{24}\mathrm{C}_{20} = 10626$ 이다. 그러므로 구하는 나머지는 536이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

논제 1.

$f(x) = kx^3\,(1 \le x \le 2)$가 확률밀도함수이므로 제시문 (ㄱ)의 성질로부터 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이다. 이 도형의 넓이는 정적분 $\int_1^2 kx^3dx$와 같으므로

$$\int_1^2 kx^3 dx = \frac{k}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{15}{4}k = 1$$

이다. 따라서 $k = \frac{4}{15}$ 이다. 한편 $Y = X^2$ 이므로 $\mathrm{P}(1 \le Y \le 2) = \mathrm{P}(1 \le X^2 \le 2)$ $= \mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2})$ 이고, 확률 $\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2})$ 은 함수 $y = \frac{4}{15}x^3$ 의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ 와 둘러싸인 도형의 넓이이므로 $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{15}x^3 dx = \frac{1}{5}$ 이다. 따라서

$$\mathrm{P}(1 \le Y \le 2) = \mathrm{P}(1 \le X^2 \le \sqrt{2}) = \mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2}) = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{15}x^3 dx = \frac{1}{5}$$

이다.

논제 2.

제시문 (ㄷ)에 의해 $1 \le b \le 4$ 인 b 에 대하여

$$\int_1^b g(y)dy = \mathrm{P}(1 \le Y \le b)$$

이다. 그런데 $\mathrm{P}(1 \le Y \le b) = \mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{b})$ 이고, 확률 $\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{b})$ 은 함수 $y = \frac{4}{15}x^3$ 의 그래프와 x축 및 두 직선 $x = 1$, $x = \sqrt{b}$ 와 둘러싸인 도형의 넓이이므로 $\int_1^{\sqrt{b}} \frac{4}{15}x^3 dx = \frac{1}{15}(b^2 - 1)$ 이다. 즉, $\int_1^b g(y)dy = \frac{1}{15}(b^2 - 1)$ 이다. 따라서 $1 \le x \le 4$ 인 x에 대하여 $\int_1^x g(y)dy = \frac{1}{15}(x^2 - 1)$ 이다. 그런데 함수 $g(y)$ 가 구간 $[1, 4]$ 에서 연속이므로 제시문 (ㄹ)에 의해 $1 < x < 4$ 인 x 에 대하여

$$g(y) = \frac{d}{dx}\int_1^x g(y)dy$$

이다. 그러므로 $1 < x < 4$ 인 x 에 대하여

$$g(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x g(y)dy = \frac{d}{dx}\frac{1}{15}(x^2 - 1) = \frac{2}{15}x$$

이다. 따라서 $g(3) = \frac{2}{5}$ 이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

논제 1.

우선 $b \ne 0$ 이므로 $\mathrm{P} \ne \mathrm{Q}$ 이고 $\mathrm{Q} \ne \mathrm{R}$ 이다. 그러므로 $\mathrm{P} = \mathrm{R}$ $(a+b=0)$ 인 경우와 $\mathrm{P} \ne \mathrm{R}$ $(a+b \ne 0)$ 인 경우로 나누어서 생각한다.

1) $a+b \ne 0$ 인 경우

제시문 (ㄴ)의 세 점 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ 을 지나는 원은 삼각형 $\triangle \mathrm{PQR}$ 의 외접원이다. 따라서 원의

중심은 선분 $\overline{PQ}$의 수직이등분선과 $\overline{PR}$의 수직이등분선의 교점이다. 선분 $\overline{PQ}$의 수직이등분선은 $a \neq 0$인 경우 $y=-\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{b}{2}$, $a=0$인 경우 $y=\frac{b}{2}$이다. 즉, $y=-\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{b}{2}$이다. 선분 $\overline{PR}$의 수직이등분선이 $x=\frac{a+b}{2}$이므로 세 점을 지나는 원의 중심은 $\left(\frac{a+b}{2},\ -\frac{a-b}{2}\right)$이다. 외접원의 반지름이 1이므로 실수 a, b가 만족하는 식은

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(-\frac{a-b}{2}\right)^2=1$$

즉, $a^2+b^2=2$ (단, $a+b\neq 0$, $b\neq 0$)이다.

2) $a+b=0$인 경우

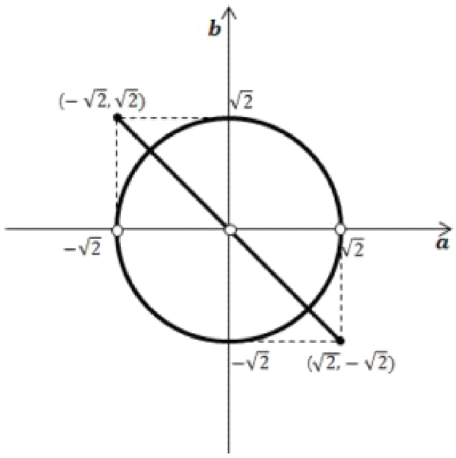
반지름이 1인 원이 좌표평면 위의 두 점을 지나기 위해서는 두 점 사이의 거리가 2이하면 된다. 따라서 a의 범위는 다음과 같다.

$\left|\overline{PQ}\right|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-a)^2}=\sqrt{2}\,|a| \le 2 \cdots (*)$

그러므로 제시문 (ㄴ)의 조건 ⅰ)과 부등식 (*)에 의해

$$a+b=0 \ \left(-\sqrt{2} \le a<0,\ 0<a\le \sqrt{2}\right)$$

1), 2)의 경우에 의해서 집합 E에 속한 모든 점을 좌표평면위에 나타내면 다음과 같다.



논제 2.

제시문 (ㄱ)에 의해서 E의 한 점 (x, y)와 점 S 사이의 거리 l은 다음과 같다.

$$l=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y-1)^2} \quad (\text{단, } (x, y)\in E)$$

1) 점 (x, y)가 $x^2+y^2=2$ (단, $y\neq 0$)을 만족하는 경우

원 $x^2+y^2=2$의 중심을 O라고 하자. 점 S가 원 $x^2+y^2=2$의 외부에 있으므로, $y\neq 0$인 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 (x, y)와 점 S 사이의 거리는 점 (x, y)가 선분 $\overline{OS}$와 원 $x^2+y^2=2$ $(y\neq 0)$의 교점일 때 최소가 된다. 점 S의 y좌표가 0이 아니므로 원

$x^2+y^2=2\ \ (y\neq 0)$ 와의 교점이 존재하고 이때의 거리는 다음과 같다.

$$m_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

2) 점 (x, y) 가 $x+y=0$ (단, $0<|x|\le\sqrt{2}$)를 만족하는 경우

$$l=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(x+1)^2}=\sqrt{2\left(x+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$$

여기서 $-\sqrt{2}\le-\frac{\sqrt{2}+1}{2}<0$ 이므로 거리의 최솟값은 다음과 같다.

$$m_2=\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1), 2)에 의해서 m 은 $m_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 와 $m_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 중에서 작은 값이 된다.

한편 $m_1-m_2=\sqrt{3}-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이고, $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\sqrt{2}<\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=3=(\sqrt{3})^2$ 이다. 그러므로 $m_1>m_2$ 이다. 따라서 $m=m_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

04 가톨릭대학교(의학계) 수시[4)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	*의예과: 1등급 3개	수학(4문항 4문제), 독서와 문법, 생활과 윤리, 한국사	80분(전체 120분)

[문항 (가)] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (90점)

(ㄱ) 첫 번째 시행에서 하나의 주사위를 n번 던진다. 두 번째 시행에서는 첫 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈이 나온 횟수만큼 주사위를 던진다. 이때 첫 번째와 두 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 횟수의 합을 확률변수 X라고 하자.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 확률변수 X에 대하여 실수 a_k는 다음과 같다.

$$a_k = 2^k \mathrm{P}(X=k) \quad (\text{단, } k=0, 1, 2, \cdots, n)$$

(ㄷ) **[이항 정리]** 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

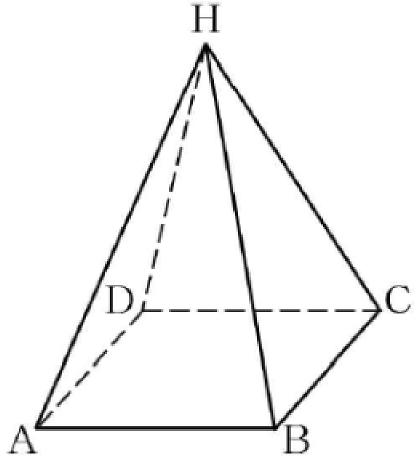
$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, a^{n-r} b^r$$

논제. (90점) 제시문 (ㄴ)의 a_k에 대하여 $\sum_{k=0}^{n} a_k$를 구하고 그 과정을 논술하시오.

4) 가톨릭대학교 홈페이지

[문항 (나)] 제시문 (ㄱ)을 읽고 논제에 답하시오. (90점)

(ㄱ) 아래 정사각뿔에서 사각형 ABCD 는 한 변의 길이가 2인 정사각형이다. 옆면의 삼각형은 모두 이등변삼각형이고 선분 $\overline{AH}$ 의 길이는 4이다. 삼각형 HAB 의 내심을 P, 삼각형 HBC 의 내심을 Q 라고 하자.



상수 k에 대하여 다음 조건을 만족하는 모든 점 X 의 집합을 S라고 하자.

> 선분 $\overline{DB}$ 위의 어떤 점 R 에 대하여 $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{HX} = k\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR}$ 이다.

논제. (90점) 선분 $\overline{DB}$ 위의 점 R 에 대하여 내적 $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR}$ 의 값의 범위를 구하고 그 과정을 논술하시오. 그리고 집합 S가 공집합이 되기 위한 상수 k의 값의 범위를 구하고 그 과정을 논술하시오.

[문항 (다)] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (90점)

(ㄱ) [함수의 극한의 대소 관계] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x의 값에서 $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다. 함수의 극한의 대소 관계는 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$인 경우에도 성립한다.

(ㄴ) 집합 $X=\{x|0 \le x \le 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이고, 함수 $h(x)=x^3-6x^2+8x+5$와 $0 \le x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$h(g(x))=x^2-4x+8$$

논제. (90점) 제시문 (ㄴ)의 함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)$의 값을 구하고 그 과정을 논술하시오.

[문항 (라)] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (90점)

(ㄱ) 실수 a, b와 정의역이 $\{x|x<0\}$인 유리함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 정의역이 $\{x|x>-a\}$인 유리함수 $g(x)=\dfrac{1}{x+a}-b$에 대하여 다음을 만족하는 좌표평면 위의 점 (a, b)가 나타내는 영역을 D라고 하자.

곡선 $y=f(x)$에 접하고 동시에 곡선 $y=g(x)$에 접하는 직선이 있다.

(ㄴ) 점 $\mathrm{P}(2\sqrt{3}, 0)$, 점 $\mathrm{Q}(-2\sqrt{3}, 0)$에 대하여, 제1사분면 위의 점 $\mathrm{R}(x, y)$가 제시문 (ㄱ)의 영역 D에 속하지 않을 때, 선분 $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이와 선분 $\overline{\mathrm{QR}}$의 길이의 합을 M이라고 하자. (단, $x>0$, $y>0$)

논제. (90점) 제시문 (ㄱ)의 영역 D를 좌표평면 위에 나타내고 그 근거를 논술하시오. 또한 제시문 (ㄴ)의 M의 값의 범위를 구하고 그 근거를 논술하시오.

• 풀어보기

문제1. 두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\quad(k=1,\,2,\,3,\,4,\,5)$$

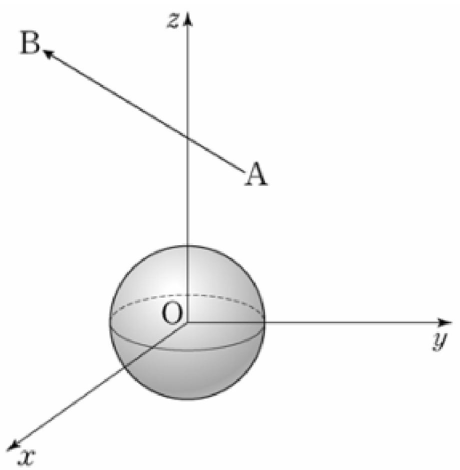
이다. $\mathrm{E}(X)=4$ 일 때, $\mathrm{E}(Y)$ 의 값은? (2017년 9월 모평)

① $\frac{5}{2}$　　② $\frac{7}{2}$　　③ $\frac{9}{2}$　　④ $\frac{11}{2}$　　⑤ $\frac{13}{2}$

문제2. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\,\sqrt{2},\,\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(1,\,-\sqrt{2},\,2\sqrt{3})$에 대하여 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{AP}}\rvert=1$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{33}$ 이다. $16(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) (2016학년도 수능)



문제3. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<1) \\ -3x+4 & (x\ge 1) \end{cases},\quad g(x)=2^x+2^{-x}$$

에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (2015년 6월 모평)

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ②

$\mathrm{P}(X=k)=p_k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라 하면

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5} kp_k=4$ 이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{1}{2}p_k+\frac{1}{10}\right)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5} k\\&=\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{10}\times\frac{5\times 6}{2}\\&=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 50

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$를 시점이 원점이 되도록 옮겼을 때, 종점을 P'이라 하자.

이때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

이때, 점 Q가 점 P'이 되도록 잡으면 최댓값을 가지므로

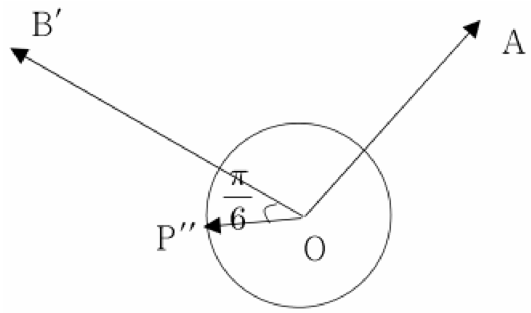
$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\le\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}'}-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ …… ㉠

한편,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\left(1,\ -\sqrt{2},\ 2\sqrt{3}\right)-\left(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\right)\\&=\left(-1,\ -2\sqrt{2},\ \sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

이고, 점 B'을 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$이라 하자.

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 그림과 같이 점 P'이 세 점 O, A, B'에 의하여 결정된 평면 위에 그림과 같이 P''에 있을 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 최솟값을 갖는다.



이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}$이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\cos\alpha = \frac{(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}) \cdot (-1,\ -2\sqrt{2},\ \sqrt{3})}{\sqrt{4+2+3}\sqrt{1+8+3}}$$
$$= \frac{(-2)+(-4)+3}{6\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP''}$이 이루는 각의 크기는 $\alpha+\frac{\pi}{6}$이고

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{12}$$

그러므로

$$\overrightarrow{OP''}\cdot\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OP''}||\overrightarrow{OA}|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1\times\sqrt{4+2+3}\times\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{6}\right)$$
$$= -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}$$

그러므로 ㉠에서 $1-\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA} \le 1-\overrightarrow{OP''}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{7}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}$

따라서 최댓값은 $\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}$이므로

$a=\frac{7}{4}$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 16(a^2+b^2)=50$

풀어보기(문제3) 정답 ⑤

$(g \circ f)(1) = g(1) = \dfrac{5}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1+0} (g \circ f)(x) = g(1) = \dfrac{5}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1-0} (g \circ f)(x) = g(a) = 2^a + 2^{-a}$

$(g \circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$(g \circ f)(1) = \lim\limits_{x \to 1+0} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (g \circ f)(x)$

$\therefore 2^a + 2^{-a} = \dfrac{5}{2}$

$2 \cdot 2^{2a} - 5 \cdot 2^a + 2 = 0$

$(2 \cdot 2^a - 1)(2^a - 2) = 0$

$2^a = \dfrac{1}{2},\ 2$

$a = -1,\ 1$

따라서 모든 실수 a의 곱은 -1이다.

[문항(가)] 대학발표 예시답안

확률변수 X는 두 번의 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 횟수의 합이므로 확률변수 X가 가지는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$이다. $0 \le k \le n$인 정수 k와 $0 \le i \le k$인 정수 i에 대하여 첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 i번, 두 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 $(n-i)$번 중 $(k-i)$번 나오면 X의 값은 k이고, 그 확률은

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i} \times {}_{n-i}\mathrm{C}_{k-i}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} &= \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}\frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{4}{9}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{k!}{i!(k-i)!}\left(\frac{3}{2}\right)^i \\
&= {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{4}{9}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^k \times {}_k\mathrm{C}_i\left(\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

이다. 따라서 $\mathrm{P}(X=k)$는

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=k) &= \sum_{i=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{4}{9}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^k \times {}_k\mathrm{C}_i\left(\frac{3}{2}\right)^i \\
&= {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{4}{9}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^k\sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i\left(\frac{3}{2}\right)^i \\
&= {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{4}{9}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1+\frac{3}{2}\right)^k \\
&= {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{5}{4}\right)^k\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)
\end{aligned}
$$

이다. 그러므로 $\sum_{k=0}^{n} a_k$ 는

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 2^k \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} 2^k {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{5}{4}\right)^k \left(\frac{4}{9}\right)^n$$
$$= \left(\frac{4}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{5}{2}\right)^k = \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(1+\frac{5}{2}\right)^n = \left(\frac{14}{9}\right)^n$$

이다.

[문항(나)] 대학발표 예시답안

정사각형의 대각선의 교점을 O, 선분 AB의 중점을 E, 선분 BC의 중점을 F라고 하자. 이등변삼각형에서 내접원의 반지름을 r, 이 삼각형의 넓이를 S, 이 삼각형의 둘레의 길이를 L이라고 하면, $S = r\dfrac{L}{2}$ 를 만족하므로, 삼각형 HAB 내접원의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 이다.

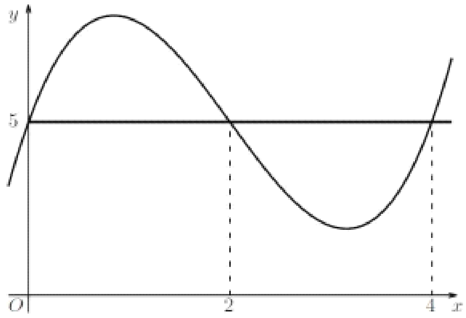
점 P는 선분 HE 위에 있고, 선분 HP의 길이는 $4\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 이 되어, $\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HP}}}{2}\right|^2 = \dfrac{12}{5}$ 이다.

$\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OE}}$, $\vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{z} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ 라고 하자. $(|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1,\ |\vec{z}| = \sqrt{14})$ 점 P는 선분 HE를 $4:1$로 내분하므로, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{4}{5}\vec{x} + \dfrac{1}{5}\vec{z}$ 이고, 마찬가지로 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{4}{5}\vec{y} + \dfrac{1}{5}\vec{z}$ 임을 알 수 있다. 선분 DB위의 임의의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t(\vec{x}+\vec{y})$ 라고 하면 $(-1 \le t \le 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(t-\dfrac{4}{5}\right)\vec{x} + t\vec{y} - \dfrac{1}{5}\vec{z}$, $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = t\vec{x} + \left(t-\dfrac{4}{5}\right)\vec{y} - \dfrac{1}{5}\vec{z}$ 이므로, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}} = 2t\left(t-\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{14}{25} = 2\left(t-\dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{6}{25}$ 이다. $|t| \le 1$ 이므로 $\dfrac{6}{25} \le \overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}} \le \dfrac{104}{25}$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{PX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HX}} = \overrightarrow{\mathrm{PX}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{HX}} + \overrightarrow{\mathrm{PX}}) = |\overrightarrow{\mathrm{PX}}|^2 + \overrightarrow{\mathrm{HP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PX}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{PX}} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HP}}}{2}\right|^2 - \left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HP}}}{2}\right|^2$ 이므로 집합 S가 공집합이 되기 위해서는 선분 DB위의 임의의 점 R에 대하여 $\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HP}}}{2}\right|^2 + k\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}} < 0$가 되어야 한다. $\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}}$는 양수이므로 k는 음수가 되어야 한다. 따라서, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}}$의 최솟값에서도 음수가 되어야 하므로, 구하는 범위는 $\dfrac{12}{5} + k\dfrac{6}{25} < 0$, $k < -10$이다.

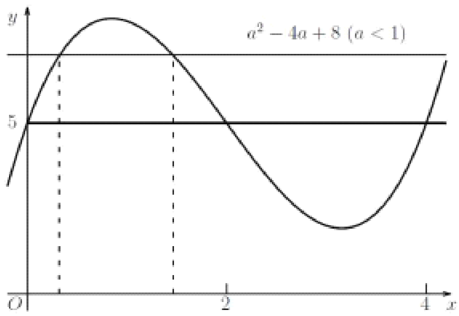
[문항(다)] 대학발표 예시답안

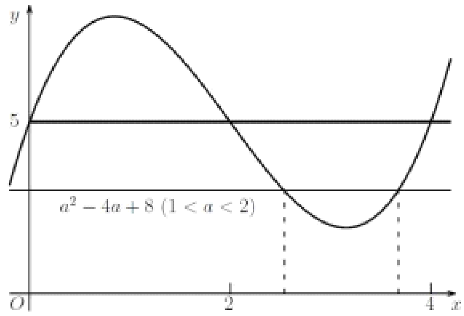
$y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$h(g(1))=5$이므로 $g(1)$은 0, 2, 4 중 하나의 값이다.

그런데 $0 \le a < 1$이면 $h(g(a))=a^2-4a+8>5$이고, $0 \le g(a) \le 4$이므로 아래 그래프로부터 $0 \le g(a) \le 2$이다. 따라서 $0 \le \lim_{a\to 1-} g(a) \le 2$이다.





또한, $1<a \le 2$이면 $h(g(a))=a^2-4a+8<5$이고, $0 \le g(a) \le 4$이므로 위 그래프로부터 $2 \le g(a) \le 4$이다. 따라서 $2 \le \lim_{a\to 1+} g(a) \le 4$이다.

그런데 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=\lim_{a\to 1+} g(a)=\lim_{a\to 1-} g(a)$이고, 따라서 $g(1) \le 2$, $g(1) \ge 2$이다. 그러므로 $g(1)=2$이다.

[문항(라)] 대학발표 예시답안

곡선 $y=f(x)$, 곡선 $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선을 l, 곡선 $y=f(x)$와의 교점을 $\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$, 곡선 $y=g(x)$와의 교점을 $\left(q,\ \dfrac{1}{q+a}-b\right)$라고 하면 직선 l위의 점 $(x,\ y)$는 다음 두 식을 모두 만족하여야 한다.

$$y=-\frac{1}{p^2}x+\frac{2}{p}, \qquad y=-\frac{1}{(q+a)^2}x+\frac{q}{(q+a)^2}+\frac{1}{q+a}-b$$

따라서

$$p^2=(q+a)^2, \qquad \frac{2}{p}=\frac{q}{(q+a)^2}+\frac{1}{q+a}-b \ \cdots ①$$

$p<0$이고 $q>-a$이므로 ①의 첫 번째 식에서 $q+a=-p$가 되고 두 번째 식에 대입하면

다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{a}{p^2}+\frac{4}{p}+b=0 \ \Rightarrow \ h(p)=bp^2+4p+a=0 \ (\text{단, } p<0)$$

그러므로 방정식 $h(x)=0$이 음수인 해를 한 개 이상 가져야 한다.

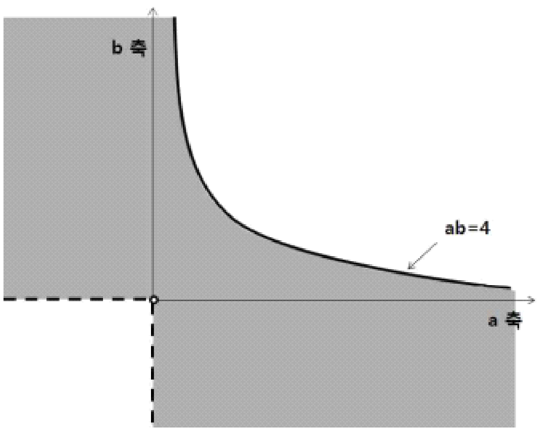
ⅰ) $b=0$인 경우

$h(x)=4x+a$가 되어 $a>0$이면 방정식 $h(x)=0$은 음수인 해를 갖는다.

ⅱ) $b\neq 0$인 경우

$h(x)=b\left(x^2+\dfrac{4}{b}x+\dfrac{a}{b}\right)$이다. 따라서 $\dfrac{a}{b}<0$이면 방정식 $h(x)=0$은 양수와 음수인 실근을 각각 하나씩 갖는다. $\dfrac{a}{b}\geq 0$이면 이차방정식의 판별식과 근과 계수와의 관계로부터 방정식 $h(x)=0$은 $4-ab\geq 0$이고, $-\dfrac{4}{b}<0$일 때 음수의 실근을 갖는다.

ⅰ), ⅱ)로부터 영역 D는 $b>0$이면 $ab\leq 4$이고 $b\leq 0$이면 $a>0$이다. 이를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



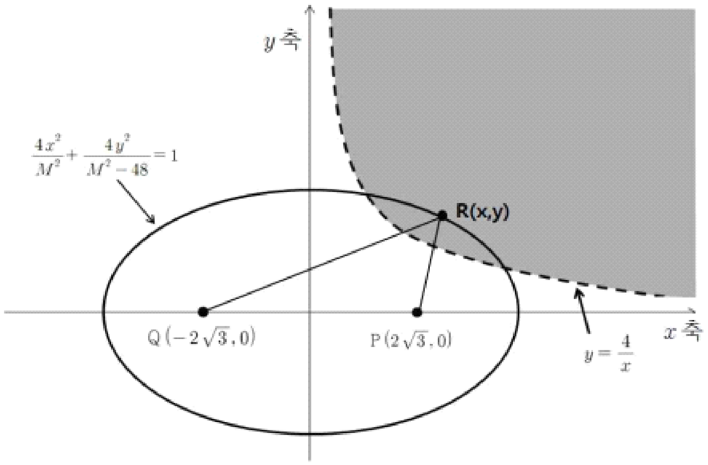
점 R이 영역 D에 속하지 않으므로, 다음이 성립한다.

$$xy>4 \ (x>0)$$

그리고 타원의 정의로부터 점 R은 장축의 길이가 M이고 두 초점이 각각 P, Q인 타원 위에 있다. 따라서

$$\frac{4x^2}{M^2}+\frac{4y^2}{M^2-48}=1 \ (\text{단, } M^2>48)$$

도 만족한다.



위의 그림으로부터 $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이와 $\overline{\mathrm{QR}}$의 길이의 합 M이 갖는 범위는 다음의 연립방정식이 서로 다른 두 교점을 갖게 하는 범위와 같다.

$$\frac{4x^2}{M^2}+\frac{4y^2}{M^2-48}=1,\ y=\frac{4}{x}\ \ (\text{단, } x, y>0,\ M^2>48)$$

따라서

$$\frac{4x^2}{M^2}+\frac{4^3}{(M^2-48)x^2}=1 \Rightarrow 4(M^2-48)t^2-M^2(M^2-48)t+4^3M^2=0\ \ (\text{단, } t=x^2)$$

위의 방정식이 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 하므로, 이차방정식의 판별식과 근과 계수와의 관계로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$M^4-48M^2-4^5>0 \Rightarrow M^2>64$$

따라서 M의 값의 범위는 다음과 같다.

$$M>8$$

05 건국대학교 모의[5)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정에서 습득한 수리, 과학 등 자연계 관련 지문 제시, 이를 근거로 출제	없음	수학 2문항, 과학 1문항	100분

[제시문 1]

(가) 직각삼각형의 변의 비에서 비롯된 삼각함수는 측량이나 항해 등의 다양한 분야에 이용되어 왔다. 또한 삼각함수는 진동이나 음향, 파동과 같이 주기적으로 일어나는 자연현상을 나타내고 분석하는데 유용하게 활용된다.

(나) 지구가 태양의 주위를 돈다는 코페르니쿠스의 인식의 대전환 이후 천문학의 발전은 미적분학에 의해 가속화되었다. 오늘날 미적분학은 과학 문명을 꽃피운 기반이 되었으며 그 활용범위는 자연과학 전반은 물론 사회과학 분야에 이르기까지 매우 광범위하다.

(다) 좌표평면에서 점 P를 직선 l에 대칭이동한 점 Q의 좌표는 다음 두 가지 성질을 이용하여 구할 수 있다.

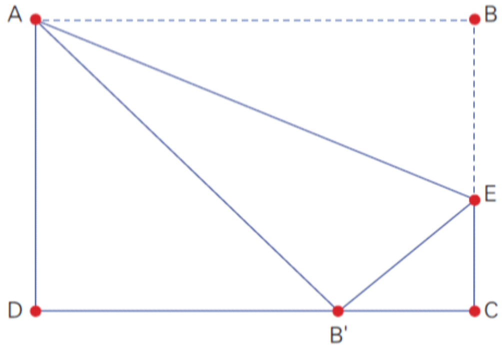
(1) 선분 PQ의 중점이 직선 l 위에 있다.

(2) 두 점 P, Q를 지나는 직선과 직선 l은 서로 수직이다.

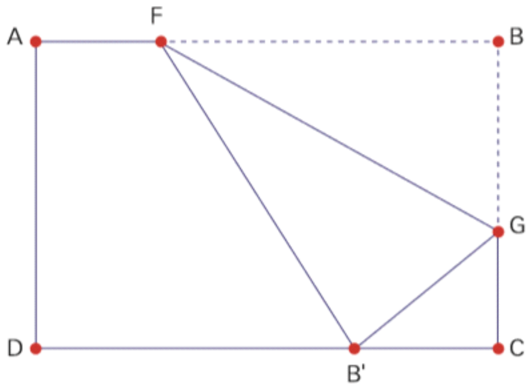
가로 AB의 길이가 3, 세로 BC의 길이가 2인 직사각형 종이 ABCD가 있다.

5) 건국대학교 홈페이지

[문제 1-1] 선분 BC 위의 점 E를 적절히 택하여 접힌 부분이 선분 AE가 되도록 접으면 다음 그림과 같이 꼭짓점 B가 옮겨져서 변 CD 위에 놓이도록 할 수 있다. 이때 $\tan\angle EAB$의 값을 구하되 풀이과정도 함께 쓰시오.

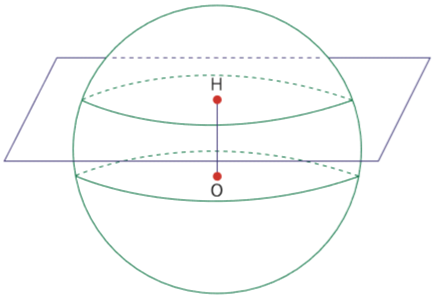


[문제 1-2] 선분 AB 위의 점 F와 선분 BC 위의 점 G를 적절히 택하여 접힌 부분이 선분 FG가 되도록 접으면 다음 그림과 같이 꼭짓점 B가 옮겨져서 변 CD 위에 놓이도록 할 수 있다. 선분 FG의 길이가 최소가 될 때, $\tan\angle GFB$의 값을 구하되 풀이과정도 함께 쓰시오.



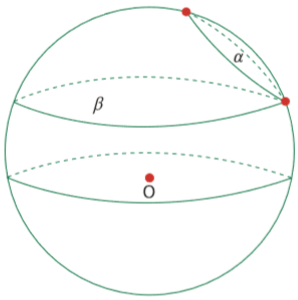
[제시문 2]

(가) 중심이 O인 구에 대하여, 이 구를 평면으로 자를 때 생기는 단면은 원이다. 이 원의 중심은 구의 중심 O에서 이 평면에 내린 수선의 발과 같다. 한편, 이 구 내부의 점 $\mathrm{H}(\neq \mathrm{O})$에 대하여 점 H를 지나고 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$에 수직인 평면이 유일하다. 그러므로 구 내부의 중심이 아닌 점 H에 대하여, 그 단면이 중심이 H인 원이 되도록 구를 자르는 평면은 오직 하나만 있다.



[그림 2-1]

(나) 다음의 [그림 2-2]는 반지름이 3인 구를 평면으로 자를 때 나타나는 단면인 원들을 그린 것으로서 이 두 원 α, β는 반지름이 각각 1과 2이고 오직 한 점에서 만난다.



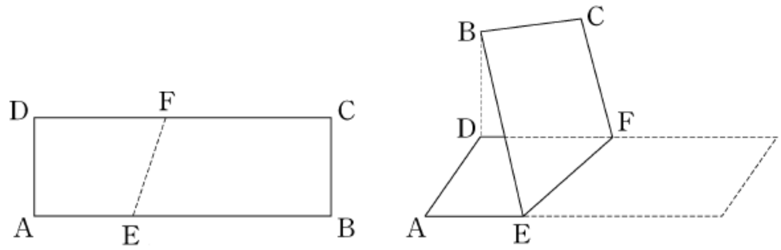
[그림 2-2]

[문제 2-1] 중심이 원점 O이고 반지름이 3인 구를 평면으로 자를 때 나타나는 원으로서 중심의 좌표가 $(1, 1, 0)$인 원을 원 O_1, 또 중심의 좌표가 $(0, 1, 1)$인 원을 O_2라 할 때 두 원 O_1, O_2의 교점이 P, Q이다. 선분 PQ의 길이를 구하되 풀이과정도 함께 쓰시오.

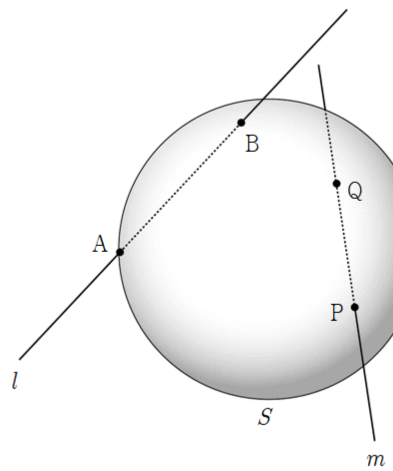
[문제 2-2] (나)의 [그림 2-2]에서 원 α를 만드는 평면과 원 β를 만드는 두 평면이 이루는 이면각의 크기가 θ이다. $\cos\theta$의 값을 구하되 풀이과정도 함께 쓰시오.

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) (2013 대입 수능)



문제2. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\angle ABQ=\frac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (2016. 전국연합)



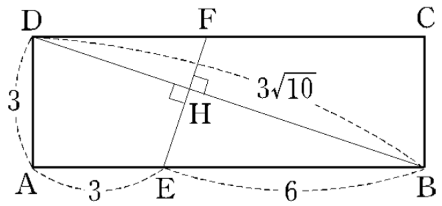
• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 40

B에서 $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DH}\perp\overline{EF}$이다.
두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각 θ는 두 평면의 교선 $\overline{EF}$에 수직인 $\overline{BH}$와 $\overline{DH}$가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\cos\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{BH}}$$

이제 종이를 다시 펼치면 그림과 같다.



$\triangle BDA \backsim \triangle BEH$이므로 $\overline{EB} : \overline{HB}=\overline{DB} : \overline{AB}$

$\overline{HB}=\dfrac{9\cdot 6}{3\sqrt{10}}=\dfrac{18}{\sqrt{10}}$

$\overline{DH}=\overline{DB}-\overline{BH}=3\sqrt{10}-\dfrac{18}{\sqrt{10}}=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 60\cos\theta=60\times\dfrac{2}{3}=40$

풀어보기(문제2) 정답 60

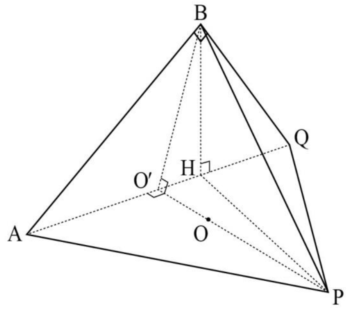
구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 O′라 하면 점 O′는 선분 AQ의 중점이고 $\angle ABQ=\dfrac{\pi}{2}$이므로 점 B는 점 O′를 중심으로 하고 반지름이 선분 AO′인 원 위의 점이다.

삼각형 BO′O에서 $\overline{O'B}=\sqrt{3}$, $\overline{OB}=2$, $\overline{OO'}=1$이므로 $\angle BO'O=\dfrac{\pi}{2}$이다.

그러므로 $\overline{OO'}\perp\overline{O'B}$, $\overline{PO'}\perp\overline{O'B}$이다.

$\overline{AO'}\perp\overline{PO'}$, $\overline{PO'}\perp\overline{O'B}$이므로 직선 PO′는 평면 ABQ와 수직이고, 평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다.
그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 APB의 평면 APQ

위로의 정사영은 삼각형 APH이다.



삼각형 BO′P는 직각삼각형이고 $\overline{O'B}=\sqrt{3}$, $\overline{O'P}=3$이므로 $\overline{PB}=2\sqrt{3}$이다.

삼각형 APB는 $\overline{PA}=\overline{PB}=2\sqrt{3}$인 이등변삼각형이고, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 APB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}$이다.

삼각형 ABQ와 삼각형 AHB는 닮음이므로 $\overline{AH}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

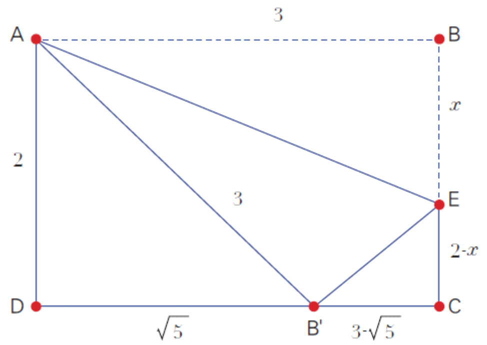
그러므로 삼각형 APH의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 3=2\sqrt{3}$이고

$$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 APH의 넓이})}{(\text{삼각형 APB의 넓이})}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

따라서 $100\cos^2\theta=100\times\frac{3}{5}=60$이다.

[문항 1] 대학발표 예시답안

[문제 1-1]



$\overline{AB'}=3$, $\overline{AD}=2$이므로 $\overline{B'D}=\sqrt{5}$이다.

$\overline{BE}=x$라 하면, $\overline{B'E}=x$, $\overline{CE}=2-x$, $\overline{B'C}=3-\sqrt{5}$이므로

$x^2=(2-x)^2+(3-\sqrt{5})^2$이 성립한다. 이 방정식을 풀면, $x=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$이다.

그러므로 $\tan\angle EAB=\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}}{3}=\frac{9-3\sqrt{5}}{6}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$이다.

[문제 1-2]
(풀이1)
꼭짓점 B가 옮겨져서 변 CD 위에 놓인 점을 B′라고 하면 $\angle\mathrm{FGB}' = \angle\mathrm{FGB}$이다.
그러므로 $\angle\mathrm{B'GC} = \pi - 2\angle\mathrm{FGB}$이다. 이제 선분 $\overline{\mathrm{FG}} = l$, $\overline{\mathrm{BG}} = x$, $\angle\mathrm{FGB} = t$라고 하면
$l\cos t = x$, $x\cos(\pi - 2t) = 2 - x$이다.
이 두 식에서 x를 소거하여 l을 t의 식으로 정리하면

$$l = \frac{2}{\cos t\,(1-\cos 2t)} = \frac{1}{\cos t\,(1-\cos^2 t)}$$

이제, $\cos t = s$로 치환하면, 함수 $g(s) = s(1-s^2)$, $0 < s < 1$은 $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 최댓값 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$을 가지므로 l은 $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 최솟값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

이때, $\overline{\mathrm{BG}} = \frac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{FB}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 $\tan\angle\mathrm{GFB} = \frac{\overline{\mathrm{BG}}}{\overline{\mathrm{FB}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

(풀이2)
선분 $\overline{\mathrm{BG}} = s$, $\overline{\mathrm{BF}} = t$라 하면 직선 GF의 기울기는 $-\frac{s}{t}$이므로 직선 BB′의 기울기는 $\frac{t}{s}$ $(1 < s < 2)$이다. 따라서 직선 BB′의 방정식은 $y = \frac{t}{s}(x-3) + 2$이다.

이를 이용하여 점 B′의 좌표를 구하면, $\mathrm{B}' = \left(3 - \frac{2s}{t}, 0\right)$이다.

이로부터 $\overline{\mathrm{CB}'} = \frac{2s}{t}$ 임을 알 수 있다.

$\overline{\mathrm{CB}'}^2 + \overline{\mathrm{CG}}^2 = \overline{\mathrm{B'G}}^2$이므로 $\left(\frac{2s}{t}\right)^2 + (2-s)^2 = s^2$이 성립한다.

이 식을 정리하면 $t^2 = \frac{s^2}{s-1}$을 얻는다.

이제 $\overline{\mathrm{FG}}^2 = s^2 + t^2 = s^2 + \frac{s^2}{s-1} = s^2 + s + 1 + \frac{1}{s-1}$가 최솟값을 갖게 되는 s의 값을 구하기 위하여 함수 $f(s) = s^2 + s + 1 + \frac{1}{s-1}$를 미분하면

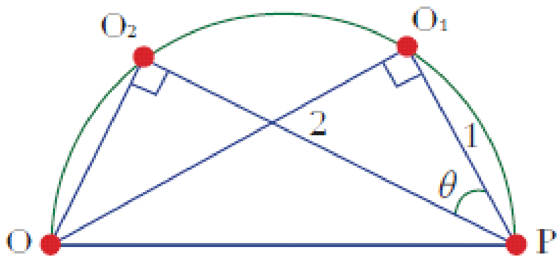
$f'(s) = \frac{s^2(2s-3)}{(s-1)^2}$이므로 $s = \frac{3}{2}$일 때 최솟값을 갖는다. 이때 t의 값은 $\frac{3}{\sqrt{2}}$이다.

그러므로 $\tan\angle\mathrm{GFB} = \frac{\overline{\mathrm{BG}}}{\overline{\mathrm{FB}}} = \frac{s}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

[문항 2] 대학발표 예시답안
[문제 2-1]
중심이 $(1, 1, 0)$인 원을 포함하는 평면은 법선벡터가 $(1, 1, 0)$이고 점 $(1, 1, 0)$을 포함

한다. 따라서 이 평면의 방정식은 $1(x-1)+1(y-1)=0$이다. 마찬가지로 하면, 중심이 $(0,1,1)$인 원을 포함하는 평면의 방정식은 $1(y-1)+1(z-1)=0$이다.
두 원의 교점은 평면 $1(x-1)+1(y-1)=0$과 $1(y-1)+1(z-1)=0$의 교선 위에 있으므로 교점 P, Q는 두 평면의 교선 $l: x-1=-(y-1)=z-1$ 위에 있다.
교선 l과 구 $x^2+y^2+z^2=9$의 교점이 P, Q이므로 방정식 $x-1=-(y-1)=z-1$과 $x^2+y^2+z^2=9$을 연립하며 풀면 P, Q는 점 $\left(\frac{2+\sqrt{19}}{3}, \frac{4-\sqrt{19}}{3}, \frac{2+\sqrt{19}}{3}\right)$과 $\left(\frac{2-\sqrt{19}}{3}, \frac{4+\sqrt{19}}{3}, \frac{2-\sqrt{19}}{3}\right)$이다. 그러므로 선분 PQ의 길이는 $\sqrt{\frac{76}{3}}=\frac{2\sqrt{57}}{3}$이다.

[문제 2-2]
평면 α 위의 원과 β 위의 원의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고 두 원의 교점을 P, 두 평면 α와 β의 교선을 l이라 하자.
평면 α에서 직선 l과 주어진 원은 점 P에서만 만나므로 원의 중심 O_1과 점 P를 연결한 직선은 l에 수직이다. 원의 중심 O_1이 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발이므로 삼수선의 정리에 의하여 직선 OP는 l에 수직이다. 직선 O_2P도 l에 수직이므로 점 O, O_1, O_2, P는 같은 평면 위에 있다. 따라서 $\angle O_1PO_2=\angle O_1PO-\angle O_2PO$이다.



$\angle O_1PO=\theta_1$, $\angle O_2PO=\theta_2$라 하면, $\cos\theta_1=\frac{1}{3}$, $\cos\theta_2=\frac{2}{3}$이다.
$\angle O_1PO_2$가 두 평면 α와 β의 이면각이므로

$$\cos\theta=\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$$

이다.

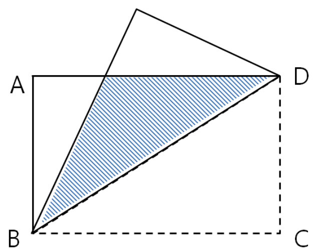
06 건국대학교 수시[6)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(2문항, 4문제)	120분

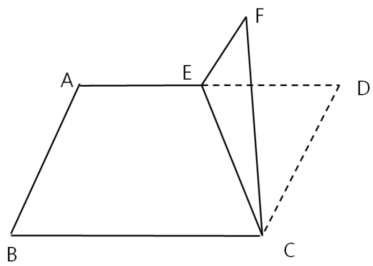
[제시문 1]

(가) 어떤 도형을 직선에 대하여 대칭이동한 도형은 원래의 것과 모양과 크기가 같다. 즉 합동이다.

(나) 평면에 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. [그림 1]은 이 직사각형 모양의 종이를 대각선을 따라 접은 것을 나타낸 것이다. [그림 2]는 선분 AD 위의 점 E를 선택하여 직사각형 ABCD를 선분 CE를 따라 접었다 편 것을 나타낸 것이다. F는 꼭짓점 D가 이동한 점으로 평면 CEF는 평면 ABCD와 수직이다.



[그림 1]



[그림 2]

[문제 1-1] [그림 1]에서 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ 라고 할 때, 빗금으로 표시된 부분의 넓이를 a와 b에 관한 식으로 표현하고 풀이과정을 쓰시오.

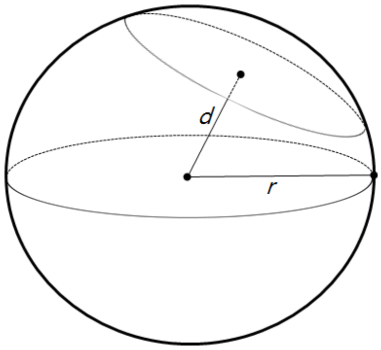
[문제 1-2] [그림 2]에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$ 이라고 하자. 사각형 ABCE가 밑면이고, F가 꼭짓점인 사각뿔 F－ABCE의 부피의 최댓값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

6) 건국대학교 홈페이지

[제시문 2]

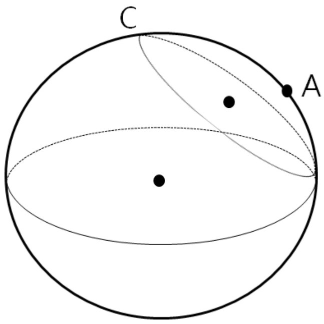
반지름의 길이가 r인 구의 중심과 구의 중심에서 한 평면에 내린 수선의 발 사이의 거리를 d라고 할 때, 구와 이 평면의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $d > r$ 이면 만나지 않는다.
(2) $d = r$ 이면 한 점에서 만난다 (접한다).
(3) $d < r$ 이면 만나서 원이 생긴다.



[그림 3]

[문제 2-1] 구 $x^2+y^2+z^2=9$와 평면 $x+y+z=3$이 만나서 생기는 원을 C라고 하자. 점 $\mathrm{A}(2,2,1)$에서 C 위의 점까지의 거리의 최솟값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

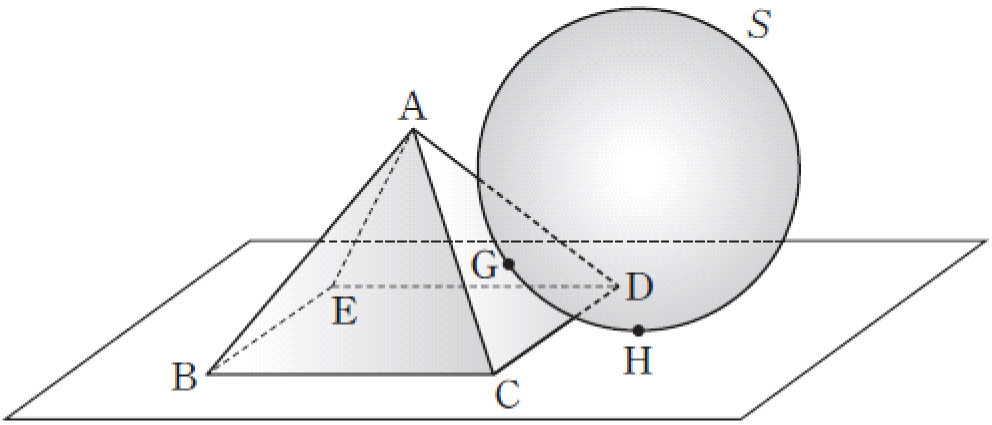


[문제 2-2] 구 $(x-2)^2+y^2+z^2=2$와 평면 $mx-y=0$이 만나서 원이 생길 때, 이 원의 중심을 P라 하자. m의 값이 변함에 따라 P가 움직인다. P가 그리는 곡선의 길이를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

• 풀어보기

문제1. $\overline{AB}=8$, $\angle ACB=90^\circ$ 인 삼각형 ABC에 대하여 점 C를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선 위에 $\overline{CD}=4$인 점 D가 있다. 삼각형 ABD의 넓이가 20일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (2017 9월 모평)

문제2. 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정사각뿔 A−BCDE가 있다. 구 S가 삼각형 ACD의 무게중심 G에서 평면 ACD와 접하고, 평면 BCDE 위의 점 H에서 평면 BCDE와 접한다. 점 H를 지나고 직선 BC와 수직인 평면과 구 S가 만나서 생기는 원의 평면 ABE 위로의 정사영의 넓이는? (2018 수능완성)
(단, 구 S의 중심은 정사각뿔 A−BCDE의 외부에 있다.)

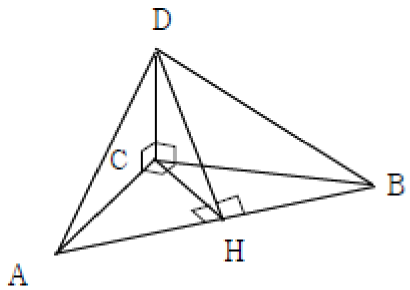


① $(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})\pi$　② $(3\sqrt{2}+2\sqrt{6})\pi$　③ $(2\sqrt{2}+3\sqrt{6})\pi$
④ $(3\sqrt{2}+3\sqrt{6})\pi$　⑤ $(3\sqrt{2}+4\sqrt{6})\pi$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 12

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{DC}\perp$(평면ABC), $\overline{DH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$



한편 삼각형 ABD의 넓이가 20이고 $\overline{AB}=8$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DH}=20$$

$$\frac{1}{2}\times 8\times\overline{DH}=20$$

$$\overline{DH}=5$$

직각삼각형 DCH에서 $\overline{DH}^2=\overline{DC}^2+\overline{CH}^2$

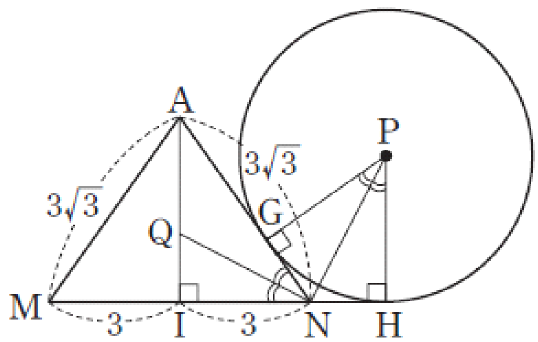
$$5^2=4^2+\overline{CH}^2$$

$$\overline{CH}=3$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$이다.

풀어보기(문제2) 정답 2

두 점 G, H를 지나고 평면 BCDE에 수직인 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



위 그림에서 두 점 M, N은 각각 선분BE, CD의 중점이므로

$$\overline{MN}=6,\ \overline{AM}=\overline{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$$

이고, 선분 MN의 중점을 I라 하면

$\overline{NI}=3$, $\overline{AI}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$

점 G는 삼각형 ACD의 무게중심이므로

$\overline{GN}=\frac{1}{3}\overline{AN}=\sqrt{3}$

한편, 구 S의 중심을 P, $\angle ANI$의 이등분선이 선분 AI와 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{AQ}:\overline{QI}=\overline{NA}:\overline{NI}=\sqrt{3}:1$이므로 $\overline{QI}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$이다.

이때 $\angle ANI=\angle GPH$에서 $\angle QNI=\angle NPG$이고 $\angle NIQ=\angle PGN=\frac{\pi}{2}$이므로

$\triangle NQI \backsim \triangle PNG$

따라서 구 S의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{QI}:\overline{NG}=\overline{NI}:\overline{PG}$에서

$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}:\sqrt{3}=3:r$이므로 $r=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$이다.

즉, 점 H를 지나고 직선 BC와 수직인 평면과 구 S가 만나서 생기는 원의 넓이는 $(6+3\sqrt{3})\pi$ 이다.

이때 $\angle MAI=\theta$라 하면 점 H를 지나고 직선 BC와 수직인 평면과 평면 ABE가 이루는 예각의 크기가 θ이고 $\cos\theta=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$이다.

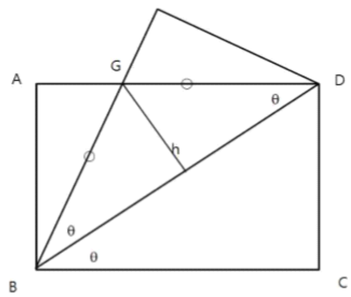
따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$(6+3\sqrt{3})\pi\times\cos\theta=(6+3\sqrt{3})\pi\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=(3\sqrt{2}+2\sqrt{6})\pi$$

이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

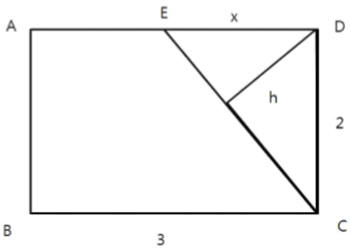
문제 1-1.



삼각형 GBD의 높이를 h라고 하자. 종이를 접었기 때문에 삼각형에서 $\angle GBD=\angle DBC$이다. 이 각을 θ라 두자. $\angle GDB+\angle CDB=\frac{\pi}{2}$이고 $\angle GDB=\theta$이다. 그러므로 삼각형 GBD

가 이등변삼각형이므로 높이 $h=\tan\theta\times\frac{\overline{BD}}{2}=\frac{a}{2b}\sqrt{a^2+b^2}$ 이다. 이때, 삼각형 BCD 를 이용하여 $\tan\theta=\frac{a}{b}$ 이다. 그러므로 삼각형 GBD 의 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b}=\frac{a}{4b}(a^2+b^2)$ 이다.

문제 1-2.



$\overline{DE}=x$ 라고 두자. x 의 범위는 $0\le x\le 3$ 이다. 사각뿔 F-ABCE 의 밑면의 넓이는 사각형 ABCD 의 넓이에서 삼각형 DEC 의 넓이를 빼면 된다. 즉, (밑면의 넓이)= $3\times2-\frac{1}{2}\times2\times x=6-x$ 이다. 사각뿔 F-ABCE 의 높이를 h 라 하자. CDE 는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{CE}=\sqrt{x^2+4}$ 이다. 삼각형 CDE 의 넓이를 구하면, $\frac{1}{2}\times h\times\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{2}\times2\times x$ 에서 $h=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ 이다. 이제 사각뿔 F-ABCE 의 부피를 $V(x)$ 라고 두면 $V(x)=\frac{1}{3}(6-x)\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ 이다.

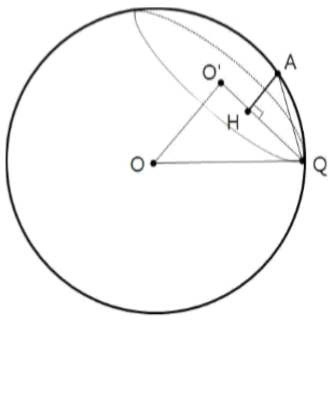
$V'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{6x-x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right)'=\frac{2}{3}\,\frac{(2-x)(x^2+2x+12)}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ 에서

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$	↗	0	↘	

이므로 부피의 최댓값은 $V(2)=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

문제 2-1.



구의 중심을 O, 원 C의 중심을 O$'$, 점 A$(2,2,1)$의 평면 α위로의 정사영을 H라고 하자. 그러면 A에서 원 위의 점 Q까지의 거리는 $\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HQ}}^2}$ 인데, $\overline{\mathrm{AH}}$가 일정하기 때문에 $\overline{\mathrm{HQ}}$가 최소가 되는 점에서 $\overline{\mathrm{AQ}}$가 최소가 된다. 그러므로 직선 O$'$H와 C의 교점 중에서 H에 가장 가까운 점을 Q로 선택하여 $\overline{\mathrm{AQ}}$의 최솟값을 계산한다.

점 O에서 α에 내린 수선의 발이 O$'$이고 α의 법선벡터 $\vec{n}$은 $\vec{n}=(1,1,1)$이므로 O$'$은 (t,t,t)로 나타낼 수 있다. O$'$이 α 위의 점이라는 사실을 이용하여 $t=1$을 얻는다. 따라서 O$'$의 좌표는 $(1,1,1)$이고 $\overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ 이다.

같은 방법을 이용하면 H의 좌표는 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$이다. 그러므로

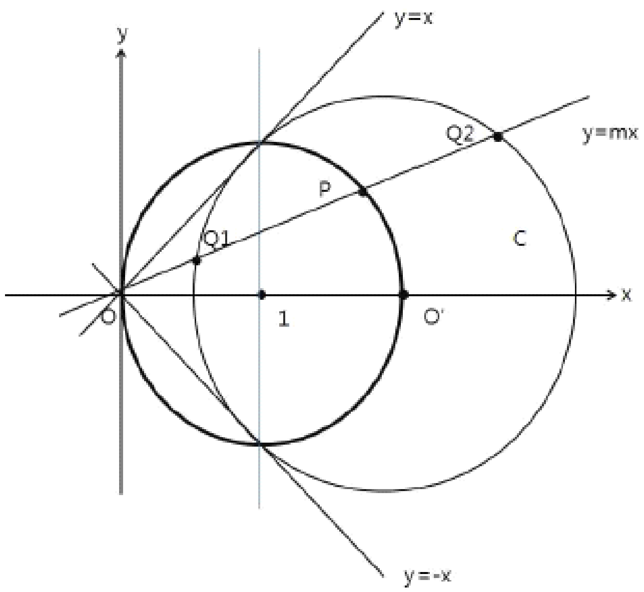
$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

이다. $\triangle \mathrm{OO'Q}$가 직각삼각형이기 때문에 $\overline{\mathrm{O'Q}}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$ 이다.

$\overline{\mathrm{O'H}}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{O'Q}}-\overline{\mathrm{O'H}}=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

이다. $\triangle \mathrm{AHQ}$가 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HQ}}^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$ 이다.

문제 2-2.



평면 $mx-y=0$을 α, 구 $(x-2)^2+y^2+z^2=2$를 S라 하자. 점 P는 S의 중심 $(2,0,0)$에서 α에 내린 수선의 발이다. α의 법선벡터가 $(m,-1,0)$이므로 P는 $(2,0,0)+(mt,-t,0)=(2+mt,-t,0)$으로 나타낼 수 있고, P가 α 위의 점이므로 $m(2+mt)-(-t)=0$이다. 따라서 $t=\frac{-2m}{m^2+1}$이고, P는 $\left(\frac{2}{m^2+1},\frac{2m}{m^2+1},0\right)$이다.

$x=\dfrac{2}{m^2+1}$, $y=\dfrac{2m}{m^2+1}$ 이라 하면, $x=\dfrac{2}{m^2+1}$ 을 풀어서 $m=\pm\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ 를 얻고, 이를 $y=\dfrac{2m}{m^2+1}$ 에 대입하여 $y=\pm\sqrt{x(2-x)}$ 를 얻는다. 제곱하여 정리하면 $(x-1)^2+y^2=1$ 이다. 따라서 P 가 그리는 곡선은 중심이 $(1,0,0)$ 이고 반지름이 1 인 원의 호이다. 호의 끝점들을 구하기 위하여 α 와 S가 만나는 m 의 범위를 다음과 같이 구한다. α 와 S의 교점 (x,y,z) 은 $(x-2)^2+(mx)^2+z^2=2$ 를 만족한다. $z^2=-\{(m^2+1)x^2-4x+2\}$ 이다. 따라서 m 의 범위는 $m^2\le 1$, 즉 $-1\le x\le 1$ 이다.

P 의 끝점은 $m=-1, m=1$ 일 때, 즉 $(1,-1,0)$ 과 $(1,1,0)$ 이다.

그림과 같이 P 는 xy 평면에서 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 오른쪽 반원을 따라 $(1,-1)$ 에서 $(1,1)$ 까지 움직인다, 그러므로 P 가 그리는 곡선인 호의 길이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\pi=\pi$ 이다.

07 경희대학교(자연계) 모의[7)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
등비수열, 삼각함수, 미분법, 함수의 최대, 최소	국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(1과목) 중 2개영역 등급합 5이내, 한국사 5등급 이내(의예과제외)	수학 필수(1문항, 4문제), 과학(물,화,생) 중 택1	120분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (60점)

[가] 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 등차수열이라 하고, 그 일정한 수를 공차라고 한다. 일반적으로 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공차 d를 더하면 제 $n+1$항이 되므로 $a_{n+1}=a_n+d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)이 성립한다. 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$이다. 그리고 이 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이다.

첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하고, 그 일정한 수를 공비라고 한다. 일반적으로 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제n항에 공비 r를 곱하면 제$n+1$항이 되므로 $a_{n+1}=ra_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)이 성립한다. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이다. 그리고 이 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면, $r\neq 1$일 때 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$이고, $r=1$일 때 $S_n=na$이다.

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 $|r|<1$일 때 수렴하고, $|r|\geq 1$일 때 발산한다.

[나] θ에 대한 삼각함수 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

이러한 관계를 이용하여, θ가 몇 사분면의 각인지 알고 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 중의 한 값을 알 때, 나머지 삼각함수의 값을 각각 구할 수 있다. 예를 들어, θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$일 때, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 각각 구할 수 있다.

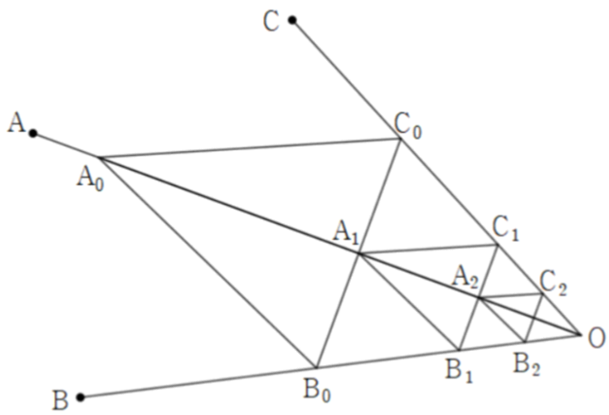
그리고 $\sin x=1$, $\cos x\leq\dfrac{1}{2}$과 같이 각의 크기가 미지수인 방정식이나 부등식의 해는 단위원과 동경을 이용하거나 삼각함수의 그래프를 이용하여 구할 수 있다.

[다] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$는 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 때에는 극댓값과 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값을 택하면 된다.

7) 경희대학교 홈페이지

[논제 Ⅰ] 제시문 [가], [나], [다]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

아래 그림에서 선분 OA는 각 BOC의 이등분선이다. 선분 OA 위의 점 A_0, 선분 OB 위의 점 B_0, 선분 OC 위의 점 C_0를 꼭짓점으로 갖는 삼각형 $A_0B_0C_0$가 있다. 여기서 선분 B_0C_0는 선분 OA와 수직이다. 선분 B_0C_0와 선분 OA의 교점을 A_1이라 하자. 점 A_1을 지나면서 선분 A_0B_0와 평행한 직선과 선분 OB의 교점을 B_1이라 하자. 점 B_1을 지나면서 선분 B_0C_0와 평행한 직선과 선분 OC의 교점을 C_1이라 하자. 그러면 삼각형 $A_1B_1C_1$은 삼각형 $A_0B_0C_0$와 닮은 삼각형이 된다. 같은 방법으로 삼각형 $A_1B_1C_1$을 이용하여 닮은 삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 닮은 삼각형 $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, $A_5B_5C_5$, $\cdots$를 계속 그릴 수 있다. 이때 삼각형 $A_kB_kC_k$의 넓이를 S_k, 둘레의 길이를 L_k라고 하자.



(1) 각 BOC의 크기가 $60°$이고, 삼각형 $A_0B_0C_0$가 한 변의 길이가 a인 정삼각형일 때, S_4과 L_4을 구하고, 그 과정을 논술하시오. (12점)

(2) 각 BOC의 크기가 $90°$이고, 삼각형 $A_0B_0C_0$가 $\overline{B_0C_0}=4b$, $\overline{A_0A_1}=3b$인 이등변삼각형일 때, $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$의 값을 구하고, 그 과정을 논술하시오. (15점)

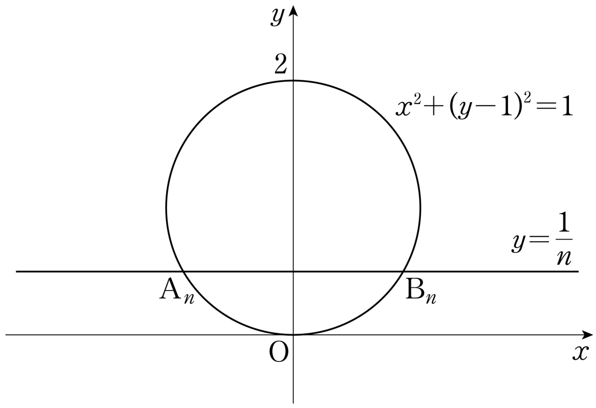
(3) 각 BOC의 크기가 2θ이고, 삼각형 $A_0B_0C_0$가 $\overline{B_0C_0}=4$, $\overline{A_0A_1}=3$인 이등변삼각형일 때, $\sum_{k=0}^{\infty} L_k$를 θ의 식으로 나타내고, 그 근거를 서술하시오. (18점)

(4) (3)에서 구한 $\sum_{k=0}^{\infty} L_k$를 이용하여 함수 $f(\theta)=\dfrac{6\sin\theta}{2+\sqrt{13}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} L_k\right)$를 정의하자. $30^\circ \le \theta \le 60^\circ$일 때, $f(\theta)$의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그 근거를 서술하시오. (15점)

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=\dfrac{1}{n}$과 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 두 교점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} n(l_n)^2$의 값은?

(2017. 3월 모의)



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

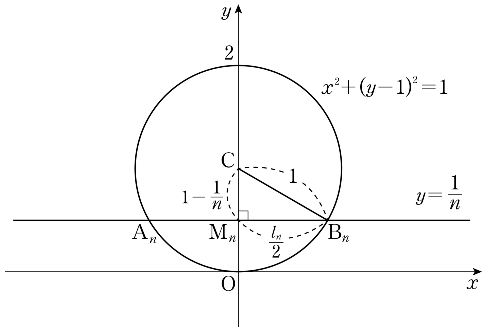
문제2. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고, $0\le x<2$일 때 $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 구간 $[0,2)$에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은? (2017. 3월 모의)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 2

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④

직선 $y=\dfrac{1}{n}$과 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 두 교점을 각각 A_n, B_n이라 하고 주어진 원의 중심을 $\mathrm{C}(0,1)$, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점을 M_n이라 하면 삼각형 $\mathrm{CM}_n\mathrm{B}_n$은 직각삼각형이다.



$\overline{\mathrm{CB}_n}=1$, $\overline{\mathrm{CM}_n}=1-\dfrac{1}{n}$이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\left(\frac{l_n}{2}\right)^2=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n}^2=\overline{\mathrm{CB}_n}^2-\overline{\mathrm{CM}_n}^2=1^2-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}$$

$$(l_n)^2=\frac{8}{n}-\frac{4}{n^2},\ n(l_n)^2=8-\frac{4}{n}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} n(l_n)^2=8$이다.

풀어보기(문제2) 정답 ①

$a=-1$일 때 구간 $[0,2)$에서 $f(x)=x+1$이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다. 이것은 모순이므로 $a\neq-1$이다.

구간 $[0,2)$에서 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구하면

$$f(x)=\frac{(x-a)^2}{x+1}\text{에서 } f'(x)=\frac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=-a-2$이다.

(i) $a<-a-2$일 때

$a<-a-2$에서 $a<-1$이고, $x=-a-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=-a-2$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0,2)$에서 극솟값을 갖는다. 즉 $0<-a-2<2$, $-4<a<-2$이다. a는 정수이므로 $a=-3$이다.

(ii) $a>-a-2$일 때

$a>-a-2$에서 $a>-1$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구

간 $(0, 2)$에서 극솟값을 갖는다.

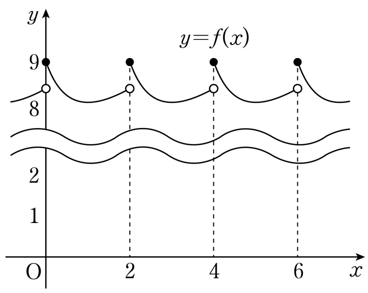
즉 $0<a<2$이다. a는 정수이므로 $a=1$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해서 조건을 만족하는 정수 a의 값은 -3 또는 1이다.

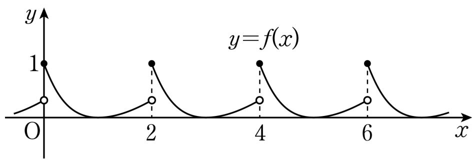
따라서 모든 정수 a의 값의 곱은 $(-3)\times 1=-3$이다.

[보충 설명]

(ⅰ) $a=-3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ⅱ) $a=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



[논제 1] 대학발표 예시답안

(1)

선분 B_0C_0와 B_1C_1가 서로 평행이고, 선분 OA와 수직이므로 삼각형 OB_0C_0와 OB_1C_1도 서로 닮은 이등변삼각형이다. 따라서 $\overline{B_0C_0} : \overline{B_1C_1} = \overline{OA_1} : \overline{OA_2}$이다.

$\angle BOC=60^\circ$이므로 삼각형 OB_0C_0와 OB_1C_1 모두 정삼각형이다. 따라서 삼각형 $A_1B_1C_1$과 OB_1C_1은 합동인 정삼각형이다. 따라서 $\overline{OA_1}=2\overline{OA_2}$이고 $\overline{B_1C_1}=\dfrac{1}{2}\overline{B_0C_0}$이다.

같은 방법을 이용하면 $\overline{B_{k+1}C_{k+1}}=\dfrac{1}{2}\overline{B_kC_k}$이다. $\overline{B_0C_0}=a$이므로 $\overline{B_kC_k}=a\left(\dfrac{1}{2}\right)^k=\dfrac{a}{2^k}$이다.

한 변의 길이가 x인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}$이고, 둘레의 길이는 $3x$이므로,

$$S_4=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}a^2}{1024},\ L_4=3\times\frac{a}{2^4}=\frac{3a}{16}$$

(2)

삼각형 $A_0B_0C_0$와 $A_1B_1C_1$가 서로 닮은 삼각형이므로 $\overline{B_0C_0}:\overline{B_1C_1}=\overline{A_0A_1}:\overline{A_1A_2}$이다.

$\angle BOA=45^\circ$ 이므로 $\overline{B_0A_1}=\overline{OA_1}$, $\overline{B_1A_2}=\overline{OA_2}$이다.

따라서 $\overline{B_1A_2}=x$라고 하면 $\overline{A_1A_2}=\dfrac{3x}{2}$이므로

$$\overline{OA_2}=x,\ \overline{OA_1}=\overline{OA_2}+\overline{A_1A_2}=x+\frac{3x}{2}=\frac{5x}{2}$$

(1)에서와 마찬가지로 삼각형 OB_0C_0와 OB_1C_1가 서로 닮은 이등변삼각형이다.

$\overline{B_0C_0}:\overline{B_1C_1}=\overline{OA_1}:\overline{OA_2}=\dfrac{5x}{2}:x=5:2$이므로 $\overline{B_1C_1}=\dfrac{2}{5}\overline{B_0C_0}$이다.

같은 방법을 이용하면 $\overline{B_{k+1}C_{k+1}}=\dfrac{2}{5}\overline{B_kC_k}$이다.

$\overline{B_0C_0}=4b$이므로 $\overline{B_kC_k}=4b\left(\dfrac{2}{5}\right)^k$이다. 따라서 $S_k=\dfrac{1}{2}\times4b\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\times3b\left(\dfrac{2}{5}\right)^k=6b^2\left(\dfrac{4}{25}\right)^k$이므로

$$\sum_{k=0}^{\infty}S_k=\frac{6b^2}{1-\frac{4}{25}}=\frac{50b^2}{7}$$

(3)

$\overline{B_0A_1}=2$이고 $\angle BOA=\theta$이므로 $\overline{OA_1}=\dfrac{2}{\tan\theta}$이다. $\overline{B_1A_2}=x$라고 하면 $\overline{OA_2}=\dfrac{x}{\tan\theta}$이고

$\overline{A_1A_2}=\dfrac{3x}{2}$이다. 따라서 $\dfrac{2}{\tan\theta}=\dfrac{x}{\tan\theta}+\dfrac{3x}{2}$이므로 $x=\dfrac{4}{2+3\tan\theta}$이다.

(1), (2)에서와 마찬가지로 삼각형 OB_0C_0와 OB_1C_1가 서로 닮은 이등변 삼각형이다.

$$\overline{B_0C_0}:\overline{B_1C_1}=\overline{B_0A_1}:\overline{B_1A_2}=2:x=2:\frac{4}{2+3\tan\theta}$$

이므로 $\overline{B_1C_1}=\dfrac{2}{2+3\tan\theta}\overline{B_0C_0}$이고 같은 방법을 이용하면 $\overline{B_{k+1}C_{k+1}}=\dfrac{2}{2+3\tan\theta}\overline{B_kC_k}$이고 $\overline{B_0C_0}=4$이므로

$$\overline{B_kC_k}=4\left(\frac{2}{2+3\tan\theta}\right)^k$$

이다. 따라서 $L_k=\left(1+\dfrac{\sqrt{13}}{4}+\dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)\overline{B_kC_k}=(4+2\sqrt{13})\left(\dfrac{2}{2+3\tan\theta}\right)^k$이고

$$\sum_{k=0}^{\infty}L_k=\frac{4+2\sqrt{13}}{1-\frac{2}{2+3\tan\theta}}=\frac{(4+2\sqrt{13})(2+3\tan\theta)}{3\tan\theta}$$

(4)

$$f(\theta)=\frac{6\sin\theta}{2+\sqrt{13}}\ \frac{(4+2\sqrt{13})(2+3\tan\theta)}{3\tan\theta}=(8+12\tan\theta)\cos\theta$$
$$=8\cos\theta+12\sin\theta$$
$$f'(\theta)=-8\sin\theta+12\cos\theta=4\cos\theta(3-2\tan\theta)$$

$30^\circ \le \theta \le 60^\circ$ 일 때, $\frac{1}{\sqrt{3}} \le \tan\theta \le \sqrt{3}$ 이므로, 이 구간에 $\tan\theta=\frac{3}{2}$ 인 θ가 존재한다.

$\frac{1}{\sqrt{3}} \le \tan\theta < \frac{3}{2}$ 일 때 $f'(\theta)>0$ 이고, $\frac{3}{2} < \tan\theta \le \sqrt{3}$ 일 때 $f'(\theta)<0$ 이므로 $\tan\theta=\frac{3}{2}$ 인 θ에서 $f(\theta)$는 최대가 된다.

$\tan\theta=\frac{3}{2}$ 이고 $30^\circ \le \theta \le 60^\circ$ 이므로 $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$ 이다.

따라서 $f(\theta)$는 $\tan\theta=\frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{52}{\sqrt{13}}=4\sqrt{13}$ 을 가진다.

$f(\theta)$는 $\theta=30^\circ$ 일 때 $4\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$이고, $\theta=60^\circ$ 일 때 $4\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$인데,

$\sqrt{3}+\frac{3}{2}<\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$ 이므로, $f(\theta)$는 $\theta=30^\circ$ 일 때 최솟값 $4\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)=4\sqrt{3}+6$ 을 가진다.

08 경희대학교(의학계) 모의[8)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
도형의 방정식, 다항함수의 미분법, 다항함수의 적분법, 미분법, 적분법	국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(1과목) 중 3개 영역 등급합 4이내, 한국사 5등급 이내	수학 필수(1문항, 4문제),과학(물,화,생) 중 택1	120분

[문항 1] 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오.

[가] 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

[나] 구간 $[a, b]$의 임의의 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

[다] 일반적으로 적분과 미분 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다. 함수 $f(t)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\ \ (\text{단, } a<x<b)$$

[라] 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

(1) 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.

(2) 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

[마] 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음을 고려하여 그린다.

(1) 함수의 정의역과 치역

(2) 좌표축과의 교점

(3) 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

(4) 점근선

[바] 중심이 $\mathrm{C}(a, b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

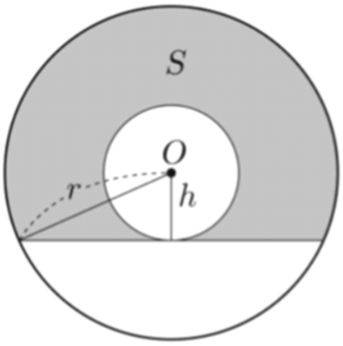
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

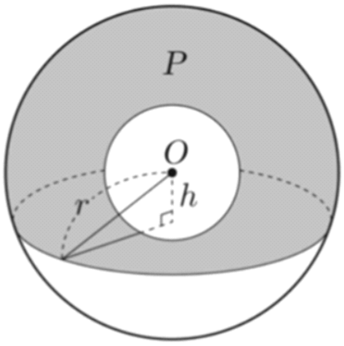
$$x^2+y^2=r^2$$

이다.

8) 경희대학교 홈페이지



[그림 1]



[그림 2]

[논제 Ⅰ-1] 자연식 가습기는 지표면과 수직으로 달려 있고 아래 쪽 일부가 물에 잠겨 있는 원반을 가지고 있고, 이 원반이 회전할 때, 바람을 불어 주어 원반에 묻어 있는 물이 증발하는 원리로 가습한다. 자연식 가습기에 반지름의 길이가 r인 원반이 회전하고 있을 때, 물에 적시어지는 원반의 부분 중 공기에 노출된 부분을 S라고 하자. [그림 1]에서 색칠된 부분이 S이다. 원반의 중심 O에서 물의 수면까지 거리를 h라고 할 때, S의 넓이 A를 정적분을 포함하는 h에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $0 \le h \le r$) (10점)

[논제 Ⅰ-2] [논제 Ⅰ-1]에서 구한 넓이 A의 식을 이용하여 S의 넓이가 최대가 되는 h의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (25점)

[논제 Ⅰ-3] [그림 1]의 S를 원반의 중심을 지나고 지표면과 수직인 직선에 대하여 회전시키면 [그림 2]에서 색칠된 것처럼 입체도형 P가 얻어진다. 다시 말하면 입체도형 P는 중심이 O이고 반지름의 길이가 r인 구에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 h인 구와 이 작은 구에 접하는 평면의 바깥쪽에 있는 부분을 제외하여 얻어진다. (단, $0 \le h \le r$) 이 때, 입체도형 P의 부피 V를 h에 대한 다항식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

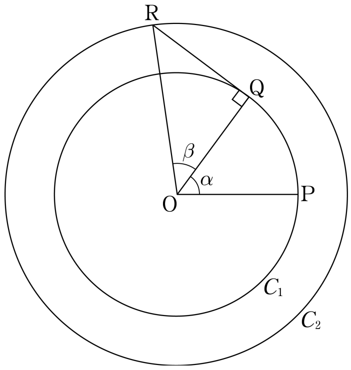
[논제 Ⅰ-4] [논제 Ⅰ-3]에서 구한 식을 이용하여 입체도형 P의 부피 V가 최대가 되는 h의 값과 최대 부피 V를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

• 풀어보기

문제1. 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, $\sqrt{2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 원 C_1 위의 두 점 P, Q와 원 C_2 위의 점 R에 대하여 $\angle \mathrm{QOP}=\alpha$, $\angle \mathrm{ROQ}=\beta$라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}} \perp \overline{\mathrm{QR}}$이고 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$일 때, $\cos(\alpha+\beta)$의 값은? (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$)

(2017. 3월 모평)

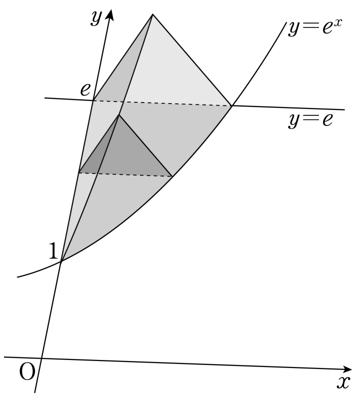
① $-\frac{\sqrt{6}}{10}$　② $-\frac{\sqrt{5}}{10}$　③ $-\frac{1}{5}$　④ $-\frac{\sqrt{3}}{10}$　⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{10}$



문제2. 곡선 $y=e^x$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? (2017. 3월 모평)

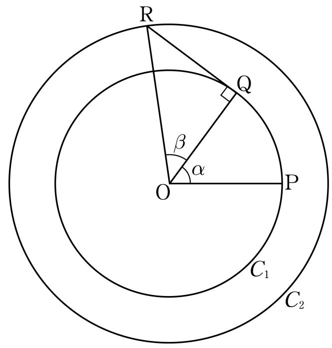
① $\frac{\sqrt{3}(e+1)}{4}$　② $\frac{\sqrt{3}(e-1)}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}(e-1)}{4}$

④ $\frac{\sqrt{3}(e-2)}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}(e-2)}{4}$



• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ⑤



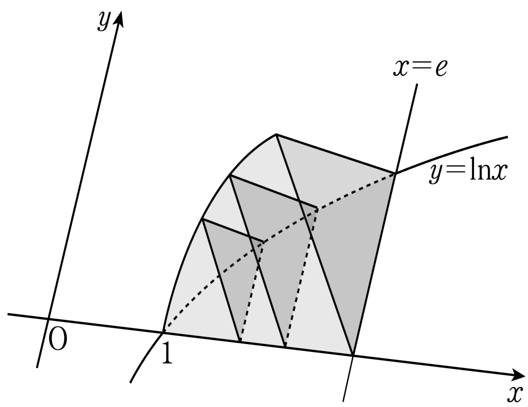
$\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 이고 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ 이다.

삼각형 ROQ 에 대하여 $\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1$, $\angle\mathrm{OQR}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\beta=\frac{\pi}{4}$ 이다.

그러므로 $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 ⑤



$y=e^x$ 의 역함수는 $y=\ln x$ 이므로 점 $(0,1)$ 은 점 $(1,0)$ 으로, 점 $(0,e)$ 는 점 $(e,0)$ 으로 이동한다. 그런데 $x=t\,(1\le t\le e)$ 일 때 정삼각형의 한 변의 길이는 $\ln t$ 이므로 정삼각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면 $S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\ln t)^2$ 이다.

따라서 구하는 부피는

$$\int_1^e S(t)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e (\ln t)^2\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[t(\ln t)^2\right]_1^e - \int_1^e t\left(2\times\frac{1}{t}\times\ln t\right)dt\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[t(\ln t)^2\right]_1^e - 2\int_1^e \ln t\,dt\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[t(\ln t)^2\right]_1^e - 2\left[t\ln t - t\right]_1^e\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

[다른 풀이]

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$ (단, C는 적분상수)이므로

$$\int_1^e S(t)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e (\ln t)^2\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[\ln t\,(t\ln t - t)\right]_1^e - \int_1^e (\ln t - 1)\,dt\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[\ln t\,(t\ln t - t)\right]_1^e - \left[t\ln t - 2t\right]_1^e\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

[다른 풀이]

함수 $f(x)=e^x$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 하고, 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V = \int_1^e \frac{\sqrt{3}}{4}\{f^{-1}(y)\}^2\,dy$$

이다. $y=f(x)$에서 $f^{-1}(y)=x$이고 $y=f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx}=f'(x)=e^x$이므로

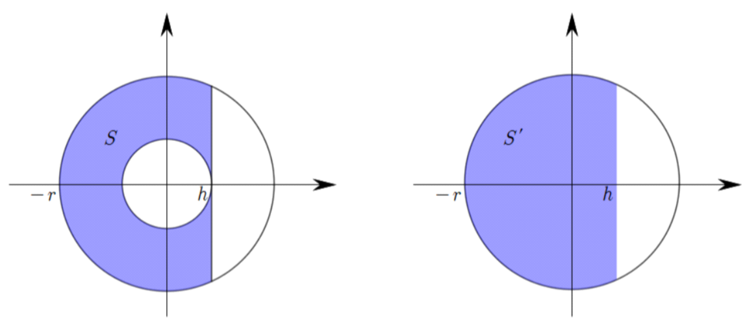
$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2 f'(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[x^2e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[x^2e^x\right]_0^1 - 2\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right)\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[x^2e^x\right]_0^1 - 2\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

[문항 1] 대학발표 예시답안

[논제 Ⅰ-1] 원의 중심 O를 좌표평면의 원점으로 하고 아래 그림에서처럼 물의 수면이 y축과 평행하다고 하자.



도형 S는 반지름의 길이가 r인 원과 두 직선 $x=-r$, $x=h$로 둘러싸인 도형 S'에서 반지름의 길이가 h인 원을 제외하여 얻어진다. <제시문 [바]>를 활용하면 반지름의 길이가 r인 원의 위 곡선과 아래 곡선의 식은 각각 $y=\sqrt{r^2-x^2}$과 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$이므로, <제시문 [가]>를 활용하면 도형 S'의 넓이는 $\int_{-r}^{h} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$가 된다. 도형 S의 넓이 A는 S'의 넓이에서 반지름의 길이가 h인 원의 넓이 πh^2을 뺀 것이므로,

$$A=\int_{-r}^{h} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx-\pi h^2=-\pi h^2+2\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

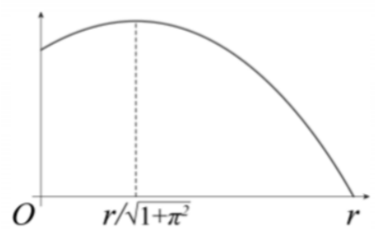
[논제 Ⅰ-2] 도형 S의 넓이 A를 h에 대하여 미분하면

$$\frac{dA}{dh}=\frac{d}{dh}\left(-\pi h^2+2\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\right)=-2\pi h+2\frac{d}{dh}\int_{-r}^{h}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

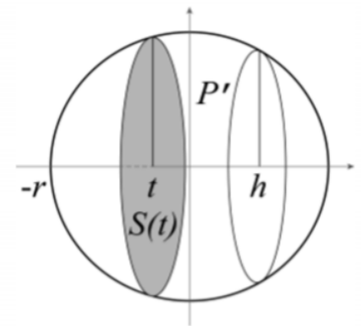
이고, <제시문 [다]>를 활용하면

$$\frac{dA}{dh}=-2\pi h+2\sqrt{r^2-h^2}$$

이다. 극값을 구하기 위한 식 $\frac{dA}{dh}=0$의 해는 $h=\pm\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$이고, $h\geq 0$이므로 $h=\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$이다. 만약 $0\leq h<\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$이면 $\frac{dA}{dh}=-2\pi h+2\sqrt{r^2-h^2}>0$이고, $\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}<h\leq r$이면 $\frac{dA}{dh}<0$이 되므로, <제시문 [라]>를 활용하면 A는 $h=\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$에서 극댓값을 가진다. h에 대한 A는 닫힌 구간 $[0, r]$에서 극값을 유일하게 극댓값 하나만 가지므로 <제시문 [마]>를 활용하면 A의 그래프는 아래 그림과 같고 A는 $h=\frac{r}{\sqrt{1+\pi^2}}$에서 최댓값을 가진다.



[논제 Ⅰ-3] 입체도형 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 구가 평면 $x=h$에 의하여 잘려진 두 부분 중 큰 부분인 입체도형 P'에서 반지름의 길이가 h인 구를 제외하여 얻어진다.

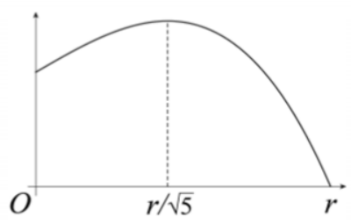


위 그림에서처럼 입체도형 P'가 평면 $x=t$에 의하여 잘려진 단면 $S(t)$는 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2-t^2}$인 원이므로 그 넓이는 $\pi(r^2-t^2)$이다. <제시문 [가]>를 활용하면 P'의 부피는

$$\int_{-r}^{h}\pi\left(r^2-t^2\right)dt=\left[\pi\left(r^2t-\frac{t^3}{3}\right)\right]_{t=-r}^{t=h}=\pi\left(-\frac{h^3}{3}+r^2h+\frac{2r^3}{3}\right)$$

이다. P의 부피는 P'의 부피에서 반지름의 길이가 h인 구의 부피를 뺀 것이므로 $V=\pi\left(-\frac{5h^3}{3}+r^2h+\frac{2r^3}{3}\right)$이다.

[논제 Ⅰ-4] V를 h에 대하여 미분하면 $\frac{dV}{dh}=\pi\left(-5h^2+r^2\right)$이고, 식 $\frac{dV}{dh}=0$의 해는 $h=\pm\frac{r}{\sqrt{5}}$이다. $h\geq 0$이므로 $h=\frac{r}{\sqrt{5}}$이 해가 된다. 만약 $0\leq h<\frac{r}{\sqrt{5}}$이면 $\frac{dV}{dh}>0$이고, $\frac{r}{\sqrt{5}}<h\leq r$이면 $\frac{dV}{dh}<0$이므로 <제시문 [라]>를 활용하면 V는 $h=\frac{r}{\sqrt{5}}$에서 극댓값을 가진다. [논제 Ⅰ-2]의 답안에서처럼 닫힌 구간 $[0,r]$에서 V가 극댓값만 유일하게 가지므로, <제시문 [마]>를 활용하여 아래와 같이 그래프를 살펴보면 V가 $h=\frac{r}{\sqrt{5}}$에서 최댓값 $V=\frac{10+2\sqrt{5}}{15}\pi r^3$를 가진다.



09 경희대학교(자연계) 온라인 모의[9)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수열, 삼각함수, 삼각함수의 극한	국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(1과목) 중 2개영역 등급합 5이내, 한국사 5등급 이내(의예과제외)	수학 필수(1문항, 4문제), 과학(물,화,생) 중 택1	120분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (60점)

[가] 첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 등차수열이라 하고, 그 일정한 수를 공차라고 한다. 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항은 $a_n = a+(n-1)d$이다. 그리고 이 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이다. 특히, 임의의 자연수 n에 대하여 1부터 자연수 n까지의 합은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열의 제n항까지의 합으로 생각할 수 있으므로 $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$이다.

[나] 임의의 두 각 x와 y의 삼각함수를 이용하여 각 $x+y$, $x-y$의 삼각함수를 나타내는 방법을 삼각함수의 덧셈정리라 하며 사인함수의 덧셈정리는

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,\ \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

이다. 마찬가지로 코사인함수의 덧셈정리는

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,\ \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

이며, 사인과 코사인함수의 덧셈정리를 이용하면 탄젠트함수의 덧셈정리

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y},\ \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$

를 얻을 수 있다.

9) 경희대학교 홈페이지

[다] 각 θ에 대한 두 삼각함수 $f(\theta)=\sin\theta$와 $g(\theta)=\cos\theta$는 각각 모든 실수 θ에서 연속함수이므로 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{\theta\to a}\sin\theta=\sin a,\quad \lim_{\theta\to a}\cos\theta=\cos a$$

이다. 또한 함수 $h(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$는 0이 아닌 실수 θ에서 연속이므로 0이 아닌 실수 a에 대하여

$$\lim_{\theta\to a}\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\sin a}{a}$$

이다.

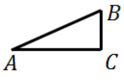
한편 $a=0$인 경우에도 함수의 극한과 대소 관계에 대한 성질을 이용하여 그 극한이 존재하며

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

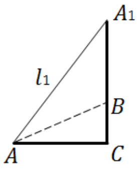
임을 알 수 있다. 비슷한 방법으로 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$ 역시 확인할 수 있다.

[논제 I] 제시문 [가], [나], [다]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

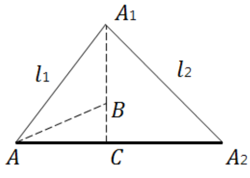
(그림 1)에서 삼각형 ABC의 둘레의 길이와 같은 길이의 실의 한쪽 끝을 점 A에 고정시키고 시계 반대방향으로 팽팽하게 한 바퀴 감았다. (그림 2)에서와 같이 삼각형 ABC와 같은 평면 위에서 실을 팽팽한 상태로 유지하면서 실을 풀어 실의 다른 한쪽 끝점이 선분 BC의 연장선위에 처음 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_1, 선분 AA_1의 길이를 l_1이라 한다. 같은 방법으로 실을 계속 풀어 (그림 3)에서와 같이 실의 끝점이 선분 AC의 연장선위에 처음 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_2, 선분 A_1A_2의 길이를 l_2이라 한다. 같은 방법으로 실을 계속 풀어 실의 끝점이 선분 AB의 연장선위에 다시 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_3, 선분 A_2A_3의 길이를 l_3이라 하고 이때 $L_3=l_1+l_2+l_3$라 하자 (그림 4).



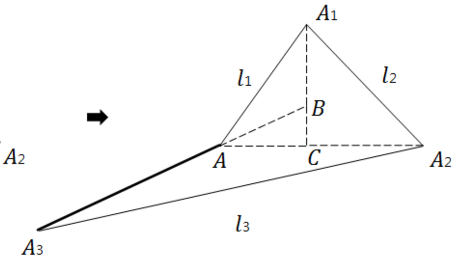
(그림 1)



(그림 2)



(그림 3)

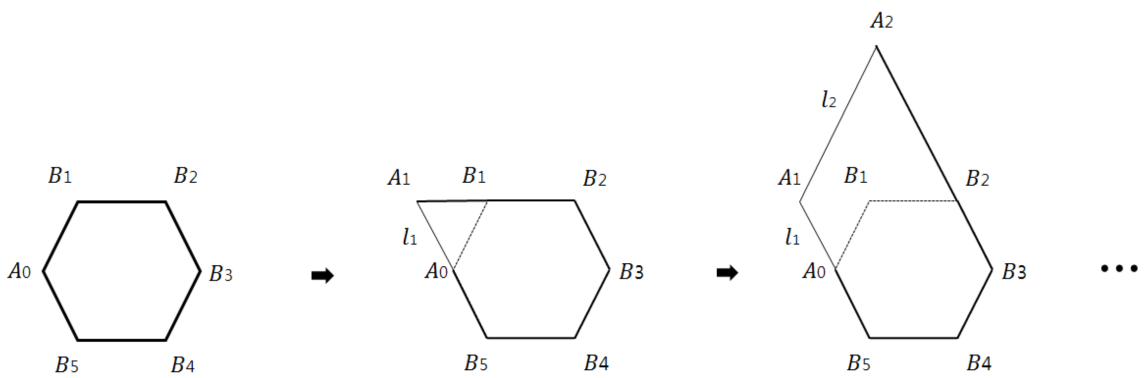


(그림 4)

(1) 각 ACB의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 각 BAC의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이며 선분 AB의 길이가 $2(\overline{\mathrm{AB}}=2)$인 삼각형 ABC 에 대하여 L_3을 구하고 그 과정을 논술하시오. (15점)

(2) 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 $r(>0)$인 원에 내접하는 정삼각형일 때, L_3를 구하고 그 과정을 논술하시오. (15점)

(3) 반지름의 길이가 $r(>0)$인 원에 내접하는 정 n각형 $\mathrm{A_0B_1B_2\cdots B_{n-1}}$에 대하여 정$n$각형의 둘레의 길이와 같은 길이의 실의 한쪽 끝을 점 $\mathrm{A_0}$에 고정하고 시계 반대방향으로 팽팽하게 한 바퀴 감았다. 실을 팽팽한 상태로 유지하면서 실을 풀어 실의 다른 한쪽 끝점이 선분 $\mathrm{B_1B_2}$의 연장선위에 처음 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 $\mathrm{A_1}$, 선분 $\mathrm{A_0A_1}$의 길이를 l_1이라 한다. 같은 방법으로 실을 계속 풀어 실의 다른 한쪽 끝점이 선분 $\mathrm{B_2B_3}$의 연장선위에 처음 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{A_1A_2}$의 길이를 l_2이라 한다. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 각각의 $\mathrm{A_2}, \cdots, \mathrm{A_{n-1}}$과 $l_2, \cdots, l_{n-1}$을 정의 할 수 있으며, 실의 끝점이 선분 $\mathrm{A_0B_1}$의 연장선위에 다시 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_n, 선분 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$의 길이를 l_n이라 하자. $a=\sin\frac{\pi}{n}$라 할 때 자연수 $n(\geq 3)$에 대하여 $L_n=\sum_{k=1}^{n} l_k$를 a에 관한 식으로 표현하고 그 과정을 논술하시오. (20점)



(정 6각형의 예)

(4) 반지름의 길이가 $r(>0)$인 원이 있다. 원의 둘레의 길이와 같은 길이의 실의 한쪽 끝을 원 위의 한 점에 고정하고 실을 시계 반대방향으로 한 바퀴 감았다. 원과 같은 평면 위에서 팽팽한 상태로 유지하면서 실을 풀어 실 전체가 직선이 될 때까지 실의 다른 끝점이 움직인 거리를 L이라 할 때, L을 구하고 그 과정을 논술하시오. (10점)

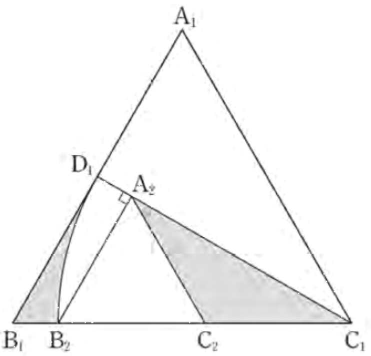
• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

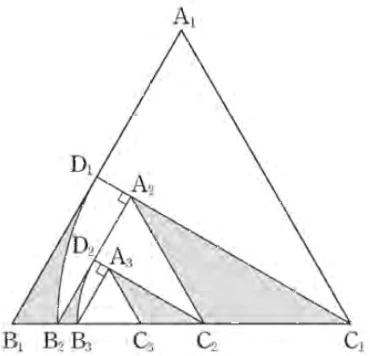
그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (2018. 대수능)

R_1



R_2

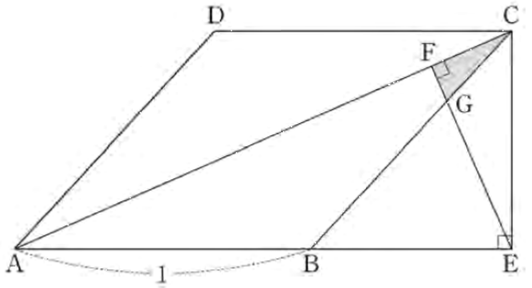


⋮ ⋮

① $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$　② $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$　③ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$

④ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$　⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

문제2. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) (2018. 대수능)



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ②

$\angle B_1C_1D_1 = 30^\circ$, $\angle C_1D_1B_1 = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 $B_1C_1D_1$ 에서

$$\overline{C_1D_1} = \overline{B_1C_1}\cos 30^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편, 두 선분 B_1B_2와 B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\begin{aligned}\triangle B_1C_1D_1 - \text{부채꼴}\, B_2C_1D_1 &= \frac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times\overline{D_1B_1} - \overline{C_1D_1}^2 \times \pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \pi \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-\pi}{16} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

또, 삼각형 $C_1A_2C_2$의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{C_2C_1}\times\overline{C_1A_2}\times\sin 30^\circ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\overline{B_2C_1}\right)\times\left(\overline{B_2C_1}\cos 30^\circ\right)\times\sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{64} \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

따라서 R_1의 넓이 S_1은 ㉠과 ㉡에 의해

$$S_1 = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{64} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$$

한편, 직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서 $\angle B_2C_1A_2 = 30^\circ$ 이므로 $\angle A_2B_2C_1 = 60^\circ$ 이다.

또, $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_1}\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\overline{B_2C_1} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다.

그러므로 삼각형 $A_2B_2C_2$에서 $\angle A_2B_2C_2 = 60^\circ$ 이고 $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$ 이다.

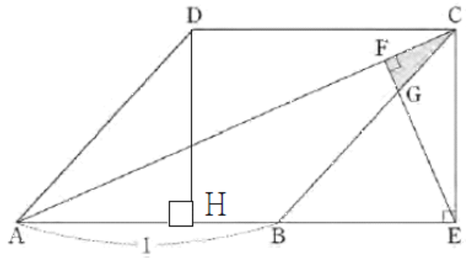
즉, 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 인 정삼각형이다.

그러므로 길이의 비가 $1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{3}{16}$ 이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{1-\frac{3}{16}} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

풀어보기(문제2) 정답 ③

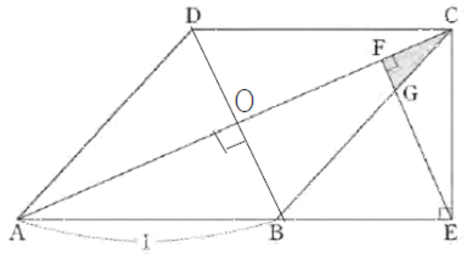
점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 AHD에서 $\overline{AD}=1$, $\angle DAH=\angle DAB=\theta$이므로 $\overline{DH}=\sin\theta$이다.

이때, $\overline{CE}=\overline{DH}=\sin\theta$이다.

한편, 마름로 ABCD에서 두 선분 AC와 BD의 교점을 O라 하자.



$\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로 $\overline{BO}\,/\!/\,\overline{EF}$이다. 이때, $\angle OBA=\angle FEA$이므로 $\angle CEF=\angle BAO=\dfrac{\theta}{2}$이다.

직각삼각형 CEF에서

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CE}},\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{CF}}{\sin\theta},\ \overline{CF}=\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\angle BCA=\angle BAC=\dfrac{\theta}{2}$이다.

직각삼각형 CFG에서 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{CF}}$이므로

$$\overline{FG}=\overline{CF}\times\tan\frac{\theta}{2}=\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

직각삼각형 CFG의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{FG}=\frac{1}{2}\times\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}{2\theta^5}=\frac{1}{16}\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{16}\times1^2\times1^2\times1=\frac{1}{16}$$

[논제 1] 대학발표 예시답안

(1) 삼각형 AA_1B 은 각 ABA_1 이 $\frac{2\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB}=\overline{A_1B}=2$ 인 이등변삼각형이다.

선분 AA_1 의 중점을 P_1 이라 하면 삼각형 ABP_1 은 각 ABP_1 이 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB}=2$ 인 직각삼각형이다. 따라서 $\overline{AP_1}=\overline{AB}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 이고, $l_1=2\overline{AP_1}=2\sqrt{3}$ 이다.

삼각형 A_1A_2C 는 각 A_1CA_2 가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{A_1C}=\overline{A_2C}$ 인 직각이등변삼각형이다.

$\overline{A_1C}=\overline{A_1B}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{BC}=2+1=3$ 이므로 $l_2=\sqrt{\overline{A_1C}^2+\overline{A_2C}^2}=3\sqrt{2}$ 이다.

삼각형 AA_2A_3 는 각 A_2AA_3 가 $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ 이고 $\overline{AA_2}=\overline{AA_3}$ 인 이등변삼각형이다.

선분 A_2A_3 의 중점을 P_3 이라 하면, 삼각형 AA_3P_3 은 각 A_3AP_3 가 $\frac{5\pi}{12}$ 이고

$\overline{AA_3}=3+\sqrt{3}$ (삼각형 ABC 의 둘레의 길이)인 직각삼각형이므로 $\overline{A_3P_3}=\overline{AA_3}\sin\frac{5\pi}{12}$ 이다.

한편 $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$ 이므로 사인함수의 덧셈정리에 의해

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

이다. 따라서 $l_3=2\overline{A_3P_3}=3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ 이고, $L_3=l_1+l_2+l_3=6\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ 이다.

(2) 삼각형 ABC 의 중점을 O 라 하면 삼각형 AOB 는 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$ 이고 각 AOB 가 $\frac{2\pi}{3}$ 인 이등변삼각형이다. 선분 AB 의 중점을 P_0 라 하면 삼각형 AOP_0 는 각 AOP_0 가 $\frac{\pi}{3}$, 각 OP_0A 가 $\frac{\pi}{2}$, 그리고 $\overline{OA}=r$ 인 직각삼각형이다. 따라서 $\overline{AB}=2\overline{OA}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}r$ 이다.

삼각형 AA_1B 는 각 ABA_1 이 $\frac{2\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB}=\overline{A_1B}=\sqrt{3}r$ 인 이등변삼각형이므로, 삼각형 AOB 와 닮은 삼각형이다. 따라서 $l_1=\overline{AA_1}=2\overline{AB}\sin\frac{\pi}{3}=3r$ 이다.

삼각형 A_1A_2C 는 각 A_1CA_2 가 $\frac{2\pi}{3}$ 이고 $\overline{A_1C}=\overline{A_2C}=2\sqrt{3}r$ 인 이등변삼각형이므로, 삼각형 AOB 와 닮은 삼각형이다. 따라서 $l_2=\overline{A_1A_2}=2\overline{A_1C}\sin\frac{\pi}{3}=6r$ 이다.

삼각형 AA_2A_3 는 각 A_2AA_3 가 $\frac{2\pi}{3}$ 이고 $\overline{AA_2}=\overline{AA_3}=3\sqrt{3}r$ 인 이등변삼각형이므로,

삼각형 AOB와 닮은 삼각형이다. 따라서 $l_3=\overline{A_2A_3}=2\overline{AA_3}\sin\frac{\pi}{3}=9r$ 이고

$L_3 = l_1 + l_2 + l_3 = 3r + 6r + 9r = 18r$ 이다.

(3) 정n각형 $A_0B_1B_2 \cdots B_{n-1}$의 중심을 O라 하면 삼각형 A_0B_1O는 $\overline{OA_0} = \overline{OB_1} = r$이고 각 A_0OB_1이 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변삼각형이다. 선분 A_0B_1의 중점을 P_0라 하면 삼각형 A_0OP_0는 각 A_0OP_0가 $\frac{\pi}{n}$, 각 OP_0A_0가 $\frac{\pi}{2}$, 그리고 $\overline{OA_0} = r$인 직각삼각형이다. 따라서

$$\overline{A_0B_1} = 2\overline{OA_0}\sin\frac{\pi}{n} = 2r\sin\frac{\pi}{n}$$

이고 마찬가지로

$$\overline{B_1B_2} = \cdots = \overline{B_{n-2}B_{n-1}} = \overline{B_{n-1}A_0} = 2r\sin\frac{\pi}{n}$$

이다. 여기서 $a = \sin\frac{\pi}{n}$라 하면 $\overline{A_0B_1} = \overline{B_1B_2} = \cdots = \overline{B_{n-2}B_{n-1}} = \overline{B_{n-1}A_0} = 2ra$ 이다.

정n각형의 한 내각의 크기는 $\frac{n-2}{n}\pi$이므로 삼각형 $A_0A_1B_1$은 각 $A_0B_1A_1$이 $\frac{2\pi}{n}$이고 $\overline{A_0B_1} = \overline{A_1B_1} = 2ra$인 이등변삼각형이다. 따라서 삼각형 $A_0A_1B_1$은 삼각형 A_0B_1O와 닮은 삼각형이다. 그러므로 $l_1 = \overline{A_0A_1} = 2\overline{A_1B_1}\sin\frac{\pi}{n} = 2(2ra)a$ 이다.

삼각형 $A_1A_2B_2$은 각 $A_1B_2A_2$가 $\frac{2\pi}{n}$이고 $\overline{A_1B_2} = \overline{A_2B_2} = 2(2ra)$인 이등변삼각형이다. 따라서 삼각형 $A_1A_2B_2$은 삼각형 A_0B_1O와 닮은 삼각형이다. 그러므로 $l_2 = \overline{A_1A_2} = 2\overline{A_2B_2}\sin\frac{\pi}{n} = 2(4ra)a$ 이다. 비슷한 방법으로 $k = 3, \cdots, n$에 대하여, l_k는 두 변의 길이가 $2kra$이고 그 사잇각이 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변삼각형의 나머지 한 변의 길이이므로 $l_k = 2(2kra)a$이다.

따라서 $L_n = \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} 2(2kra)a = 2rn(n+1)a^2$ 이다.

(4) 반지름이 r인 원은 그에 내접하는 정n각형으로 근사할 수 있으므로, 실의 끝점이 움직인 거리 L은 논제 (3)에서 L_n의 n이 무한대로 갈 때의 극한

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 2rn(n+1)a^2 = \lim_{n\to\infty} 2rn(n+1)\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2$$

이다.

또한 제시문 [다]에서 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ 이므로

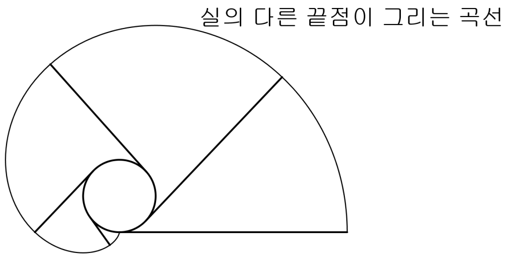
$$\lim_{n\to\infty} 2rn(n+1)\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^2 = 2r\pi^2 \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)\right\}$$

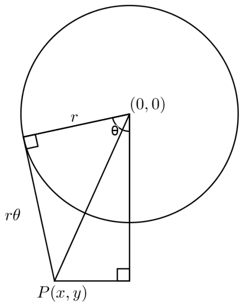
$$= 2r\pi^2 \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$= 2r\pi^2$$

이고, 따라서 $L = 2r\pi^2$ 이다.

[다른 풀이]





원의 중심을 $(0, 0)$이라 하고 실의 다른 끝점의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$$x = -r\sin\theta + r\theta\cos\theta,\ y = -r\cos\theta - r\theta\sin\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

로 나타내어지고

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\theta\sin\theta)^2 + (-r\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \frac{r}{2}\left[\theta^2\right]_0^{2\pi} = \frac{r}{2}\cdot 4\pi^2 = 2r\pi^2$$

10 경희대학교(의학계) 온라인 모의[10)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수열의 합, 급수의 수렴과 발산, 등비급수의 활용	국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(1과목) 중 3개 영역 등급합 4이내, 한국사 5등급 이내	수학 필수(1문항, 4문제), 과학(물,화,생) 중 택1	120분

[문항 1] 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오. (60점)

[가] 일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ 또는 } n\to\infty \text{일 때 } a_n \to \alpha$$

와 같이 나타낸다. 여기서 ∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 무한대라고 읽는다.
어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다.

[나] 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$를 사용하여 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라고 하며, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제$n$항까지의 합 S_n, 즉

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 부분합이라고 한다. 이 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S$일 때, 이 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$는 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 급수의 합이라 하고, 기호로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

와 같이 나타낸다. 한편, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

10) 경희대학교 홈페이지

[다] 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구해 보자. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \cdots\cdots (1)$$

이고, 양변에 r를 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots\cdots (2)$$

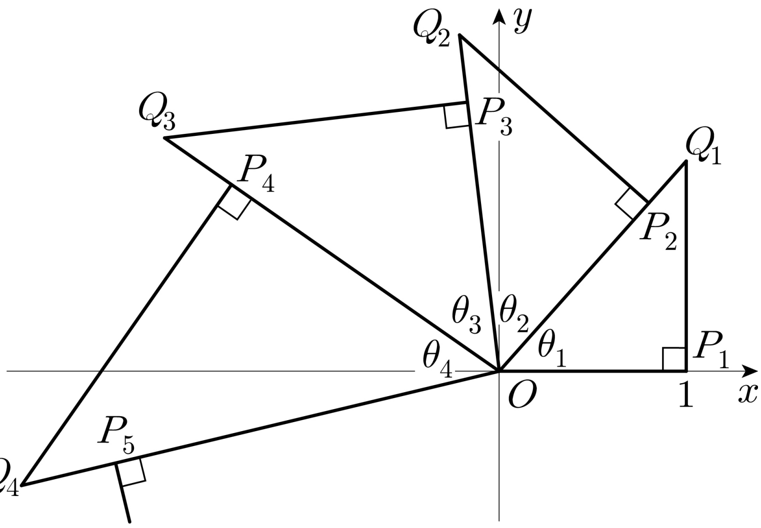
이다. (1)에서 (2)를 변끼리 빼면

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

이므로 S_n은 다음과 같다.

$r \neq 1$일 때, $\quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$일 때, (1)에서 $\quad S_n = \underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}} = na$



[그림 1]

[그림 1]과 같이 선분 OP_1의 길이 $\overline{\mathrm{OP}_1}$는 1이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\angle \mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$은 직각이고, 점 P_{n+1}은 선분 OQ_n에 놓여 있는 좌표평면의 점 P_n과 점 Q_n을 생각하자(단, $n \geq 1$). 여기서, 기호의 편의를 위하여, $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n = \theta_n$, $\dfrac{\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}}{\overline{\mathrm{OQ}_n}} = \alpha_n$, $\overline{\mathrm{OP}_n} = p_n$, $\overline{\mathrm{OQ}_n} = q_n$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = t_n$이라고 표시하자.

[논제 I-1] θ_n 이 모두 상수 θ 로 일정하고 α_n 도 모두 상수 α 로 일정할 때, p_n 을 θ, α, n 에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha$) (5점)

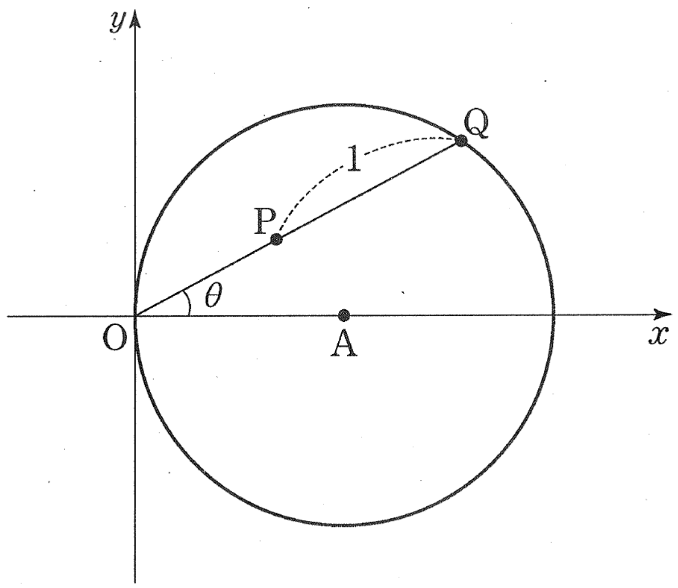
[논제 I-2] 모든 자연수 n 에 대하여 $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$ 이고 $t_n = \frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}$ 일 때, $\sin^2\theta_n$ 을 n 에 대한 식으로 나타내시오. 또한 $\lim_{n\to\infty}\sin^2\theta_n$ 의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

[논제 I-3] 모든 자연수 n 에 대하여 α_n 이 상수 $\sqrt{a}$ 로 일정하고, 어떤 상수 r 에 대하여 t_n 이 $\sqrt{r^n}$ 일 때, ${p_n}^2$ 을 n 에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $r > 0$, $a > 0$) (20점)

[논제 I-4] [논제 I-3]에서 구한 식을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\sin^2\theta_n$ 이 수렴하는 a 와 r 의 범위를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 좌표평면에 점 A(1, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점 Q에 대하여 $\angle AOQ=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$라 할 때, 선분 OQ 위에 $\overline{PQ}=1$인 점 P를 정한다. 점 P의 y좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta=\frac{a+\sqrt{b}}{8}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.) (2017. 6월 모평)



문제2. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1=a_1$$

이고, 2 이상의 자연수 n에 대하여

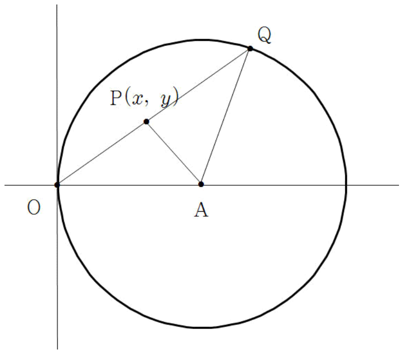
$$b_n=\begin{cases} b_{n-1}+a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌경우}) \\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 3의 배수인경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10}=a_{10}$일 때, $\frac{b_8}{b_{10}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2017. 6월 모평)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 34



$$\overline{\mathrm{OQ}}=2\cos\theta,\ \overline{\mathrm{OP}}=2\cos\theta-1,$$

$$y=(2\cos\theta-1)\sin\theta=\sin2\theta-\sin\theta,\ y'=2\cos\theta-\cos\theta=2(2\cos^2\theta-1)-\cos\theta$$

이다. $\cos\theta=t\ \left(\frac{1}{2}<t<1\right)$라고 두면 $y'=4t^2-t-2=0$에서 $t=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$이다. 그러므로 t의 범위에 따라 $t=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$이다.(∵ $\cos\theta$가 주어진 범위에서 감소하므로 극대, 극소가 바뀐다) 그러므로 $a=1,\ b=33$에서 $a+b=34$이다.

풀어보기(문제2) 정답 13

$b_1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2$

$b_3=b_2-a_3=a_1+a_2-a_3$

$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2-a_3+a_4$

$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5$

$b_6=b_5-a_6=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6$

$\vdots$

$b_{10}=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9+a_{10}=a_{10}$

$a_2-a_3=a_5-a_6=a_8-a_9=-d$이므로

$b_{10}-a_{10}=(a_1-d)+(a_1+2d)+(a_1+5d)=0$

$a_1=-2d$

$a_n=-2d+(n-1)d=d(n-3)$

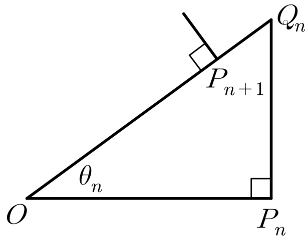
$b_8=(a_1-d)+(a_1+2d)+a_7+a_8=6d$

$b_{10}=(a_1-d)+(a_1+2d)+(a_1+5d)+a_{10}=7d$

$\therefore\ \frac{b_8}{b_{10}}=\frac{6}{7}$

[문항 1] 대학발표 예시답안

[논제 I-1] 아래 그림과 같은 직각삼각형 $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$ 에서 다음의 식을 알 수 있다.



$\overline{\mathrm{OQ}_n}^2 = \overline{\mathrm{OP}_n}^2 + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^2$, 즉, $q_n{}^2 = p_n{}^2 + t_n{}^2$

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}} = \alpha_n \overline{\mathrm{OQ}_n}$, 즉, $p_{n+1} = \alpha_n q_n$

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}^2 = \alpha_n{}^2\ \overline{\mathrm{OP}_n}^2 + \alpha_n{}^2\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^2$, 즉, $p_{n+1}{}^2 = (\alpha_n p_n)^2 + (\alpha_n t_n)^2$

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n = \theta$ 이므로 $q_n = \dfrac{p_n}{\cos\theta}$ 이다. 한편, $\alpha_n = \alpha$ 이므로, $p_{n+1} = \alpha q_n = \left(\dfrac{\alpha}{\cos\theta}\right)p_n$ 이 되어 p_n 이 공비 $\dfrac{\alpha}{\cos\theta}$ 이고 첫째항이 $p_1 = \overline{\mathrm{OP}_1} = 1$ 인 등비수열임을 알 수 있다. 이 등비수열의 일반항은 $p_n = \left(\dfrac{\alpha}{\cos\theta}\right)^{n-1}$ 이다.

[논제 I-2] 모든 자연수 n 에 대하여 $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$ 이고 $t_n = \dfrac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}$ 이므로, 식 $p_{n+1}{}^2 = (\alpha_n p_n)^2 + (\alpha_n t_n)^2$ 으로부터 $p_{n+1}{}^2 = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 p_n{}^2 + \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 - \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2$ 을 얻는다. 이 항등식으로부터 $p_{n+1}{}^2$ 을 구하는 것은 다음과 같은 두 가지 방법이 있다.

[방법 1] 이 식의 양변에 $(n+1)^2$ 을 곱하고 n^2 을 왼쪽으로 이항하면,

$$(n+1)^2 p_{n+1}{}^2 - n^2 = n^2 p_n{}^2 - (n-1)^2$$

을 얻는다. 이 항등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립하므로, 수열 $(n+1)^2 p_{n+1}{}^2 - n^2$ 은 n 에 상관없이 값이 일정함을 알 수 있다. 특히 $n=1$ 일 때의 값과 같아지게 되므로
$(n+1)^2 p_{n+1}{}^2 - n^2 = 1^2 p_1{}^2 - (1-1)^2 = 1$ 이다.

이를 정리하여 $p_{n+1}{}^2 = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$ 을 구할 수 있다.

[방법 2] 위 항등식에 n 의 값을 1부터 순차적으로 대입하면,

$$p_1{}^2 = 1$$

$$p_2{}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{0}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$p_3{}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$p_4{}^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$p_5^{\ 2}=\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$p_{n+1}^{\ 2}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$$

을 유추할 수 있다.

이렇게 구한 $p_{n+1}^{\ 2}$을 이용하여 $q_n^{\ 2}=\frac{1}{\alpha_n^2}p_{n+1}^{\ 2}=\frac{n^2+1}{n^2}$이고, $\sin^2\theta_n=\frac{t_n^{\ 2}}{q_n^{\ 2}}=\frac{2n-1}{n^2+1}$을 구할 수 있다. $n\to\infty$일 때, 그 극한은 $\lim_{n\to\infty}\sin^2\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1}=\frac{0}{1}=0$으로 수렴한다.

[논제 I-3] 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n=\sqrt{a}$이고 $t_n=\sqrt{r^n}$이므로, 식 $p_{n+1}^{\ 2}=(\alpha_n p_n)^2+(\alpha_n t_n)^2$ 으로부터 식 $p_{n+1}^{\ 2}=ap_n^{\ 2}+ar^n$을 얻는다. 이를 이용하여 $p_n^{\ 2}$을 구하는 것은 다음과 같은 두 가지 방법이 있다.

[방법 1] 위 항등식에 n의 값을 1부터 순차적으로 대입하면,

$$p_1^{\ 2}=1$$
$$p_2^{\ 2}=a+ar$$
$$p_3^{\ 2}=a^2+a^2r+ar^2$$
$$p_4^{\ 2}=a^3+a^3r+a^2r^2+ar^3$$
$$p_5^{\ 2}=a^4+a^4r+a^3r^2+a^2r^3+ar^4$$
$$\vdots$$
$$p_n^{\ 2}=a^{n-1}+a^{n-1}r+a^{n-2}r^2+a^{n-3}r^3+\cdots+ar^{n-1}$$

을 유추할 수 있다.

여기서, $a^{n-1}r+a^{n-2}r^2+a^{n-3}r^3+\cdots+ar^{n-1}$는 첫째항이 $a^{n-1}r$, 공비 $\frac{r}{a}$인 등비수열의 $n-1$번째 합이므로

$$p_n^{\ 2}=\begin{cases} a^{n-1}+\dfrac{a^{n-1}r\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}-1\right)}{\frac{r}{a-1}}, & \dfrac{r}{a}\neq 1 \\ a^{n-1}+\underbrace{a^n+a^n+\cdots+a^n}_{n-1\text{개}}, & \dfrac{r}{a}=1 \end{cases}=\begin{cases} a^{n-1}+\dfrac{ar^n-a^nr}{r-a}, & r\neq a \\ a^{n-1}+(n-1)a^n, & r=a \end{cases}$$

[방법 2] 먼저 $r=a$일 때, ${p_{n+1}}^2 = a{p_n}^2 + a^{n+1}$이 되고 a^{n+1}을 양변에 나누면 $\frac{{p_{n+1}}^2}{a^{n+1}} = \frac{{p_n}^2}{a^n} + 1$을 얻는다. 이로부터 수열 $\frac{{p_n}^2}{a^n}$이 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공차가 1인 등차수열임을 알 수 있으므로, $\frac{{p_n}^2}{a^n} = \frac{1}{a} + (n-1)$과 ${p_n}^2 = a^{n-1} + (n-1)a^n$임을 밝힐 수 있다.

한편, $r \neq a$일 때, ${p_{n+1}}^2 = a{p_n}^2 + ar^n$이 ${p_{n+1}}^2 - \frac{ar^{n+1}}{r-a} = a\left({p_n}^2 - \frac{ar^n}{r-a}\right)$로 바뀌고, 수열 ${p_n}^2 - \frac{ar^n}{r-a}$이 첫째항이 $1-\frac{ar}{r-a}$, 공비가 a인 등비수열임을 알 수 있다. 이로부터 ${p_n}^2 - \frac{ar^n}{r-a} = \left(1 - \frac{ar}{r-a}\right)a^{n-1}$을 얻고 ${p_n}^2 = a^{n-1} + \frac{ar^n - a^n r}{r-a}$임을 밝힐 수 있다. 이는 [방법 1]의 결과와 같다.

[논제 I-4] [논제 I-3]의 답으로부터,

$$ {q_n}^2 = \frac{1}{a}{p_{n+1}}^2 = \begin{cases} a^{n-1} + \dfrac{r^{n+1} - a^n r}{r-a}, & r \neq a \\ a^{n-1}(1+an), & r = a \end{cases} $$

$$ \sin^2\theta_n = \frac{{t_n}^2}{{q_n}^2} = \begin{cases} \dfrac{r^n}{a^{n-1} + \dfrac{r^{n+1}-a^n r}{r-a}}, & r \neq a \\ \dfrac{r^n}{a^{n-1}(1+an)}, & r = a \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(r-a)r^n}{a^{n-1}(r-a-ar) + r^{n+1}}, & r \neq a \\ \dfrac{a}{1+an}, & r = a \end{cases} $$

먼저, $r=a$일 때, 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\theta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{1+an} = 0$으로 수렴한다.

$r > a$일 때, $0 < \frac{a}{r} < 1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n = 0$이다. 이때,

$$ \lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(r-a)r}{\left(\frac{a}{r}\right)^{n-1}(r-a-ar) + r^2} = \frac{(r-a)r}{r^2} = 1 - \frac{a}{r} \text{으로 수렴한다.} $$

$r < a$일 때, $0 < \frac{r}{a} < 1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n = 0$이므로

$$ \lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(r-a)r\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}}{(r-a-ar) + r^2\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}} = \frac{0}{r-a-ar} = 0 $$

으로 수렴한다. 여기서, 분모 $r-a-ar$는 영이 될 수 없다. 왜냐하면, $r < a < (1+r)a$이므로, $r-(1+r)a < 0$이기 때문이다.

이를 종합하면 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\theta_n$는 모든 $a>0$, $r>0$에 대하여 수렴함을 알 수 있다.

11 경희대학교(자연계 I) 수시[11]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교과 교육을 충실히 이수한 학생이라면 풀 수 있는 논제	국어, 수학(가), 영어, 과학(1과목) 등급합 5이내, 한국사 5이내	수학(1문항, 5문제)	60분

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (60점)

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다. 한편 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다. $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분이 가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

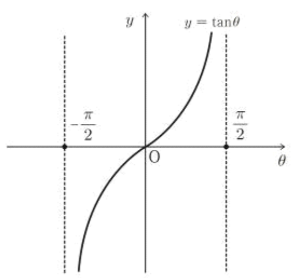
[나] 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이면, 이 구간에서 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다. 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 때에는 그 구간에서의 극댓값과 극솟값 및 양 끝 값 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값을 택하면 된다. 특히 $f(x)$가 구간 (a,b)에서 미분 가능할 때에는 구간 (a,b)에서 $f'(x)=0$의 근의 함숫값 및 구간의 양 끝점에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값을 택하면 된다.

[다] 일반적으로 삼각함수의 도함수는 다음과 같다.

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \sec^2 x$,

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$, $(\sec x)' = \sec x \tan x$, $(\cot x)' = -\csc^2 x$

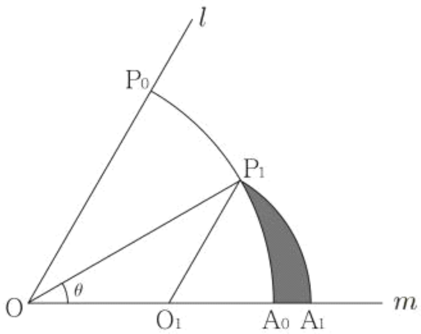
[라] 각 θ의 값을 가로축에, 그에 대응하는 $\tan\theta$의 값을 세로축에 나타내어 함수 $y=\tan\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



11) 경희대학교 홈페이지

[논제Ⅰ] 제시문을 [가]~[라]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

<그림 1>에서 점 O에서 만나는 두 직선 l과 m이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이고, 점 P_0, A_0는 각각 O로부터의 거리가 1인 직선 l, m 위의 점이다. 그러면 부채꼴 OA_0P_0는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 부채꼴의 호 A_0P_0 위의 한 점 P_1을 지나고 l과 평행한 직선이 m과 만나는 점을 O_1이라 하고 각 A_0OP_1의 크기를 θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$라 하자. 그리고 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 선분 O_1P_1의 길이와 같은 원이 m과 만나는 두 점 중 O로부터 거리가 더 먼 점을 A_1이라 하자.



<그림 1>

[논제 I-1]

(1) 선분 OA_1의 길이를 θ의 함수 $f(\theta)$로 나타내고, 그 과정을 서술하시오. (10점)

(2) $f(\theta)$가 최댓값을 가질 때의 θ의 값을 α라 하자. α의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (5점)

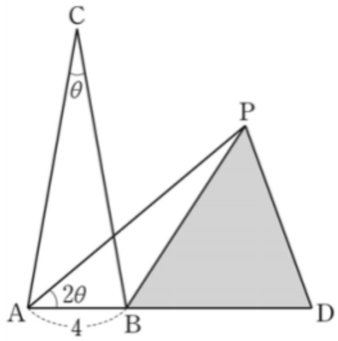
[논제 I-2] <그림 1>에서 두 호 A_0P_1, A_1P_1과 선분 A_0A_1에 의해 둘러싸인 도형의 넓이를 θ의 함수 $g(\theta)$로 나타내고, 그 과정을 서술하시오. (10점)

[논제 I-3] [논제 I-2]에서 구한 $g(\theta)$가 최댓값을 가질 때의 θ의 값을 β라 하자. $\tan\beta$를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

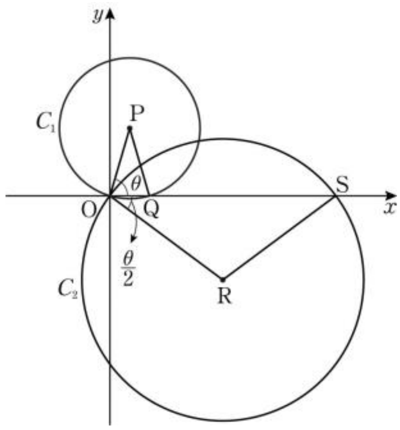
[논제 I-4] [논제 I-1]의 (2)에서 구한 α와 [논제 I-3]의 β의 크기를 비교하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ACB=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡고, $\overline{AC}=\overline{AP}$이고 $\angle PAB=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}(\theta\times S(\theta))$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$ (2013. 전국연합)



문제2. 그림과 같이 $\overline{OP}=1$인 제1사분면 위의 점 P를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_1이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{OR}=2$이고 $\angle ROQ=\frac{1}{2}\angle POQ$인 제4사분면 위의 점 R를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_2가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 S라 하자. $\angle POQ=\theta$라 할 때, 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.) (2015. 전국연합)



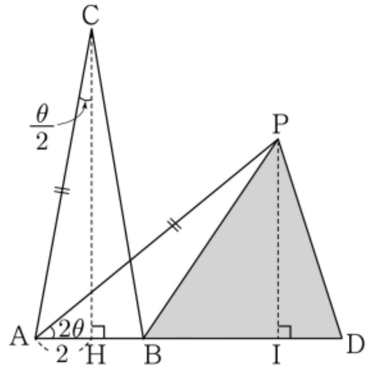
① $\frac{-3+2\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 : 16

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle \mathrm{ACH} = \dfrac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{AH}} = 2$이다.



$$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}} = \frac{2}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \overline{\mathrm{AP}}$$

또한 점 P에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\sin 2\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{PI}}}{\overline{\mathrm{AP}}}$에서

$$\overline{\mathrm{PI}} = \sin 2\theta \times \overline{\mathrm{AP}} = \sin 2\theta \times \frac{2}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}}$이므로 삼각형 BDP의 넓이 $S(\theta)$는

$$\begin{aligned}
S(\theta) &= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}} \times \overline{\mathrm{PI}} \\
&= \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{AB}}) \times \overline{\mathrm{PI}} \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\sin\dfrac{\theta}{2}} - 4\right) \times \left(\sin 2\theta \times \frac{2}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin 2\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\left(\frac{2}{\sin\dfrac{\theta}{2}} - 4\right) \\
&= \frac{2\sin 2\theta}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}} - \frac{4\sin 2\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \lim_{\theta \to 0+}(\theta \times S(\theta)) &= \lim_{\theta \to 0+}\left(\frac{2\theta\sin 2\theta}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}} - \frac{4\theta\sin 2\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right) \\
&= \lim_{\theta \to 0+}\left\{\left(2 \times \frac{\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \times \frac{\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \times \frac{\sin 2\theta}{\theta}\right) - \left(4\theta \times \frac{\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \times \frac{\sin 2\theta}{\theta}\right)\right\} \\
&= (2 \times 2 \times 2 \times 2) - (0 \times 2 \times 2) \\
&= 16 - 0 = 16
\end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 : ⑤

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이므로 삼각형 OQP 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times\sin\theta=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

점 R 의 좌표는 $\left(2\cos\frac{1}{2}\theta,\ -2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$이므로 삼각형 ORS의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\cos\frac{1}{2}\theta\times 2\sin\frac{1}{2}\theta=4\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta=2\sin\theta$$

따라서 삼각형 OQP 와 삼각형 ORS의 넓이의 합을 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta+2\sin\theta$$

$$\begin{aligned} f'(\theta)&=\cos 2\theta+2\cos\theta \\ &=2\cos^2\theta+2\cos\theta-1 \end{aligned}$$

이므로

$f'(\theta)=0$ 에서 $\cos\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 $\cos\theta>0$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$f'(\theta)=0$ 인 θ의 값을 $\theta_1\left(0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 할 때,

$f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

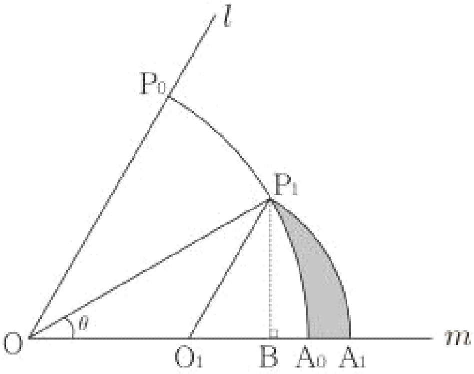
θ	(0)	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$f(\theta_1)$	$\searrow$	

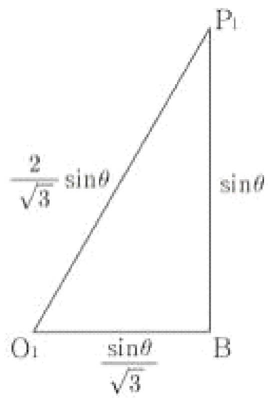
그러므로 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다. 따라서 $f(\theta)$가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값은 $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 이다.

대학발표 예시답안

[논제 I-1]

(1) 점 P_1에서 직선 m에 내린 수선의 발을 B라 하면, 선분 O_1P_1이 직선 l과 평행하기 때문에 $\angle BO_1P_1 = \frac{\pi}{3}$이다.





삼각형 BO_1P_1는 $\angle BO_1P_1 = \frac{\pi}{3}$이고 $\angle O_1BP_1 = \frac{\pi}{2}$이며 $\overline{BP_1} = \sin\theta$인 직각삼각형이다. 따라서 $\overline{O_1P_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$, $\overline{O_1B} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$이다.

$\overline{OA_1} = \overline{OB} + \overline{BA_1}$에서 $\overline{OB} = \cos\theta$이다. 또한 $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1P_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$이고 $\overline{O_1B} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$이므로 $\overline{BA_1} = \overline{O_1A_1} - \overline{O_1B} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$이다. 그러므로 $f(\theta) = \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$이다.

(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$에서 $f(\theta)$는 미분가능하고, $f'(\theta) = -\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta$ 이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$에서 $f'(\theta) = 0$이 되는 경우는 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. 한편, 구간 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$에서 $f'(\theta) > 0$ 이고 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$에서 $f'(\theta) < 0$ 이므로 $f(\theta)$는 $\theta = \frac{\pi}{6}$에서 최댓값을 가진다. 따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$이다.

[논제 I-2]

두 호 A_0P_1과 A_1P_1, 그리고 선분 A_0A_1에 의해 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $O_1A_1P_1$의 넓이와 삼각형 OO_1P_1의 넓이의 합에서 부채꼴 OA_0P_1의 넓이를 뺀 값과 같다.

$\overline{O_1P_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$이고 $\angle BO_1P_1 = \frac{\pi}{3}$이므로

부채꼴 $O_1A_1P_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)^2\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{9}\sin^2\theta$이다.

삼각형 OO_1P_1의 밑변의 길이는 $\overline{OO_1}=\overline{OB}-\overline{O_1B}=\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$이고 높이는 $\overline{BP_1}=\sin\theta$이므로,

삼각형 OO_1P_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin^2\theta$이다.

한편 부채꼴 OA_0P_1의 넓이는 $\frac{\theta}{2}$이므로, 주어진 도형의 넓이는 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서

$g(\theta)=\frac{2\pi}{9}\sin^2\theta+\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin^2\theta-\frac{\theta}{2}\ =\frac{1}{18}\left[(4\pi-3\sqrt{3})\sin^2\theta+9\sin\theta\cos\theta-9\theta\right]$이다.

[논제 I-3]

$g(\theta)=\frac{1}{18}\left[(4\pi-3\sqrt{3})\sin^2\theta+9\sin\theta\cos\theta-9\theta\right]$는 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 미분가능하고,

$$g'(\theta)=\frac{1}{18}\left[2(4\pi-3\sqrt{3})\sin\theta\cos\theta+9\cos^2\theta-9\sin^2\theta-9\right]=\frac{1}{18}\left[2(4\pi-3\sqrt{3})\sin\theta\cos\theta-18\sin^2\theta\right]$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{9}\left[(4\pi-3\sqrt{3})-9\tan\theta\right]$$ 이다.

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$일 때, $\sin\theta\cos\theta>0$이므로 $g'(\theta)=0$인 θ는 $\tan\theta=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$을 만족한다.

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\tan\theta$는 증가함수이고 $0<\tan\theta=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}<\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$이므로,

$\tan\theta=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$을 만족하는 θ가 0과 $\frac{\pi}{3}$사이에 존재한다. 또한 이러한 θ의 좌우에서 $g'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로, 이때의 θ를 β라 하면 $g(\theta)$는 β에서 최댓값을 가지고 $\tan\beta=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$ 이다.

[논제 I-4]

[논제 I-1] 의 (2)에서 구한 $\alpha=\frac{\pi}{6}$이므로 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고, [논제 I-3] 의 β는

$\tan\beta=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$을 만족한다.

$\tan\beta-\tan\alpha=\frac{4\pi-6\sqrt{3}}{9}>\frac{12-6\sqrt{3}}{9}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{3}>0$이므로 $\tan\beta>\tan\alpha$ 이다.

한편, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\tan\theta$는 증가함수이므로 $\beta>\alpha$이다.

12 경희대학교(자연계Ⅱ) 수시[12)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교과 교육을 충실히 이수한 학생이라면 풀 수 있는 논제	국어, 수학(가), 영어, 과학(1과목) 등급합 5이내, 한국사 5이내	수학(1문항, 4문제)	60분

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (60점)

[가] 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 완전제곱식을 이용하여 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타낼 수 있으므로 이차함수의 최댓값과 최솟값에 대하여 다음을 알 수 있다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는

① $a>0$이면 $x=p$일 때 최솟값 q를 가진다.

② $a<0$이면 $x=p$일 때 최댓값 q를 가진다.

[나] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때 다음 성질이 성립한다.

① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

④ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

[다] 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하여 보자.

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l이라고 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 $l:2\pi r=\theta:2\pi$, 즉 $l=r\theta$이다. 또 부채꼴의 넓이를 S라고 하면 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 정비례하므로

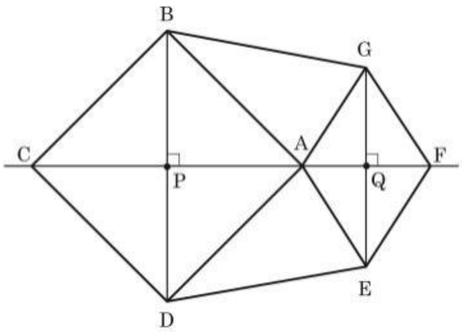
$S:\pi r^2=\theta:2\pi$, 즉 $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$이다.

[라] 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 특히 함수 $f(x)$의 극값과 구간 $[a,b]$에서 양 끝 점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 이용하면 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다. 즉, 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이 최솟값이다.

12) 경희대학교 홈페이지

[논제 I] 제시문 [가]~[라]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

[논제 I-1] <그림 1>에서 사각형 ABCD는 정사각형이고, 사각형 AEFG는 마름모이다. 여기서 선분 PQ의 길이는 1, 선분 PA의 길이는 x이다. (단, $0<x<1$)

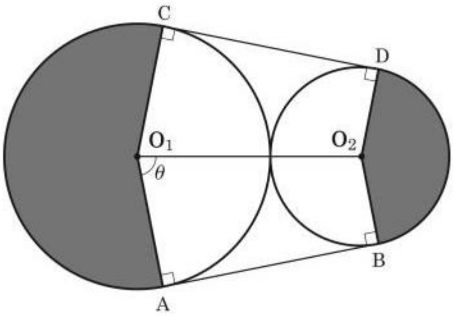


<그림 1>

(1) 선분 QG의 길이가 $1-x$일 때, 육각형 BCDEFG의 넓이를 x의 함수 $S_1(x)$로 나타내고, $S_1(x)$가 최소가 되는 x의 값을 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 선분 QG의 길이가 $ax+b$ (a, b는 양의 상수)일 때, 육각형 BCDEFG의 넓이를 x의 함수 $S_2(x)$라 하자. $0<x<1$인 모든 x에 대하여 $S_2(x)=k$가 되는 두 상수 a, b의 값과 그때의 k의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. (단, k는 양의 상수) (10점)

[논제 I-2] <그림 2>에서 두 원 O_1과 O_2는 서로 외접하고 중심 사이의 거리가 1이다. 점 A, B, C, D는 두 원의 공통접선과의 접점이다. 각 AO_1O_2의 크기는 θ이다. 부채꼴 O_1CA(색칠된 부분)의 호, 선분 AB, 부채꼴 O_2BD(색칠된 부분)의 호, 선분 DC로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이를 l, 넓이를 S라고 하자. (단, $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$)



<그림 2>

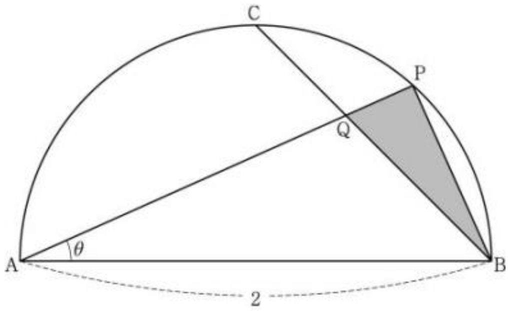
(1) l을 θ의 함수 $l(\theta)$로 나타내고, $l(\theta)$의 최댓값을 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (24점)

(2) S를 θ의 함수 $S(\theta)$로 나타내고, $S(\theta)$의 최솟값을 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (16점)

• 풀어보기

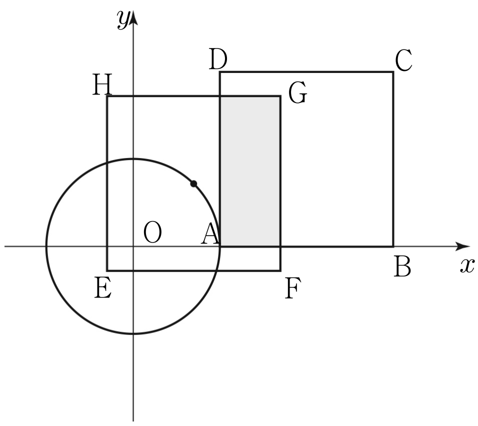
문제1. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 C를 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$가 되도록 잡는다. 호 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP와 선분 BC가 만나는 점을 Q라 하고, $\angle PAB=\theta$라 하자. 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ (2012. 전국연합)



① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

문제2. 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 A(1, 0), B(3, 0), C(3, 2), D(1, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 한 변의 길이가 2인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있을 때, 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 수직이다.) (2014. 전국연합)



① $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=2\sin\theta$이고 $\angle\mathrm{QBP}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{PQB}=\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\theta$ 이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PB}}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\sin\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\sin\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2$$

풀어보기(문제2) 정답 ④

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점을 P라 하자.

동경 OP가 나타내는 각을 θ라 하면 공통부분이 생기는 θ의 범위는 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.

점 $\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta)$, 점 $\mathrm{G}(\cos\theta+1,\sin\theta+1)$이므로 공통부분의 넓이 $S(\theta)=\cos\theta(\sin\theta+1)$

$$S'(\theta)=\cos2\theta-\sin\theta=-(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$$

$$\sin\theta=-1 \text{ 또는 } \sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

$S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{6}$에서 극대이고 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

대학발표 예시답안

[논제 I-1]

(1) 육각형 BCDEFG의 넓이 $S_1(x)$는 삼각형 BCD, 사다리꼴 BDEG, 삼각형 EFG 넓이의 합이다.

$$S_1(x)=\frac{1}{2}\times2x\times x+\frac{1}{2}\times\{2x+2(1-x)\}\times1+\frac{1}{2}\times2(1-x)\times(1-x)=x^2+1+(1-x)^2$$

$$=2x^2-2x+2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}.$$

따라서 $x=\frac{1}{2}$일 때 넓이가 최소가 된다.

(2) (1)에서와 같은 방법으로 넓이 $S_2(x)$를 구하면

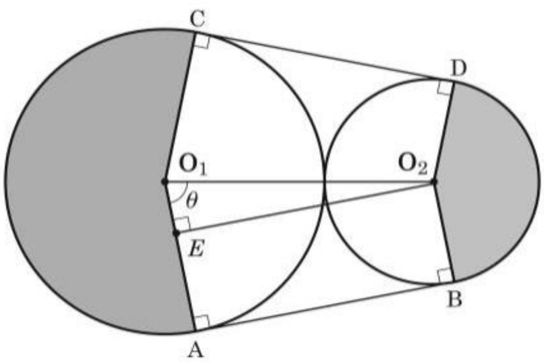
$$S_2(x)=\frac{1}{2}\times 2x\times x+\frac{1}{2}\times\{2x+2(ax+b)\}\times 1+\frac{1}{2}\times 2(ax+b)\times(1-x)$$
$$=(1-a)x^2+(2a-b+1)x+2b$$

$S_2(x)=k$를 만족하기 위하여 $1-a=0$, $2a-b+1=0$, $2b=k$가 성립해야 한다.

따라서 $a=1$, $b=3$이고, $k=6$이다.

[논제 I-2]

(1) 둘레의 길이 l은 부채꼴 O_1CA의 호의 길이, 선분 AB의 길이, 부채꼴 O_2BD의 호의 길이, 선분 DC의 길이의 합이다.



사다리꼴 O_1ABO_2와 O_1CDO_2는 합동이므로 각 CO_1O_2의 크기도 θ이다.

따라서 부채꼴 O_1CA의 중심각의 크기는 $2\pi-2\theta$이다.

선분 O_1A와 O_2B가 평행이고, 선분 O_1C와 O_2D가 평행이므로 부채꼴 O_2BD의 중심각의 크기는 2θ이다.

원 O_1의 반지름의 길이($\overline{O_1A}$)를 r_1, 원 O_2의 반지름의 길이($\overline{O_2B}$)를 r_2라 하면

$r_1+r_2=1$, $r_1-r_2=\overline{O_1O_2}\cos\theta=\cos\theta$이므로 $r_1=\frac{1+\cos\theta}{2}$, $r_2=\frac{1-\cos\theta}{2}$이다.

따라서 부채꼴 O_1CA의 호의 길이 $l_1=r_1(2\pi-2\theta)=(\pi-\theta)(1+\cos\theta)$이고,

부채꼴 O_2BD의 호의 길이 $l_2=r_2(2\theta)=\theta(1-\cos\theta)$이다.

선분 AB와 DC의 길이는 모두 $\overline{O_1O_2}\sin\theta=\sin\theta$이다.

그러므로 $l(\theta)=(\pi-\theta)(1+\cos\theta)+\theta(1-\cos\theta)+2\sin\theta=\pi+2\sin\theta+(\pi-2\theta)\cos\theta$.

$l'(\theta)=2\cos\theta-2\cos\theta-(\pi-2\theta)\sin\theta=(2\theta-\pi)\sin\theta$이고 $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{2\pi}{3}$이므로 $\sin\theta>0$이다.

따라서 $\frac{\pi}{6}\le\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 $l'(\theta)<0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $l'(\theta)=0$, $\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{2\pi}{3}$일 때 $l'(\theta)>0$이다.

그러므로 $l(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 최소가 되고,

$$l\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pi+1+\frac{\sqrt{3}\pi}{3},\ l\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\pi+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$$

중에서 더 큰 값이 최대가 된다. $\pi>3$을 이용하면

$$\begin{aligned} l\left(\frac{2\pi}{3}\right)-l\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3}-1-\frac{2\sqrt{3}-1}{6}\pi \\ &< \sqrt{3}-1-\frac{2\sqrt{3}-1}{6}\times 3=-\frac{1}{2}<0 \end{aligned}$$

이므로 $l(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 최대가 되고, 그 최댓값은 $\pi+1+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$이다.

(2) 넓이 S는 부채꼴 O_1CA와 O_2BD의 넓이, 사다리꼴 O_1ABO_2와 O_1CDO_2의 넓이의 합이다.
(1)에서 구한 부채꼴의 반지름과 중심각의 크기를 이용하면

부채꼴 O_1CA의 넓이는 $\frac{1}{2}r_1^2(2\pi-2\theta)=\frac{1}{4}(\pi-\theta)(1+\cos\theta)^2$이고,

부채꼴 O_2BD의 넓이는 $\frac{1}{2}r_2^2(2\theta)=\frac{1}{4}\theta(1-\cos\theta)^2$이다.

사다리꼴 O_1ABO_2와 O_1CDO_2의 넓이는 모두 $\frac{1}{2}(r_1+r_2)\overline{AB}=\frac{1}{2}\sin\theta$이다.

그러므로

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{4}(\pi-\theta)(1+\cos\theta)^2+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{4}\theta(1-\cos\theta)^2 \\ &= \frac{\pi}{4}+\sin\theta+\frac{\pi}{2}\cos\theta+\frac{\pi}{4}\cos^2\theta-\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= \cos\theta-\frac{\pi}{2}\sin\theta-\frac{\pi}{2}\cos\theta\sin\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta \\ &= \left(\theta-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\sin\theta=\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta-\frac{\pi}{2}\cos\theta\sin\theta. \end{aligned}$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때, $S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이다.

$\frac{\pi}{6}\le\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 $\theta-\frac{\pi}{2}<0,\ -\frac{\pi}{2}\cos\theta<0,\ \sin\theta>0$이므로 $S'(\theta)<0$이고,

$\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{2\pi}{3}$일 때 $\theta-\frac{\pi}{2}>0,\ -\frac{\pi}{2}\cos\theta>0,\ \sin\theta>0$이므로 $S'(\theta)>0$이다.

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 최소가 되고, 그 최솟값은 $\frac{\pi}{4}+1$이다.

13 경희대학교(의학계) 수시[13)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교과 교육을 충실히 이수한 학생이라면 풀 수 있는 논제	국어, 수학(가), 영어, 과학(1과목) 등급합 4이내, 한국사 5이내	수학(1문항, 4문제)	60분

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (60점)

[가] 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$이다. 좌표평면 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

① $x_1 \neq x_2$일 때, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

② $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$

[나] 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

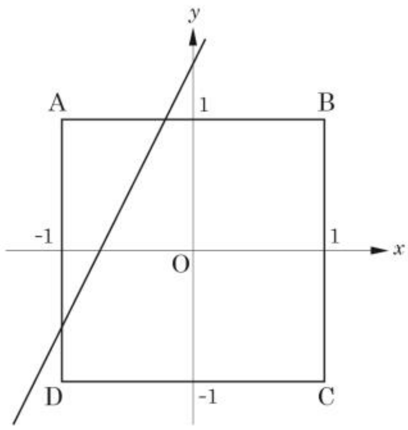
[다] 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때 이 구간에서의 극값과 양 끝점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

[라] 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립함을 보이려면 함수 $y=f(x)$의 증가, 감소를 조사하여 그 구간에서 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다. 또, 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립함을 보이려면 $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $F(x) \geq 0$임을 보이면 된다.

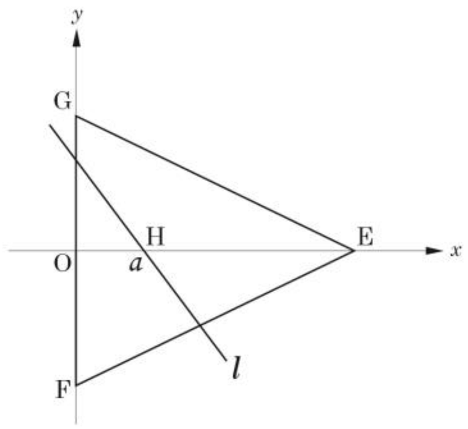
[마] 어떤 관계에 의하여 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것을 X에서 Y로의 대응이라고 한다. 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 하며, 이것을 기호로 $f: X \to Y$와 같이 나타낸다. 이때 집합 X를 함수 f의 정의역, 집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다.
함수 f에 의하여 정의역 X의 각 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이를 기호로 $y=f(x)$와 같이 나타낸다. 이때 $f(x)$를 x의 함숫값이라고 하고, 함숫값 전체로 이루어진 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 이 함수 f의 치역이라고 한다.

13) 경희대학교 홈페이지

[논제 I] 제시문 [가]~[마]를 읽고 다음 질문에 답하시오.



<그림 1>



<그림 2>

[논제 I-1] <그림 1>과 같이 꼭짓점이 $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, -1)$, $D(-1, -1)$인 정사각형 ABCD가 있다.

(1) 기울기가 2이고 y절편이 양의 실수 n인 직선이 정사각형 ABCD와 만나게 되는 n의 범위를 구하시오. (단, 한 점에서 만나는 경우는 제외한다.) (8점)

(2) 이때 직선에 의하여 나누어지는 정사각형 ABCD의 두 도형 중 넓이가 더 크지 않은 도형의 넓이를 S라 하자. 정사각형 ABCD의 넓이에 대한 S의 비율을 n에 대한 함수 $q(n)$으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

[논제 I-2] <그림 2>와 같이 꼭짓점이 $E(6, 0)$, $F(0, -3)$, $G(0, 3)$인 삼각형 EFG와 x축 위에 고정된 점 $H(a, 0)$이 있다. 점 H와 선분 OG 위의 한 점을 지나는 직선 l이 삼각형 EFG를 나눌 때, 나누어진 두 도형 중 넓이가 더 크지 않은 도형의 넓이를 T, 삼각형 EFG의 넓이에 대한 T의 비율을 r라 하자. (단, $0 < a \leq 3\sqrt{3} - 3$)

(1) r의 최댓값과 최솟값을 각각 a의 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (30점)

(2) r의 값이 $\frac{1}{3}$이 될 수 없는 a의 값의 범위를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

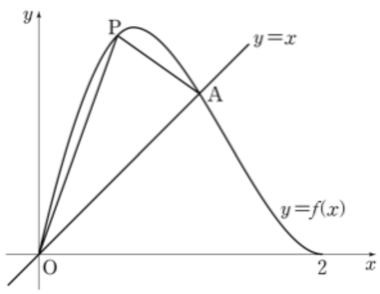
• 풀어보기

문제1. 좌표평면 위에 점 $A(0, 2)$가 있다. $0 < t < 2$일 때, 원점 O와 직선 $y = 2$ 위의 점 $P(t, 2)$를 잇는 선분 OP의 수직이등분선과 y축의 교점을 B라 하자. 삼각형 ABP의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f(t)$의 최댓값은 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) (2009 6월 모평)

문제2. 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x) = ax(x-2)^2 \ \left(a > \frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y = f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은? (2012 9월 모평)

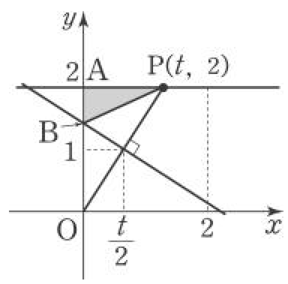


① $\frac{5}{4}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{17}{12}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{19}{12}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 11

다음 그림에서 선분 OP의 기울기가 $\frac{2}{t}$이고 선분 OP의 중점의 좌표가 $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$이므로 직선 l의



방정식은 $y=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)+1$, $y=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$

즉, 점 B의 좌표는 $\left(0, \frac{t^2}{4}+1\right)$이다.

그러므로 삼각형 ABP의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)t=-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{2}$$

$f'(t)=-\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{2}=0$에서 $t^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $(\because\ 0<t<2)$

따라서 $f(t)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{8}\left(\frac{24\sqrt{3}}{27}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$\therefore\ a+b=11$

풀어보기(문제2) 정답 ②

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서 직선 $y=x$까지의 거리가 최대이어야 한다.
이때, 점 P에서 접선은 직선 $y=x$와 평행이므로 $f'(x)=1$에서

$$a\{(x-2)^2+2x(x-2)\}=1$$

$$3ax^2-8ax+4a-1=0$$

이 이차방정식의 한 근이 $x=\frac{1}{2}$이므로

$$3a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8a\cdot\frac{1}{2}+4a-1=0$$

$$\frac{3}{4}a-1=0$$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

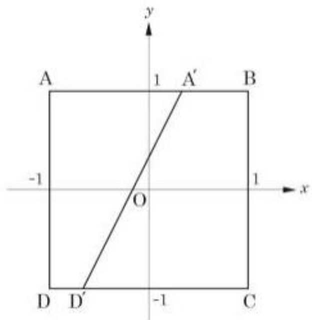
대학발표 예시답안

[논제 I-1]

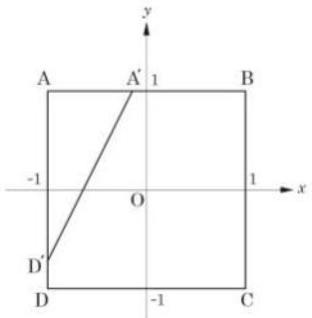
(1) 직선 $l : y=2x+n$이 꼭짓점 $\mathrm{A}(-1,1)$과 $\mathrm{C}(1,-1)$을 지나지 않으며 그 사이에 있을 때 직선 l은 정사각형 ABCD와 두 개의 점에서 만난다. $\mathrm{A}(-1,1)$을 지날 때, $n=3$이고, $\mathrm{C}(1,-1)$을 지날 때, $n=-3$이다. y절편이 양수이므로, n의 범위는 $0<n<3$.

(2) 직선 l의 y절편이 양수이므로 직선 l이 나누는 두 도형 중 넓이가 더 크지 않은 도형은 직선 l의 윗부분에 있는 도형이다. 직선 l이 $\mathrm{D}(-1,-1)$을 지날 때, 즉 $n=1$일 때, 나누어지는 도형의 모양이 달라지므로, $0<n<1$, $1\le n<3$인 두 경우로 나눈다.

(i) $0<n<1$일 때, l이 변 AB와 만나는 점을 A′, 변 DC와 만나는 점을 D′이라 하자. 점 A′은 $x=\dfrac{1-n}{2}$, 점 D′은 $x=\dfrac{-1-n}{2}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AA'}}=\dfrac{3-n}{2}$, $\overline{\mathrm{DD'}}=\dfrac{1-n}{2}$이고, 사다리꼴 AA′D′D의 넓이는 $S=\dfrac{1}{2}\times2\times\left(\dfrac{3-n}{2}+\dfrac{1-n}{2}\right)=2-n$이다. 정사각형 ABCD의 넓이가 4이므로, S의 비율은 $q(n)=\dfrac{2-n}{4}$이다.



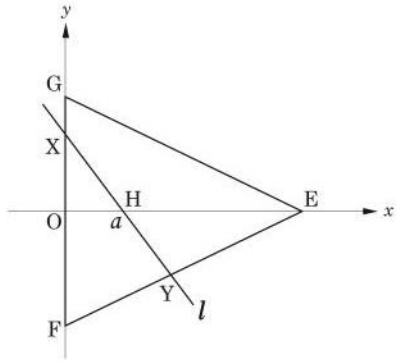
(ii) $1\le n<3$일 때, l이 변 AB와 만나는 점을 A′, 변 AD와 만나는 점을 D′이라 하자. $\overline{\mathrm{AA'}}=\dfrac{3-n}{2}$, $\overline{\mathrm{AD'}}=3-n$이고, 삼각형 AA′D′의 넓이는 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3-n}{2}\right)\times(3-n)=\dfrac{(3-n)^2}{4}$, S의 비율은 $q(n)=\dfrac{(3-n)^2}{16}$이다.



(i), (ii)에 의하여 $q(n)=\begin{cases}\dfrac{2-n}{4} & (0<n<1)\\ \dfrac{(3-n)^2}{16} & (1\le n<3)\end{cases}$

[논제 I-2]

(1) 직선 l의 y절편을 n이라 하자. 직선 l은 선분 OG 위의 한 점을 지나므로 $0 \le n \le 3$, 점 $\mathrm{H}(a, 0)$을 지나므로 $y = -\dfrac{n}{a}x + n$이다. l이 선분 OG와 만나는 점을 X, 변 EF와 만나는 점을 Y라 하자. 변 EF가 $y = \dfrac{1}{2}x - 3$를 만족하므로, 점 Y는 $x = \dfrac{2a(n+3)}{2n+a}$이다.



삼각형 XYF의 넓이를 S라 하자. $\overline{\mathrm{XF}} = n+3$이므로 $S = \dfrac{1}{2} \times (n+3) \times \dfrac{2a(n+3)}{2n+a} = \dfrac{a(n+3)^2}{a+2n}$

이다. 삼각형 EFG의 넓이 18에 대한 S의 비율은 $q = \dfrac{a(n+3)^2}{18(a+2n)}$이다.

$\dfrac{dq}{dn} = \dfrac{a(n+3)(n+a-3)}{9(a+2n)^2}$이고 $\dfrac{dq}{dn} = 0$을 풀면 $n = -3$ 또는 $n = 3-a$이다. $0 \le n \le 3$이므로 $n = -3$은 제외된다. 한편 $3\sqrt{3} - 3 < 3$이고 $0 < a \le 3\sqrt{3} - 3$이므로, $0 < 3 - a < 3$이다. 그래서 $\dfrac{dq}{dn}$은 $n = 3-a$에서만 0이다.

$\dfrac{dq}{dn}$이 $0 < n < 3-a$에서 음의 값을 갖고 $3-a < n < 3$에서 양의 값을 가지므로, q는 $n = 3-a$에서 최솟값 $\dfrac{a(6-a)}{18}$를 가지고, $n=0$ 또는 $n=3$에서 최댓값을 갖는다.

q의 값이 $n=0$에서 $\dfrac{1}{2}$이고 $n=3$에서 $\dfrac{2a}{a+6}$이므로 q의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$과 $\dfrac{2a}{a+6}$ 중 큰 수이다.

$f(a) = \dfrac{2a}{a+6} - \dfrac{1}{2}$이라 할 때, $f'(a) = \dfrac{12}{(a+6)^2} > 0$이므로 $f(a)$는 증가한다.

$f^{-1}(a) = \dfrac{-12a-6}{2a-3}$이고 $f^{-1}(0) = 2$이므로 $f(2) = 0$이다. 그래서 $0 < a \le 2$에서 $f(a) \le 0$, 즉 $\dfrac{2a}{a+6} \le \dfrac{1}{2}$, $2 < a \le 3\sqrt{3} - 3$에서 $f(a) > 0$, 즉 $\dfrac{2a}{a+6} > \dfrac{1}{2}$이다. 이로부터 $0 < a \le 2$와 $2 < a \le 3\sqrt{3} - 3$인 두 경우로 나눈다.

(i) $0 < a \le 2$일 때, $\dfrac{2a}{a+6} \le \dfrac{1}{2}$이므로 q는 최댓값 $\dfrac{1}{2}$, 최솟값 $\dfrac{a(6-a)}{18}$를 가진다.

이때 비율 q가 $\dfrac{1}{2}$보다 작거나 같으므로 삼각형 XYF는 직선 l에 의하여 나누어지는 두 도형 중 넓이가 더 크지 않은 도형이다.

그래서 $T = S$, $r = q$이고, r의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$, 최솟값은 $\dfrac{a(6-a)}{18}$이다.

(ii) $2<a\le 3\sqrt{3}-3$일 때, $\frac{2a}{a+6}>\frac{1}{2}$이므로 q의 최댓값은 $\frac{2a}{a+6}$, 최솟값은 $\frac{a(6-a)}{18}$이다.

그런데, $q>\frac{1}{2}$이면 삼각형 XYF가 넓이가 더 큰 도형이 되어 $T=18-S$, $r=1-q$이다.

따라서 r는 $q>\frac{1}{2}$인지 아닌지에 따라 q 또는 $1-q$가 된다. r는 넓이가 더 크지 않은 도형의 비율이기에 $\frac{1}{2}$보다 클 수 없고, $n=0$일 때 $q=\frac{1}{2}$, 즉 $r=\frac{1}{2}$이므로, r의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

r의 최솟값은 q와 $1-q$의 최솟값 중 작은 값이다. $1-q$의 최솟값은 1에서 q의 최댓값을 뺀 $1-\frac{2a}{a+6}=\frac{6-a}{6+a}$이고, q의 최솟값과의 차는

$$\frac{6-a}{6+a}-\frac{a(6-a)}{18}=\frac{(6-a)(3\sqrt{3}-3-a)(3\sqrt{3}+3+a)}{18(6+a)}$$

이다.

여기서, $3\sqrt{3}-3-a$, $3\sqrt{3}+3+a$, $6-a$, $6+a$ 모두 0이상이므로, $\frac{6-a}{6+a}-\frac{a(6-a)}{18}$도 0이상이다. 즉 $\frac{a(6-a)}{18}\le\frac{6-a}{6+a}$이다. 그래서 r의 최솟값은 $\frac{a(6-a)}{18}$이다.

(i), (ii)에 의하여 r의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $\frac{a(6-a)}{18}$이다.

(2) (1)로부터 r의 범위는 $\frac{a(6-a)}{18}\le r\le\frac{1}{2}$이다. 만약 $\frac{1}{3}<\frac{a(6-a)}{18}$이면 r의 값은 $\frac{1}{3}$이 될 수 없다. 부등식 $\frac{1}{3}<\frac{a(6-a)}{18}$를 풀면 $3-\sqrt{3}<a$이다. 따라서 $3-\sqrt{3}<a\le 3\sqrt{3}-3$일 때, r의 값이 $\frac{1}{3}$이 될 수 없다.

14 단국대학교 모의[14)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 수학과 교육과정 범위와 수준 내 출제, 수학 I, 수학 II, 미적분 I, 미적분 II, 확률과 통계, 기하와 벡터	없음	수학 (2문제, 소문항 있음)	120분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

(가) 현수교 케이블의 모양, 행성과 혜성의 궤도 등과 같이 생활 주변이나 자연 현상에 나타나는 여러 가지 곡선에는 포물선, 타원 등이 있다.

① 좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(p, 0)$과 직선 $x=-p$에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 하고, 이 포물선을 방정식으로 나타내면 $y^2=4px\ (p \neq 0)$이다.

② 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(-c, 0)$, $\mathrm{F}'(c, 0)$에서 거리의 합이 $2a$로 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고 이 타원을 방정식으로 나타내면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$이다.

③ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 기울기가 k인 직선의 방정식은 $y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$ 이다.

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $g\circ f(x)$의 증가와 감소에 대한 다음 성질을 갖는다.

- $g(x)$가 증가함수일 때, $f(x)$가 증가하면 $g\circ f(x)$는 증가하고 $f(x)$가 감소하면 $g\circ f(x)$도 감소한다.
- $g(x)$가 감소함수일 때, $f(x)$가 증가하면 $g\circ f(x)$는 감소하고 $f(x)$가 감소하면 $g\circ f(x)$도 증가한다.

(다) 좌표평면에서 곡선 위의 점을 매개변수로 나타내면 편리하다. 매개변수 방정식

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ \ (0\le t<2\pi)$$

는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 매개변수 t를 사용하여 나타낸 것이다.

14) 단국대학교 홈페이지

[논제 1] 좌표평면 위를 움직이는 점 P와 점 Q의 시각 t에서의 위치를 각각

$$(\sqrt{2}\cos t,\ \sin t),\ (\sqrt{2}\cos 2t,\ \sin 2t)$$

라 하자. $t\,(0<t<\pi)$에서 두 점 P와 Q사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$가 극댓값을 갖게 하는 t의 값을 구하시오. (15점)

[논제 2] 좌표평면에서 포물선 $8(x+2)=y^2$의 초점을 F라 하자. 초점 F와 이 포물선 위의 점 $\mathrm{C}(x,\,y)\,(-2<x<0)$를 지나는 직선 l에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 D의 집합을 A라 하자.

D는 중심이 $\mathrm{C}(x,\,y)$이고 y축에 접하는 원과 l의 교점 중 원점으로부터 먼 거리에 있는 2사분면의 점이다.

원점 O와 점 $\mathrm{B}(-4,\,0)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}=8$을 만족시키는 집합 A의 원소 D의 좌표를 구하시오. (15점)

[논제 3] 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 D에서 타원 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45°일 때, 점 D의 좌표를 구하시오.(단, 점 D는 2사분면에 있다) (15점)

[문제 2] 다음 〈제시문〉을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

(가) 별의 밝기, 소리의 크기, 지진의 규모 등과 같은 자연 현상을 해석할 때 로그를 사용하면 편리하다. 일반적으로 $a>0$, $a\neq 1$일 때, 양수 x에 대하여 $a^y=x$를 만족시키는 실수 y를 $y=\log_a x$로 나타내고 a를 밑으로 하는 x의 로그라고 한다. 이와 같이 양의 실수 전체의 집합에서 로그함수 $y=\log_a x$를 정의할 수 있다. 특히, $a=10$, e인 경우의 로그함수를 각각 $y=\log x$, $y=\ln x$로 나타낸다. 로그함수의 성질

① $\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$, ② $\log_a \dfrac{1}{x}=-\log_a x$

를 이용하면, 함수 $f(x)$에 대하여 $G(x)=\ln\left|\dfrac{f(-x)}{f(x)}\right|$라 할 때 다음이 성립한다.

③ $G(-x)=-G(x)$

(나) 좌표평면에서 곡선 $y=f(x)\,(f(x)\geq 0)$과 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 영역 S의 넓이를 구분구적법을 사용하여 구할 수 있다. 이 개념을 음수의 함숫값을 갖는 함수까지 일반화한 것이 정적분이다. 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 자연수 n에 대하여 구간 $[a,b]$를 n등분한 각 분할점의 x좌표를 차례로 $a=x_0$, x_1, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n=b$라 하자. 이때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{b-a}{n}$$

를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이를 $\int_a^b f(x)dx$로 나타낸다.

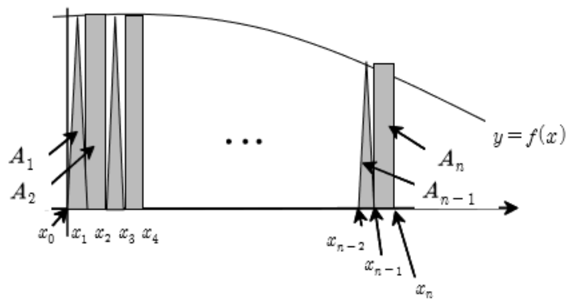
(다) 구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 구간 $[0,1]$을 n등분한 양 끝점과 분할점을 차례로

$$0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n=1$$

이라 하고, $m_i=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$라 하자. $A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$을

- i가 홀수일 때, 세 점 $(x_{i-1},0)$, $(x_i,0)$, $(m_i,f(x_{i-1}))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형,
- i가 짝수일 때, 네 점 $(x_{i-1},0)$, $(x_i,0)$, $(x_{i-1},f(x_{i-2}))$, $(x_i,f(x_{i-2}))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형

이라 하자. $n(=2m)$이 짝수인 경우일 때 $A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$는 다음과 같다.



[논제 1] 10개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수를 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$이라 할 때,

$$\sum_{i=1}^{10} \log a_i$$

의 값이 자연수일 경우의 수를 구하시오. (15점)

[논제 2] <제시문> (다)에서 함수 $f(x) = \cos\sqrt{x}$ 이고 A_i의 넓이를 b_i라 할 때,

$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{2m} b_i$의 값을 구하시오. (15점)

[논제 3] 다음 조건

(1) $\int_0^1 \sqrt{t}\, f(x\sqrt{t})dt = \frac{2}{3}e^{g(x)}$
(2) $\int_0^1 g(x\sqrt{t})dt = \ln\left|\frac{h(-x)}{h(x)}\right| + x^{f(0)}$
(3) $g(x)$, $h(x)$는 이계도함수를 갖고 $g'(3)=0$이다.

를 만족시키는 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여

$$f(3)+f(-3)$$

의 최솟값을 구하시오. (25점)

• 풀어보기

문제1. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

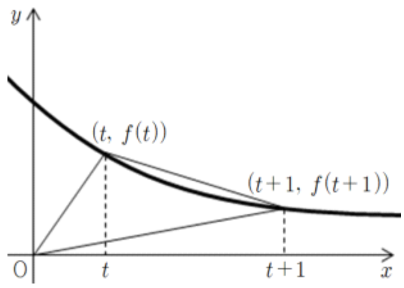
(가) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.
(나) 임의의 양의 실수 t 에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$ 이다.
(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx = 2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)
(2015 대입 9월 평가원)

문제2. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 를 만족시키고, $\displaystyle\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2 + 4$ 이다. $\displaystyle\int_1^e f(\ln x)\,dx = ae + b$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이다.) (2014 대입 9월 평가원)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 127



세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$ 이므로

$$\frac{1}{2}tf(t)+\frac{f(t)+f(t+1)}{2}-\frac{1}{2}(t+1)f(t+1)=\frac{t+1}{t}$$

정리하면

$$\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}=-\frac{2}{t^2}$$

따라서 임의의 양수 x 에 대하여

$$\frac{f(x+1)}{x+1}-\frac{f(x)}{x}=-\frac{2}{x^2}$$

이다. $g(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{f(t)}{t}dt$ 라 하면 $g'(x)=\dfrac{f(x+1)}{x+1}-\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{2}{x^2}$ 이므로

$$g(x)=\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx=\frac{2}{x}+C$$

$g(1)=\displaystyle\int_1^2\frac{f(t)}{t}dt=2$ 이므로 $2+C=2$ 즉, $C=0$

따라서 $g(x)=\dfrac{2}{x}$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx&=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx\\&=g\left(\frac{7}{2}\right)+g\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{4}{7}+\frac{4}{9}=\frac{64}{63}\end{aligned}$$

$\therefore\ p+q=127$

풀어보기(문제2) 정답 17

$e^x=t$ 로 치환하면 $g(t)=\begin{cases}f(\ln t) & (1\le t\le e)\\ g\left(\dfrac{t}{e}\right)+5 & (e\le t\le e^2)\end{cases}$ 이므로

$$\int_1^{e^2} g(x)\,dx = \int_1^e f(\ln x)\,dx + \int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx \quad \cdots\cdots ①$$

우변의 두 번째 적분식에서 $\dfrac{x}{e}=u$로 치환하면 $dx = e\,du$ 이므로

$$\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx = e\int_1^e \{g(u)+5\}du = e\int_1^e f(\ln x)\,dx + 5e(e-1)$$

이다. 따라서 ①에서

$$(e+1)\int_1^e f(\ln x1)\,dx = \int_1^{e^2} g(x)dx - 5e(e-1)$$

$$= 6e^2+4-5e^2+5e = e^2+5e+4 = (e+1)(e+4)$$

이므로 $\displaystyle\int_1^e f(\ln x)\,dx = e+4$ 이다. 따라서 $a=1,\ b=4$ 이고 $a^2+b^2=17$ 이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

[논제 1]

두 점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$과 같은 증가 감소의 경향을 보이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 극댓값을 찾는다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2 &= (\sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}\cos 2t)^2 + (\sin t - \sin 2t)^2 \\ &= (\cos^2 t + \cos^2 2t) - 2(2\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t) + 2\end{aligned}$$

이고, $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t$를 대입하면,

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \left\{\cos^2 t + (2\cos^2 t - 1)^2\right\} - 2\left\{2\cos t(2\cos^2 t - 1) + \sin t(2\sin t\cos t)\right\} + 2$$

이다. $u=\cos t$로 치환하면 $0<t<\pi$로부터 $-1<u<1$이고,

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 4u^4 - 4u^3 - 3u^2 + 3$$

을 얻는다. 따라서 $F(u) = 4u^4 - 4u^3 - 3u^2 + 3$이라 하면

$$\frac{d}{du}F(u) = 16u^3 - 12u^2 - 6u = 0$$

이려면 $u=0$ 또는 $u=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{8}$ 이어야 한다.

$-1<u<1$이므로 $u=\cos t=0$, $\dfrac{3-\sqrt{33}}{8}$을 얻는다.

$\cos t_0 = \dfrac{3-\sqrt{33}}{8}$, $(0<t_0<\pi)$라 하면 함수 $y=\cos t$는 구간 $(0,\pi)$에서 감소함수이고 삼차함수 $F(u)$의 증감은 다음과 같다.

u	-1		$\frac{3-\sqrt{33}}{8}$		0		1
$F(u)$		↘		↗		↘	

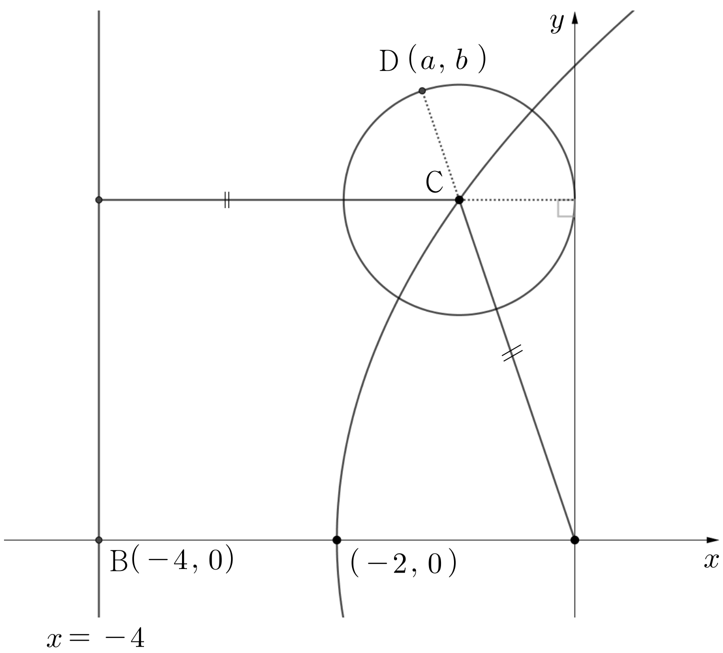
따라서 <제시문> (나)에 의하여 함수 $\{f(t)\}^2 = F(\cos t)$의 증감은 다음과 같다.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		t_0		π
$F(\cos t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

그러므로 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 함수 $f(t)$는 극대이다. 답: $t=\frac{\pi}{2}$

[논제 2]

주어진 포물선 $8(x+2)=y^2$의 초점은 원점 O이고 준선은 $x=-4$이다.



따라서 포물선의 정의에 의하여, 원점 O와 점 D(a,b)사이의 거리 d는

$d=\overline{\mathrm{OC}}+$(원의 반지름의 길이)

$=$(C에서 직선 $x=-4$까지의 거리)+(원의 반지름의 길이)

$=$(C에서 직선 $x=-4$까지의 거리)+(C에서 직선 $x=0$까지의 거리)

$=4$

이므로 A에 속하는 D(a,b)는

$$a^2+b^2=16,\ (-4<a<0,\ 0<b<4)$$

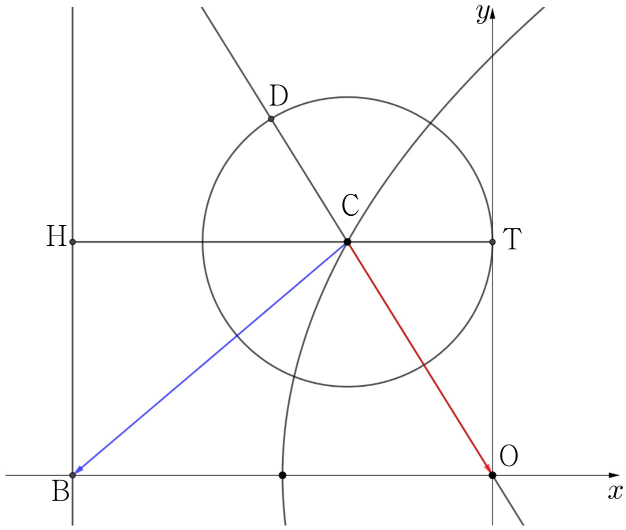
를 만족시킨다.

또한 $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(-4-a, -b)$, $\overrightarrow{\mathrm{DO}}=(-a, -b)$이므로

$$8=\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}=a(a+4)+b^2$$

을 만족시키려면 $a=-2$, $b^2=12$이어야 한다. 그러므로 구하는 2사분면의 점 D의 좌표는 $(-2, 2\sqrt{3})$이다. 답: D$(-2, 2\sqrt{3})$

(나침반 다른 풀이)



점 O가 초점 F이므로 $\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{CO}}+\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CH}}+\overline{\mathrm{CT}}=4$이다. 그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=16$이다. $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}=8$에서

$$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-8,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-8,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=8$$

이다. $\angle\mathrm{DOB}=\theta$라고 두면 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=8$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 점 D의 좌표는

$$(4\cos\theta,\ 4\sin\theta)=(-2\sqrt{3},\ 2)$$

이다.

[논제 3]

원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $\mathrm{D}(a,b)$를 지나고 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$에 접하는 직선의 기울기를 k라 하자. <제시문> (가)에 의해서 직선의 방정식은 $y=kx\pm\sqrt{2k^2+1}$이므로

$$b=ka\pm\sqrt{2k^2+1}$$

에서

$$(a^2-2)k^2-2abk+b^2-1=0$$

이다. 이 방정식의 두 해를 k_1, k_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$$k_1+k_2=\frac{2ab}{a^2-2},\ k_1k_2=\frac{b^2-1}{a^2-2}\ \cdots\cdots ①$$

이다. 한편, 기울기가 k_1인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α, 기울기가 k_2인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라 하면, $k_1=\tan\alpha$이고 $k_2=\tan\beta$이다. 두 직선이

이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$1=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 식 ①을 ②에 대입하면 $a^2+b^2=9$ 이므로 $b^2=2$ 이다. 점 (a,b)는 제 2사분면 위에 있으므로 $b=\sqrt{2}$, $a=-\sqrt{7}$ 이다. 답: $\mathrm{D}\left(-\sqrt{7},\ \sqrt{2}\right)$

[문제2] 대학발표 예시답안

[논제 1]

$\sum_{i=1}^{10}\log a_i=k$ (k는 자연수)라 하자. 로그의 성질에 의하여

$$\sum_{i=1}^{10}\log a_i=\log a_1a_2a_3\cdots a_{10}$$

이므로

$$a_1a_2a_3\cdots a_{10}=2^k\cdot 5^k \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 따라서 ①의 식이 성립하기 위해서 a_i는 $1, 2, 4$ 또는 5이다.

a_i가 2인 a_i의 개수를 s, a_i가 4인 a_i의 개수를 t, a_i가 5인 a_i의 개수를 k라 하면

$$2^s\cdot 4^t\cdot 5^k=2^k\cdot 5^k$$

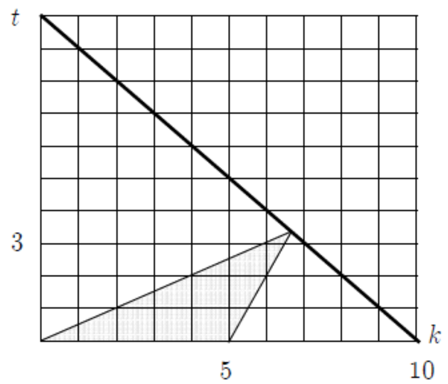
이므로

$$s+2t=k,\ s+t\le 10-k$$

이다. $s\ge 0$, $t\ge 0$, $k\ge 0$ 이므로 s를 소거한 부등식

$$t\ge 0,\ k\ge 0,\ k-2t\ge 0,\ 10-k-t\ge 0,\ t\ge 2k-10$$

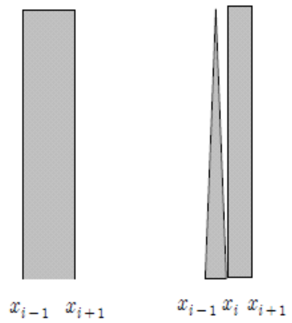
을 만족시키는 영역을 $k-t$평면에 나타내면 아래의 색칠한 부분이다.



따라서 조건을 만족시키는 (k,t)의 개수는 13이고, $s+2t=k$이므로 s는 각 (k,t)에 의하여 유일하게 결정된다. 구하는 경우의 수는 13이다. 답: 13

[논제 2]

그림 (B)의 색칠한 부분의 넓이는 (A)의 색칠한 부분의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 이다.



(A) (B)

따라서 네 점 $(x_{k-1}, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_{k+1}, f(x_{k-1}))$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이를 c_k라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k = \int_0^1 f(x)dx$$

이므로

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{2m} b_i = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{3}{4}c_k = \frac{3}{4}\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$$

이다. 한편, $\sqrt{x}=y$로 치환하면

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 2y\cos y\,dy$$

$$= [2y\sin y]_0^1 - \int_0^1 2\sin y\,dy = 2\sin 1 + 2(\cos 1 - 1)$$

이므로 $\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{2m} b_i = \frac{3}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$ 이다. 답: $\frac{3}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$

[논제 3]

(1)의 식에서 $x\sqrt{t}=s$로 치환하면 $\sqrt{t}=\frac{s}{x}$, $\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{x}ds$ 이므로

$$\int_0^1 \sqrt{t}\,f(x\sqrt{t})dt = \int_0^x \frac{s}{x}f(s)\frac{2s}{x^2}ds = \frac{2}{3}e^{g(x)}$$

이고 정리하면

$$\int_0^x s^2 f(s)ds = \frac{x^3}{3}e^{g(x)}$$

이다. 양변을 x에 관하여 미분하여 정리하면

$$f(x) = e^{g(x)} + \frac{x}{3}e^{g(x)}g'(x)$$

이다. 함수 $f(x)$에 $x=3$, $x=-3$을 대입하면 다음과 같다.

$$f(3)+f(-3)=\left[e^{g(3)}+e^{g(-3)}\right]+\left[e^{g(3)}g'(3)-e^{g(-3)}g'(-3)\right] \quad \cdots\cdots ①$$

$H(x)=\ln\left|\dfrac{h(-x)}{h(x)}\right|$ 라 하고, (2)로부터 위와 같은 치환적분법을 사용하면

$$\int_0^x sg(s)ds=\frac{x^2}{2}H(x)+\frac{1}{2}x^{2+f(0)}$$

이다. 양변을 x에 관하여 미분하여 정리하면

$$g(x)=H(x)+\frac{x}{2}H'(x)+\frac{2+f(0)}{2}x^{f(0)}$$

이다. (1)의 식에 $x=0$을 대입하면

$$\int_0^1\sqrt{t}\,f(0)dt=f(0)\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}e^{g(0)}$$

에서 $f(0)=e^{g(0)}$이므로 $f(0)\neq 0$이다. 또한 (2)의 식에 $x=0$을 대입하면

$$\int_0^1 g(0)dt=g(0)\int_0^1 dt=0$$

이므로 $g(0)=0$이고 $f(0)=1$이다. 따라서

$$g(x)=H(x)+\frac{x}{2}H'(x)+\frac{3}{2}x \text{ 이고 } g(-x)=H(-x)-\frac{x}{2}H'(-x)-\frac{3}{2}x$$

이다. 한편

$$H(-x)=\ln\left|\frac{h(x)}{h(-x)}\right|=\ln\left|\frac{h(-x)}{h(x)}\right|^{-1}=-\ln\left|\frac{h(-x)}{h(x)}\right|=-H(x)$$

이고, 합성함수의 미분법에 의하여

$$H'(-x)=H'(x)$$

이다. 그러므로

$$g(-x)=-H(x)-\frac{x}{2}H'(x)-\frac{3}{2}x=-g(x)$$

이므로, 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=-g(-x)$$

이고, 또한 모든 실수 x에 대하여

$$g'(x)=g'(-x)$$

이므로 $g'(3)=g'(-3)=0$이다. 식 ①로부터 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(3)+f(-3)=e^{g(3)}+e^{-g(3)}\geq\sqrt{e^{g(3)}\frac{1}{e^{g(3)}}}=2$$

이므로 구하는 최솟값은 2이다.　　답: 2

[참고] $f(x)=1$, $g(x)=0$, $h(x)=e^{\frac{x}{2}}$은 조건 (1), (2), (3)을 만족시킨다.

15 단국대학교 수시(오전)[15)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(3문항, 6문제)	120분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a와 같지 않으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 $x\to a$일 때의 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

함수의 극한을 이용하여 다음과 같이 함수의 연속성, 함수의 미분가능성 등을 정의한다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$일 때

$f(x)$는 $x=a$에서 연속

(2) 극한값 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$이 존재할 때 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능

특히, (2)의 경우 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$로 나타내고, 이를 $x=a$에서 $f(x)$의 미분계수라 한다.

미분계수는 접선의 방정식을 구하는데 유용하다. 즉, 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $\mathrm{P}(x, f(a))$에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(나) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 정적분의 값을 정의를 이용하여 구하는 것은 쉽지 않지만, 다음 미적분의 기본 정리를 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

[미적분의 기본 정리] 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면 $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

15) 단국대학교 홈페이지

[논제 1] 열린 구간 $(-1,\infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음을 만족시킬 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. (15점)

$$x\ln(x+1)f(x) = -ax\cos(x+\frac{\pi}{2})+b \ \ (x \neq 0),\ f(0)=1$$

[논제 2] 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(\pi, 0)$에서 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수 $A(x)$를 $A(x)=|\sin x - g(x)|$라 할 때, 실수 전체에서 $A(x)$의 미분가능성을 조사하시오. (15점)

[논제 3] 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\frac{a}{3}\sin(bx)+3$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오. (15점)

(ⅰ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} h(x)dx = \frac{3}{2}\pi$

(ⅱ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (h(x)-3)dx = 1$

(ⅲ) a, b는 자연수이고, $a+b \leq 100$

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 수 L에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

특히, 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1}$$

이고, 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 등비급수는 $|r|<1$일 때 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

(나) 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(-c, 0)$, $\mathrm{F}'(c, 0)$에서 거리의 합이 $2a$로 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 이 타원을 방정식으로 나타내면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>c>0, b^2=a^2-c^2)$ 이다.

좌표평면 위에 원점 O와 세 점 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(1,1)$, $\mathrm{C}(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 실수 $r\,(0<r<1)$과 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{Q}_n(a_n, b_n)$을 다음과 같은 규칙으로 정의하고,

(1) Q_1은 원점이다.
(2) Q_{n+1}은 점 Q_n에서 정사각형 OABC의 변을 따라 시계 반대 방향으로 r^n만큼 이동한 점이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$을 x좌표, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$을 y좌표로 하는 점을 P_r라 하자. 예를 들면, $r=\dfrac{3}{5}$이면 $\mathrm{Q}_3\left(\dfrac{24}{25}, 0\right)$이고, $\mathrm{P}_{\frac{3}{5}}$의 좌표는 $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$이다.

[논제 1] 집합 $T=\left\{r \mid 0<r<1\text{이고, } \mathrm{P}_r\text{의 좌표가 } \left(\dfrac{1}{3}, 1\right)\text{이다.}\right\}$를 구하시오. (15점)

[논제 2] P_r의 x좌표를 $f(r)$라 할 때, 함수 $f(r)$가 미분가능하지 않은 r의 값을 모두 구하시오. (15점)

[논제 3] 점 $\mathrm{A}'(-1, 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 r의 최솟값을 구하시오.

(25점)

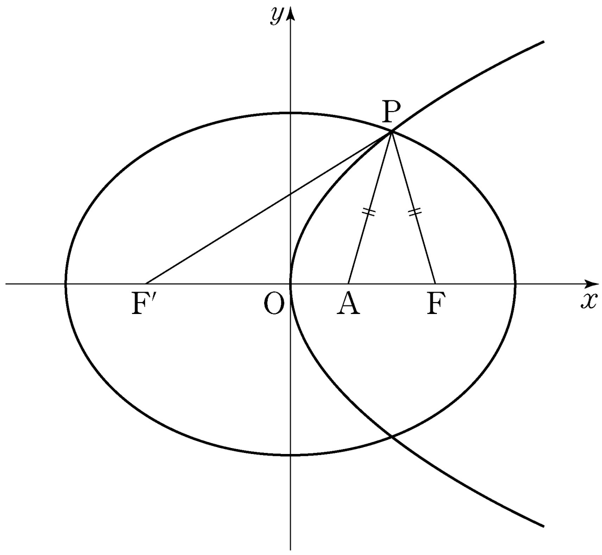
(ⅰ) r, s는 실수이고, $r < s \le \frac{3}{4}$
(ⅱ) $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}_r} - \overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}_s} = \overline{\mathrm{AP}_r} - \overline{\mathrm{AP}_r}$

• 풀어보기

문제1. 좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a, 0)$ $(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}}=2,\ \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{FF}'}=\overline{\mathrm{PF}'}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$ 이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) (2017. 9월 모평)



문제2. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x \le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은?

(2017 6월 모평)

① -2 ② $-\frac{9}{4}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{11}{4}$ ⑤ -3

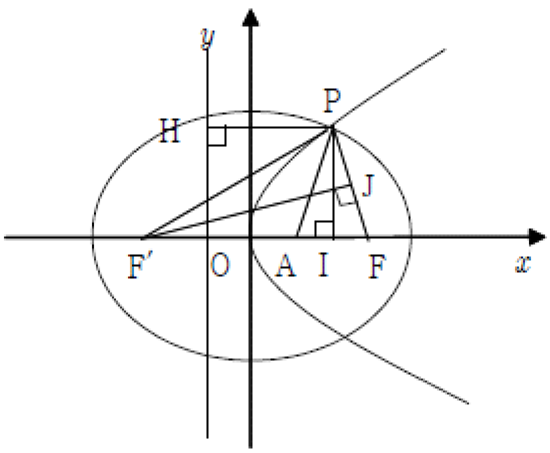
• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 29

$\overline{AF}=2$, $A(a, 0)$이고 삼각형 PAF가 $\overline{PA}=\overline{PF}$인 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 $a+1$이다.

한편, 점 P에서 포물선의 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PA}=\overline{PH}=2a+1$
이때, 이등변삼각형 PAF의 꼭짓점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하고 $\angle PFI=\alpha$라 하면,

$$\cos\alpha=\frac{\overline{IF}}{\overline{PF}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AF}}{\overline{PF}}=\frac{1}{2a+1} \quad \cdots\cdots \text{①}$$



또, 이등변삼각형 PF′F의 꼭짓점 F′에서 변 FP에 내린 수선의 발을 J라 하면
$F(a+2, 0)$이므로

$$\cos\alpha=\frac{\overline{PF}}{\overline{FF'}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{PF}}{\overline{FF'}}=\frac{a+\frac{1}{2}}{2a+4}=\frac{2a+1}{4a+8} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

①과 ②가 같아야 하므로 $\dfrac{1}{2a+1}=\dfrac{2a+1}{4a+8}$

$$(2a+1)^2=4a+8$$

$$4a^2+4a+1=4a+8$$

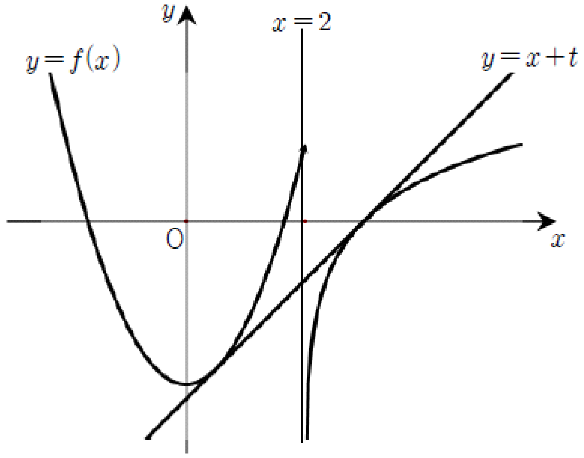
$$a=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

따라서, 타원의 장축의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PF'}+\overline{PF}&=\overline{FF'}+\overline{PF}\\&=(2a+4)+(2a+1)\\&=4a+5\\&=5+2\sqrt{7}\end{aligned}$$

이므로 $p^2+q^2=5^2+2^2=29$이다.

풀어보기(문제2) 정답 ④



그림과 같이 기울기가 1인 직선 $y=x+t$에 대하여 주어진 조건을 만족시키려면 곡선 $y=\ln(x-2)$에 접하고 기울기가 1인 직선이 곡선 $y=x^2+k$에 접해야 한다. $y=\ln(x-2)$에서 $y'=\dfrac{1}{x-2}$이므로 곡선 $y=\ln(x-2)$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y=x-3$이다.

따라서 곡선 $y=x^2+k$와 직선 $y=x-3$이 접해야 하므로 $x^2+k=x-3$에서 $x^2-x+k+3=0$이다.

이차방정식 $x^2-x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4(k+3)=0$에서 $k=-\dfrac{11}{4}$이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

논제 1.

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 0이 아닌 실수 $x\in(-1,\infty)$에 대하여

$$f(x)=\frac{-ax\sin x}{x\ln(x+1)}=\frac{ax\sin x+b}{x\ln(x+1)}$$

이다. $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 따라서 $b=0$이다.

또한 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x}{x\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{a\sin x}{x}}{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}=a=f(0)=-1$$

이므로 구하는 값은 $a=-1$, $b=0$이다.

논제 2.

$f(x)=\sin x$ 라 하면, $f'(x)=\cos x$ 이므로 점 $\mathrm{P}(\pi, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$g(x)=f'(\pi)(x-\pi)=-x+\pi$$

이다. 곡선 $f(x)=\sin x$ 와 접선 $g(x)=-x+\pi$ 의 교점은 $\mathrm{P}(\pi, 0)$ 뿐이므로 $A(x)$ 는 다음과 같다.

$$A(x)=|f(x)-g(x)|=\begin{cases}-x+\pi-\sin x & (x<\pi)\\ \sin x+x-\pi & (x\geq\pi)\end{cases}$$

구간 $(-\infty, \pi)$ 와 (π, ∞) 에서 $A(x)$ 는 미분가능하므로 $x=\pi$ 에서 미분가능성을 조사하면 된다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{A(\pi+h)-A(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h-\sin(\pi+h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\left(-1+\frac{\sin h}{h}\right)=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{A(\pi+h)-A(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sin(\pi+h)+h}{h}=\lim_{h\to 0-}\left(-\frac{\sin h}{h}+1\right)=0$$

이므로 $A(x)$ 는 $x=\pi$ 에서 미분가능하다. 따라서 함수 $A(x)$ 는 모든 실수에서 미분가능하다.

논제 3.

조건 (i)로부터

$$\frac{3}{2}\pi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}h(x)dx+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}h(x)dx$$

$$=\left[-\frac{a}{3b}\cos(bx)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{3}{4}\pi+\left[-\frac{a}{3b}\cos(bx)\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}+\frac{3}{4}\pi$$

$$=-\frac{a}{3b}\left(\cos(\frac{b\pi}{4})-1\right)-\frac{a}{3b}\left(\cos(b\pi)-\cos(\frac{3b\pi}{4})\right)+\frac{3}{2}\pi$$

이므로 $0=-\frac{a}{3b}\left(\cos(\frac{b\pi}{4})-1\right)-\frac{a}{3b}\left(\cos(b\pi)-\cos(\frac{3b\pi}{4})\right)$

이고, a, b 가 자연수이므로

$$\cos\left(\frac{b}{4}\pi\right)+\cos(b\pi)-\cos\left(\frac{3b}{a}\pi\right)=1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. ①로부터 b 는 짝수이다. 또한 조건 (ii)로부터

$$1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(h(x)-3)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{a}{3}\sin(bx)dx=\left[-\frac{a}{3b}\cos(bx)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{a}{3b}\left(\cos(\frac{b\pi}{3})-1\right) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

이다. b 가 짝수이므로, 자연수 k 에 대하여

$$\cos\left(\frac{b\pi}{3}\right)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & b=6k-2 \text{ 또는 } 6k-4\\ 1, & b=6k\end{cases}$$

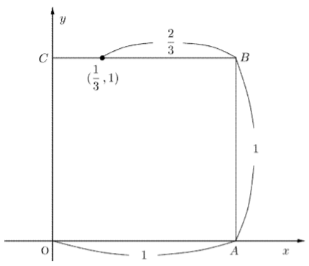
이다. 식 ②로부터

$$1=-\frac{a}{3b}\left(\cos\left(\frac{b\pi}{3}\right)-1\right)=\begin{cases}\frac{a}{2b}, & b=6k-2 \text{ 또는 } 6k-4\\ 0, & b=6k\end{cases}$$

이다. 따라서 조건 (i), (ii)를 만족시키는 자연수의 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.
$(12k-4, 6k-2)$ $(k=1, 2, \cdots, 5)$와 $(12k-8, 6k-4)$ $(k=1, 2, \cdots, 6)$
이다. 이를 나열하면 다음과 같다.
$(4, 2)$, $(8, 4)$, $(16, 8)$, $(20, 10)$, $(28, 14)$, $(32, 16)$, $(40, 20)$, $(44, 22)$, $(52, 26)$, $(56, 28)$, $(64, 32)$

[문제2] 대학발표 예시답안

논제 1.



그림에서 P_r가 점 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$이려면 $\frac{r}{1-r}=4m+\frac{8}{3}$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$이므로 구하는 집합 T는 다음과 같다.

$$T=\left\{\frac{12m+8}{12m+11} \,\middle|\, m=0, 1, 2, \cdots\right\}$$

논제 2.

먼저 구간 $\left(0, \frac{4}{5}\right]$에서 $f(r)$를 구하면 다음과 같다.

$$f(r)=\begin{cases}\frac{r}{1-r}, & 0<r<\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}\le r\le\frac{2}{3}\\ 3-\frac{r}{1-r}, & \frac{2}{3}<r<\frac{3}{4}\\ 0, & \frac{3}{4}\le r\le\frac{4}{5}\end{cases}$$

같은 방법으로, 구간 $\left(\frac{4m+4}{4m+5}, \frac{4(m+1)+4}{4(m+1)+5}\right]$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$에서 $f(r)$을 구하면 다음과 같다.

$$f(r)=\begin{cases}\frac{r}{1-r}-4(m+1), & \frac{4m+4}{4m+5}<r<\frac{4m+5}{4m+6}\\ 1, & \frac{4m+5}{4m+6}\le r\le\frac{4m+6}{4m+7}\\ 4(m+1)+3-\frac{r}{1-r}, & \frac{4m+6}{4m+7}<r<\frac{4m+7}{4m+85}\\ 0, & \frac{4m+7}{4m+8}\le r\le\frac{4m+8}{4m+9}\end{cases}$$

이다. 함수 $f(r)$는 유리함수와 상수함수가 만나는 점에서 미분가능하지 않고, 그 r의 값

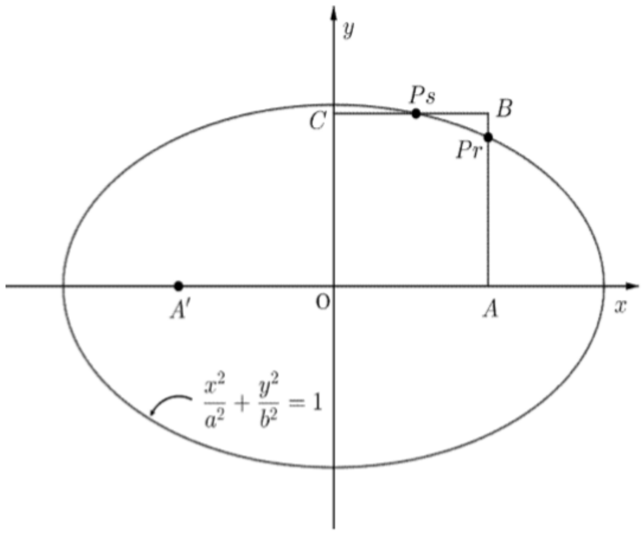
을 차례로 나열하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{4m+1}{4m+2},\ \frac{4m+2}{4m+3},\ \frac{4m+3}{4m+4},\ \frac{4m+4}{4m+5},\ \cdots$$

그러므로 함수 $f(r)$가 미분가능하지 않은 r의 집합은 다음과 같다.

$$\left\{\frac{n}{n+1}\,\middle|\,n=1,2,3,\cdots\right\}$$

논제 3.



조건 (ii)로부터 $\overline{\mathrm{A'P}_r}-\overline{\mathrm{A'P}_s}=\overline{\mathrm{AP}_r}-\overline{\mathrm{AP}_r}$이므로 P_r와 P_s는 두 점 A, A'을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있다. 여기서 $\overline{\mathrm{A'P}_r}+\overline{\mathrm{AP}_r}=\overline{\mathrm{AP}_r}+\overline{\mathrm{A'P}_s}=2a$, $b^2=a^2-1$이다. 한편, 두 초점이 $(-1,0)$, $(1,0)$이고, 조건 (i)로부터 P_r는 선분 AB위에 있고, P_s는 선분 BC위에 있다. 따라서 타원이 점 C를 지날 때 r이 구하고자 하는 최솟값이다. 점 C를 지나는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$이고, 점 P_r의 y좌표는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. P_r의 y좌표는 $\frac{r}{1-r}-1$이므로 $\frac{r}{1-r}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 구하는 최솟값은 $r=\frac{3+\sqrt{2}}{7}$이다.

16 단국대학교 수시(오후)[16)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(2문항, 6문제)	120분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 기호로 $\vec{a} \cdot \vec{b}$와 같이 나타낸다. 즉,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$일 때, 다음 식이 성립한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

(나) 표본공간 S에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 확률은 $\dfrac{n(A)}{n(S)}$이다.

(다) 연속함수는 여러 가지 좋은 성질을 가지고 있다. 예를 들면,
(1) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$는 항상 최댓값과 최솟값을 가진다.
(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

16) 단국대학교 홈페이지

[논제 1] 좌표공간에서 점 $\mathrm{C}(0, 0, a)$를 중심으로 하고 점 $\mathrm{A}(a, 0, 0)$을 지나는 구가 직선 $l : x=t, y=2t, z=t+a$와 만나는 두 점 중에서 z좌표의 값이 큰 점을 B라 하자. B에서 y축에 내린 수선의 발을 B' 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{BO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BB}'} = 10+4\sqrt{3}$$

를 만족시킨다. 이때 a의 값을 구하시오. (단, $a>0$이고, O는 원점이다.) (15점)

[논제 2] 자연수 $n\,(n=2, 3, 4, \cdots, 20)$에 대하여 집합 A_n, A, B를 다음과 같이 정의하자.

$A_n = \{(m, k) \mid m+k=n,\ m, k\text{는 자연수}\}$

$A = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{20}$

$B = A - \{(m, k) \in A_{20} \mid m>k\}$

집합 B에서 한 개의 원소 (m, k)를 택할 때, $m+k \geq a\,(a=2, 3, 4, \cdots, 20)$일 확률을 P_a라 하자. 이때 $\mathrm{P}_a < \dfrac{1}{2}$이 되는 a의 최솟값을 구하시오. (15점)

[논제 3] 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 실수 $t\,(0 \leq t \leq 2)$에 대하여 직선 $y=f(t)$, 곡선 $y=f(x)$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $s(t)$라 하자. 함수 $s(t)$가 최소가 되는 t의 값을 구하시오. (15점)

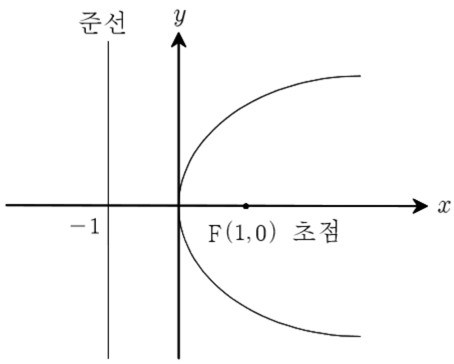
[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$이고 준선이 $x = -p$인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4px \ (p \neq 0)$$

이고, 포물선 $y^2 = 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(나) 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$위의 점 $(a, f(a))$에서 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

이고, 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라 할 때

$$f'(a) = \tan\alpha$$

이다.

(다) 함수 $y = \tan x$는 아래와 같은 성질을 갖는다.

(1) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$, 특히 $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

(2) $\tan x$는 주기가 π인 함수이다.

(3) $\displaystyle\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$ (단, C는 적분상수)

(라) 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때 다음이 성립한다.

(1) [치환적분법]

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

(2) [부분적분법]

$$\int f(x)g'(x)dx = f()g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

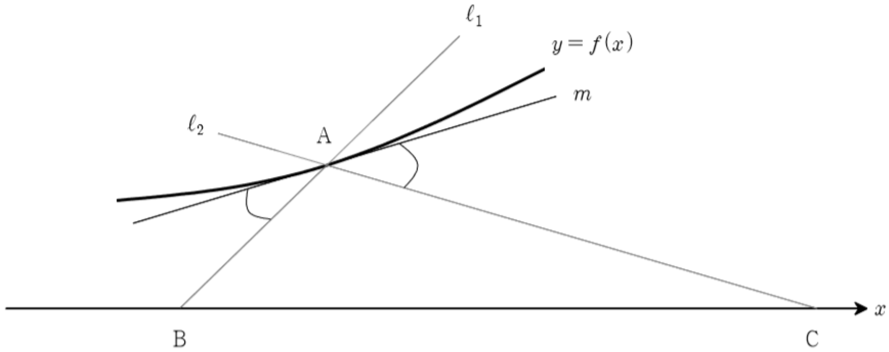
[논제 1] 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B, 준선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 일 때, A의 좌표를 구하시오. (단, $b>0$) (15점)

[논제 2] 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 D에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 43°라 하자. 포물선의 초점 F와 점 D를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하시오. (15점)

[논제 3] 실수 $x\ (x\neq 0)$에 대하여 $0<f'(x)<1$이고 $f'(0)=0$인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 $a\left(0<a\leq \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$에서의 접선 m과 점 A를 지나는 두 직선 l_1, l_2는 다음 조건을 만족시킨다.

> (i) l_1의 기울기가 1이다.
> (ii) m과 l_1이 이루는 각의 크기와 m과 l_2가 이루는 각의 크기가 서로 같다.
> (iii) l_1이 x축과 만나는 점을 $\mathrm{B}(b, 0)$, l_2가 x축과 만나는 점을 $\mathrm{C}(c, 0)$라 할 때
> $$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2f(a)}{1-\tan(\sin a)}$$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx$을 구하시오. (단, $f(0)=0$) (15점)



• 풀어보기

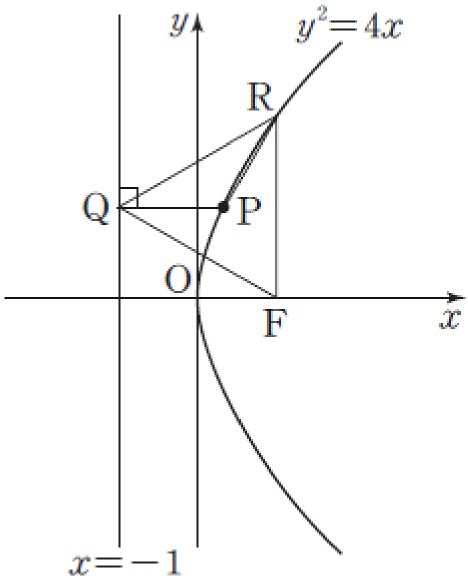
문제1. 좌표공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|^2$의 최댓값은 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

(2018. 대수능)

문제2. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 이 포물선 위의 점 R가

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}},\ \angle\mathrm{FRQ}=60°$$

를 만족시킬 때, 선분 QF의 길이는 k이다. $3k^2$의 값을 구하시오.



• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 136

구 $x^2+y^2+z^2=6$의 중심을 O$(0, 0, 0)$이라 하고, 원 C의 중심을 C라 하면, 원점 O에서 평면 $x+2z-5=0$에 내린 수선의 발이 점 C이다. 평면 $x+2z-5=0$의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면, $\vec{n}=(1, 0, 2)$이므로 원점 O를 지나고 평면 $x+2z-5=0$에 수직인 직선의 방정식은 $\frac{x}{1}=\frac{z}{2}, y=0$이다.

$\frac{x}{1}=\frac{z}{2}=t$ (t는 실수)라 하면 $x=t$, $z=2t$이므로 이를 $x+2z-5=0$에 대입하면 $t+4t-5=0$에서 $t=1$이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(1, 0, 2)$이다. 한편, 원점 O와 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

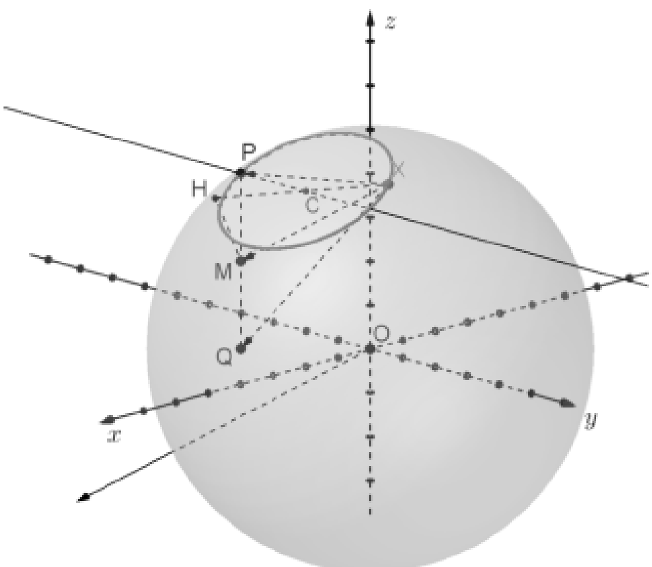
$$d_1=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

이므로 원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=1$

이때 평면 $x+2z-5=0$은 y축과 평행하므로 원 C도 y축과 평행하다. 따라서 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선과 원 C가 만나는 두 점 중 y좌표가 작은 점이 점 P이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(1, -1, 2)$이고, 점 Q의 좌표는 $(1, -1, 0)$이다.

한편, $|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|=|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|$이므로 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|=2|\overrightarrow{XM}|$이다.



점 M의 좌표는 $(1, -1, 1)$이다. 점 M과 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$d_2 = \dfrac{|1+2-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이다. 따라서 점 M에서 평면 $x+2z-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{\mathrm{MH}} = d_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{HC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{MC}}^2 - \overline{\mathrm{MH}}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\dfrac{2}{\sqrt{5}})^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

이때 원 C위의 점 X에 대하여 $\overline{\mathrm{HX}}$의 최댓값은 $\overline{\mathrm{HC}}+1 = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}+1$ 이므로

$\overline{\mathrm{MX}}^2$의 최댓값은 $\overline{\mathrm{MH}}^2 + (\overline{\mathrm{HC}}+1)^2 = \dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{5}+\dfrac{2\sqrt{30}}{5}+1 = 3+\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$ 이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{XP}}+\overrightarrow{\mathrm{XQ}}|^2 = 4|\overrightarrow{\mathrm{XM}}|^2$의 최댓값은 $4\left(3+\dfrac{2\sqrt{30}}{5}\right) = 12+\dfrac{8\sqrt{30}}{5}$ 이므로

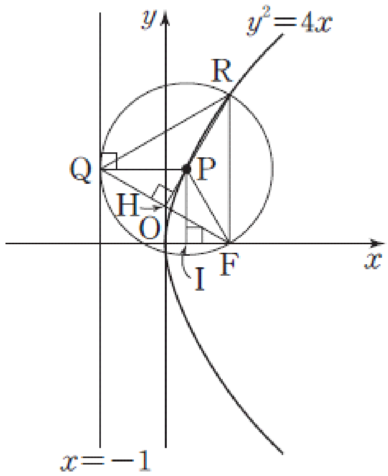
$a=12,\ b=\dfrac{8}{5}$

따라서 $10(a+b) = 120+16 = 136$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 16

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 F$(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

그림과 같이 점 P에서 선분 QF에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PR}}$ 이고, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}}$ 이므로 세 점 Q, F, R는 점 P를 중심으로 하는 원 위의 점이다.

$\angle\mathrm{FRQ} = 60°$ 이므로 원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{FPQ} = 120°$ 이다.

$\angle\mathrm{FPI} = 120° - 90° = 30°$ 이므로 $\overline{\mathrm{IF}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}$ 이다.

$$\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{IF}} = \overline{\mathrm{PF}}+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{PF}} = 2$$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}} = \dfrac{4}{3}$ 이다.

삼각형 PHF 에서 $\angle \mathrm{HFP} = 30°$ 이므로

$$\overline{\mathrm{HF}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{PF}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서

$$k = \overline{\mathrm{QF}} = 2\overline{\mathrm{HF}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

이므로

$$3k^2 = 3\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 16$$

[문제1] 대학발표 예시답안

논제 1.

점 B 의 좌표를 (x_0, y_0, z_0)라 하면, $\mathrm{B}'(0, y_0, 0)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{BO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BB}'} = 10+4\sqrt{3}$ 로부터

$$x_0^2 + y_0^2 = 10 + 4\sqrt{3} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

을 얻는다. 점 B 가 직선 l 위의 점이므로

$$x_0 = t_0,\ y_0 = 2t_0,\ z_0 = t_0 + a$$

로 나타낼 수 있다. 또한, 점 B 가 구 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 2a^2$ 위의 점이므로 $t_0^2 = \frac{1}{3}a^2$ 이다.

점 B 의 z 좌표에 대한 조건으로부터 $t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}a$ 이고, 따라서

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}a,\ z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}a + a$$

를 ①에 대입하면, $a = \sqrt{6}$ 이다.

논제 2.

집합 B의 원소를 나열하면 다음과 같다.

$(1, 1)$

$(1, 2), (2, 1)$

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$

$\vdots$

$(1, 18), (2, 17), (3, 16), \cdots\cdots\cdots\cdots, (18, 1)$

$(1, 19), (2, 18), (3, 17), \cdots\cdots, (10, 10)$

따라서 $2 \le n \le 19$ 인 자연수 n에 대하여 A_n 의 원소의 개수는 각각 $n-1$ 이고, 이에 따라 집합 B의 원소의 개수는 다음과 같다.

$$\left(\sum_{i=1}^{18} i\right) + 10 = 171 + 10 = 181$$

한편, $m+k \le 14$ 인 B의 원소의 개수는 $\sum_{i=1}^{13} i = 91$ 이므로 $m+k \ge 15$ 인 집합 B의 원소의 개수는 90이다. 따라서 $\mathrm{P}_{15} = \frac{90}{181}\left(< \frac{1}{2}\right)$이고 $\mathrm{P}_{14} > \frac{1}{2}$ 이므로 구하는 a의 최솟값은 15이다.

논제 3.

영역의 넓이 $s(t)$는

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t [f(t)-f(x)]dx + \int_t^2 [f(x)-f(t)]dx \\ &= \int_0^t f(t)dx - \int_0^t f(x)dx - \int_2^t f(t)dx - \int_t^2 f(x)dx \\ &= tf(t) - \int_0^t f(x)dx - \int_2^t f(x)dx - (2-t)f(t) \end{aligned}$$

이고 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}s(t) &= f(t) + tf'(t) - f(t) - f(t) + f(t) + (t-2)f'(t) \\ &= 2(t-1)f'(t) \end{aligned}$$

$f'(t) > 0$ 이므로 $s(t)$의 증감을 조사하면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$s'(t)$	-	-	0	+	+
$s(t)$		↘	극소(최소)	↗	

구간 $[0, 2]$에서 $t=1$일 때 $s(t)$가 최소가 된다.

[문제2] 대학발표 예시답안

논제 1.

점 $\mathrm{A}(a, b)$는 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점이므로 $b^2 = 4a$에서 $b = 2\sqrt{a}$ 이다. 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, 2\sqrt{a})$에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}}x + \sqrt{a}$$

이 접선과 x축이 만나는 점 B는 $(-a, 0)$이고, 준선과 만나는 점 C는 $\left(-1,\ \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 이다. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$ 이므로 $(-2a)^2 + (-2\sqrt{a})^2 = (a-1)^2 + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$에서 $a = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$이다.

논제 2.

$\alpha=43^\circ$라 하고, 포물선 $y^2=4x$의 초점 F와 점 D(a, b)를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라 하자.

점 D(a, b)에서 포물선 $y^2=4x$의 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{\sqrt{a}}x+\sqrt{a}$ 이므로,

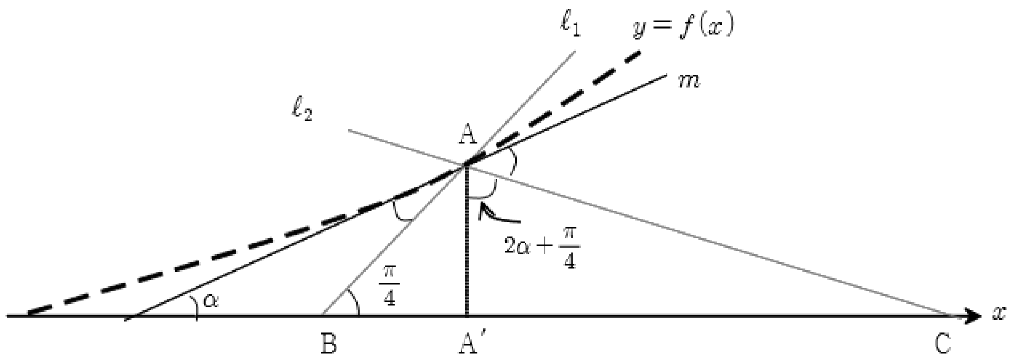
$$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ 즉 } \sqrt{a}=\frac{1}{\tan\alpha} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. $\tan\beta$는 F$(1, 0)$과 D(a, b)를 지나는 직선의 기울기이므로

$$\tan\beta=\frac{b}{a-1}=\frac{2\sqrt{a}}{a-1} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

이다. ①을 ②에 대입하면, $\tan\beta=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan 2\alpha$ 이므로 $\beta=2\alpha=86^\circ$ 이다.

논제 3.



점 A에서 곡선 $y=f(x)$의 접선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라 할 때 $f'(a)=\tan\alpha$이고 $0<f'(x)<1$이므로

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. 또한 A에서 x축에 내린 수선의 발을 A′라 할 때

$$\angle \mathrm{A'AC}=2\alpha+\frac{\pi}{4}, \ \overline{\mathrm{AA'}}=\overline{\mathrm{BA'}}=f(a)$$

이고

$$\overline{\mathrm{A'C}}=f(a)\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=f(a)\frac{1+\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha}$$

이다. 조건 (iii)으로부터

$$\frac{2f(a)}{1-\tan(\sin a)}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BA'}}+\overline{\mathrm{A'C}}$$

가 성립하고 $\tan(\sin a)=\tan 2\alpha$를 얻는다. 따라서

$$2\alpha=\sin a+k\pi \ (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

이다. ①로부터 $\alpha=\frac{1}{2}\sin a$ 이므로 $f'(a)=\tan\alpha=\tan\left(\frac{\sin a}{2}\right)$를 얻는다.

그러므로 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f'(x)=\tan\left(\frac{\sin x}{2}\right)$이다.

이제 $f(0)=0$ 이므로 부분적분에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx &= [-f(x)\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\tan\left(\frac{\sin x}{2}\right)\right]\cos x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\tan t\,dt \\ &= -2\ln\cos\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다.

17 부산대학교(자연계) 모의[17]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	한국사 제외한 4개 영역 중 수학(가) 포함 3개 영역 등급 합 7 이내 & 한국사 4등급 이내	수학 (3문항, 7문제)	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오. (30점)

(가) 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$라 할 때, 두 공간벡터의 내적은 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이다.

(나) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$를 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

직선 $l : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{z-3}{3}$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 2\sqrt{3},\ 3)$에서 직선 l에 접하고 반지름이 2인 구들을 생각하자. 원점을 O라 하고 이러한 구 위의 점들 중 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 20$을 만족하는 점을 P라고 하자.

논제 1-1. 위 조건을 만족하는 점 P가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오. (15점)

논제 1-2. 점 P가 나타내는 영역을 포함하는 평면의 방정식을 구하시오. (15점)

17) 부산대학교 홈페이지

[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오. (35점)

(가) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 증명하면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(나) (1) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수에 대하여 연속일 때, $f(x)$를 그 구간에서 연속 또는 연속함수라고 한다.

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ (단, $a \le x \le b$)이다.

(라) 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$ 이다.

(마) 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는 $V=\int_a^b S(x)\,dx$ (단, $S(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속)이다.

논제 2-1. 정의역이 $(0,\ \infty)$인 함수 $f(x)$가 $f(x^2)=\frac{f(x)}{x}$를 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여 $f(x)=\frac{f\left(x^{2^{-n}}\right)}{x^{1-2^{-n}}}$이 성립함을 제시문 (가)를 이용하여 보이시오. (15점)

논제 2-2. 논제 1의 결과를 이용하여 정의역 $(0,\ \infty)$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)=1,\ \int_1^{x^2} g(t)\,dt = \int_{x^2}^{x^4} g(t)\,dt$을 만족시키는 함수 $g(x)$를 구하시오. (10점)

논제 2-3. 논제 2에서 구한 $g(x)$와 두 직선 $x=\frac{1}{e}$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축 위의 $x=\frac{1}{t}$ $(1 \le t \le e)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 밑변이 밑면에 있고 높이가 $\ln t$인 삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오. (10점)

[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오. (40점)

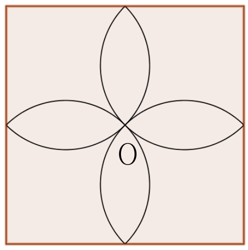
(가) 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

(나) 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 하고, 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

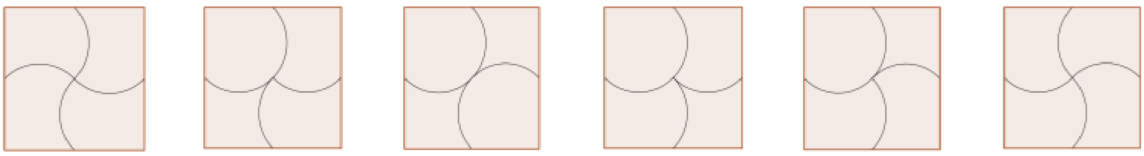
(다) 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났다는 조건하에서 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(B|A)$와 같이 나타내고,

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \qquad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0)$$

그림과 같이 넓이가 1인 정사각형 모양의 타일이 있다. 이 타일의 이웃하는 변의 중점을 지름의 양 끝으로 하는 반원을 그릴 때, 네 반원의 교점을 O라 하자. 각 변의 중점과 점 O를 끝점으로 하는 두 개의 호 중에서 하나의 호를 각각 선택하면 다음과 같은 6개의 서로 다른 무늬의 타일을 만들 수 있다. (회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보고, 뒤집는 경우는 생각하지 않는다.)



i) ii) iii) iv) v) vi)



논제 3-1. 빨간색, 노란색, 파란색, 초록색의 네 가지 색을 이용하여 위에서 만든 각 타일의 네 개의 영역을 각각 다른 색으로 칠하려고 한다. 이와 같은 방법으로 만들 수 있는 서로 다른 타일의 종류는 몇 가지인지 구하여라. (20점)

논제 3-2. 논제 3-1에서 만든 타일 중 하나를 선택하였더니, $\frac{1}{4}$보다 큰 넓이를 차지하는 색이 존재하였다. 이때 선택된 타일의 빨간색, 노란색 영역의 넓이가 서로 같을 확률을 구하여라. (15점)

• 풀어보기

문제 1. 좌표공간에서 중심이 원점이고 직선 $x+1=2-y=z$ 와 서로 다른 두 점 A, B 에서 만나는 구와 이 구 위를 움직이는 점 P 가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ 이 성립할 때, 점 P 가 나타내는 도형의 길이는? (2011. 전국연합)

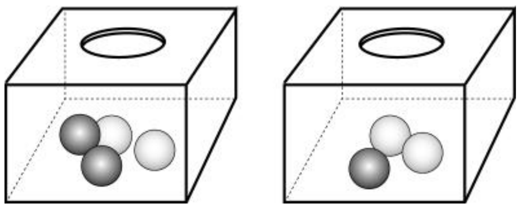
① π ② 2π ③ $2\sqrt{2}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ 4π

문제 2.
두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$g\left(e^x\right) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ g\left(e^{x-1}\right)+5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2+4$ 이다. $\int_1^e f(\ln x)\,dx = ae+b$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이다.) (2013. 모의평가)

문제 3. 크기와 모양이 같은 공이 상자 A에는 검은 공 2개와 흰 공 2개, 상자 B에는 검은 공 1개와 흰 공 2개가 들어 있다. 두 상자 A, B 중 임의로 선택한 하나의 상자에서 공을 1개 꺼냈더니 검은 공이 나왔을 때, 그 상자에 남은 공이 모두 흰 공일 확률은? (2013. 전국연합)



상자 A 상자 B

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|^2$$

에서 $|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|$이므로 점 P는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 구의 교선인 원 위에 있다.

이때, 이 원의 반지름의 길이는 구의 중심과 직선 AB 사이의 거리와 같다.

한편, 원점 O에서 직선 $x+1=2-y=z$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(t-1,\ 2-t,\ t)$라 하면

$$(t-1,\ 2-t,\ t)\cdot(1,\ -1,\ 1)=0$$

$$\therefore\ t=1$$

즉, $\mathrm{H}(0,\ 1,\ 1)$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2}$이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$이다.

풀어보기(문제2) 정답 17

$e^x=y$로 놓으면 $x=\ln y$

$$g(y)=\begin{cases} f(\ln y) & (1\le y\le e) \\ g\left(\dfrac{y}{e}\right)+5 & (e\le y\le e^2) \end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(y)\,dy=\int_1^e f(\ln y)\,dy+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{y}{e}\right)+5\right\}dy=6e^2+4$$

이때, $\displaystyle\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{y}{e}\right)+5\right\}dy$에서 $\dfrac{y}{e}=t$로 놓으면 $dy=e\,dt$

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{y}{e}\right)+5\right\}dy&=e\int_1^e g(t)\,dt+e\int_1^e 5\,dt\\&=e\int_1^e g(t)\,dt+5e(e-1)\\&=e\int_1^e f(\ln t)dt+5e(e-1)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} g(y)\,dy&=\int_1^e f(\ln y)\,dy+e\int_1^e f(\ln y)dy+5e(e-1)\\&=(e+1)\int_1^e f(\ln y)dy+5e^2-5e\\&=6e^2+4\end{aligned}$$

$$(e+1)\int_1^e f(\ln y)\,dy=e^2+5e+4$$

$$(e+1)\int_{1}^{e} f(\ln y)\,dy = (e+1)(e+4)$$

$$\therefore \int_{1}^{e} f(\ln y)\,dy = e+4$$

따라서 $a=1, b=4$이므로 $a^2+b^2=17$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 ②

임의로 선택한 상자에서 공을 한 개 꺼낼 때, 상자 A에서 공을 꺼낼 사건을 X, 상자 B에서 공을 꺼낼 사건을 Y, 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 Z라 하면 구하는 확률은

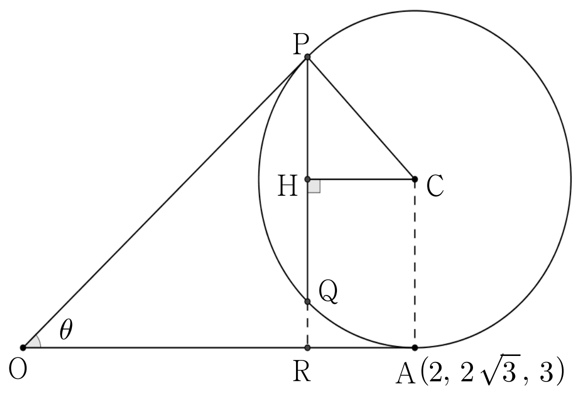
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y|Z) &= \frac{\mathrm{P}(Y\cap Z)}{\mathrm{P}(Z)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(Y\cap Z)}{\mathrm{P}(X\cap Z)+\mathrm{P}(Y\cap Z)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

대학발표 예시답안

논제 1-1.

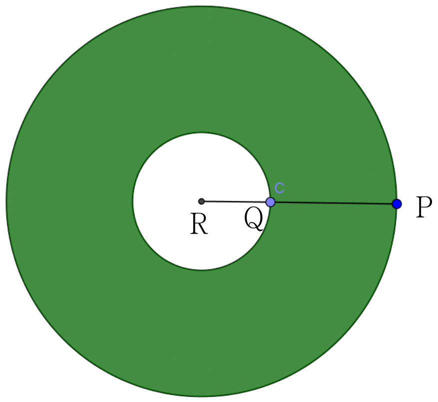
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=5$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=20$이므로

제시문 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$



그림에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=20$, 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=4$이다.

그러므로 점 P가 그리는 자취는 점 R을 중심으로 하고 반지름이 $\overline{\mathrm{PR}}$인 원의 내부와 반지름이 $\overline{\mathrm{QR}}$인 원의 외부의 공통부분이다.



$$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}} = 2-\sqrt{3},\quad \overline{\mathrm{PR}} = 2+\sqrt{3}$$

따라서, $\mathrm{S} = \pi\{(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2\} = 8\sqrt{3}\pi$

논제 1-2.

구하는 평면의 방정식은 점 R을 지나고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 법선벡터로 하는 평면의 방정식이다.

$\overline{\mathrm{OR}} = 4$이므로 점 R의 좌표는 $\mathrm{R}\left(\frac{8}{5},\ \frac{8}{5}\sqrt{3},\ \frac{12}{5}\right)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,\ 2\sqrt{3},\ 3)$이므로 제시문 (나)에 의하여 구하는 평면의 방정식은

$$2\left(x-\frac{8}{5}\right) + 2\sqrt{3}\left(y-\frac{8}{5}\sqrt{3}\right) + 3\left(z-\frac{12}{5}\right) = 0$$

$$\therefore\ 2x + 2\sqrt{3}\,y + 3z = 20$$

논제 2-1.

(i) $f(x^2) = \dfrac{f(x)}{x}$의 x에 $x^{\frac{1}{2}}$을 대입하면

$$f(x) = \frac{f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}} \qquad \cdots ①$$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{f\left(x^{2^{-1}}\right)}{x^{1-2^{-1}}}$ 이므로 $n=1$일 때는 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $f(x) = \dfrac{f\left(x^{2^{-n}}\right)}{x^{1-2^{-n}}}$가 성립한다고 하자. (즉, $f(x) = \dfrac{f\left(x^{2^{-k}}\right)}{x^{1-2^{-k}}}$)

x에 $x^{\frac{1}{2}}$을 대입하면 $f\left(x^{2^{-1}}\right) = \dfrac{f\left(\left(x^{2^{-1}}\right)^{2^{-k}}\right)}{\left(x^{2^{-1}}\right)^{1-2^{-k}}}$

$$\therefore\ f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{f\left(x^{2^{-(k+1)}}\right)}{x^{2^{-1}-2^{-(k+1)}}}$$

①에서 $f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=x^{\frac{1}{2}}f(x)$이므로 $x^{\frac{1}{2}}f(x)=\dfrac{f\left(x^{2^{-(k+1)}}\right)}{x^{\frac{1}{2}-2^{-(k+1)}}}$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{f\left(x^{2^{-(k+1)}}\right)}{x^{\frac{1}{2}-2^{-(k+1)}+\frac{1}{2}}}=\dfrac{f\left(x^{2^{-(k+1)}}\right)}{x^{1-2^{-(k+1)}}}$

즉, $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $f(x)=\dfrac{f\left(x^{2^{-n}}\right)}{x^{1-2^{-n}}}$ 이다.

논제 2-2.

$\int_1^{x^2}g(t)\,dt=\int_{x^2}^{x^4}g(t)\,dt$ 에서 제시문 [다]에 의해 $\dfrac{d}{dx}\int_1^{x^2}g(t)\,dt=\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^4}g(t)\,dt$이고

$2x\,g(x^2)=4x^3g(x^4)-2x\,g(x^2)$이다.

$$\therefore\ g(x^4)=\frac{g(x^2)}{x^2}\qquad\cdots\ ①$$

①의 x에 $x^{\frac{1}{2}}$을 대입하면 논제 2-1의 조건을 만족하고 논제 2-1의 결과에 의해

모든 자연수 n에 대하여 $g(x)=\dfrac{g\left(x^{2^{-n}}\right)}{x^{1-2^{-n}}}$ 이 성립한다.

또한, $g(x)$는 정의역 $(0,\infty)$에서 연속인 함수이므로 제시문 (나)와 $g(1)=1$에 의해

$$\therefore\ g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{g\left(x^{2^{-n}}\right)}{x^{1-2^{-n}}}=\frac{g(1)}{x}=\frac{1}{x}$$

이다.

논제 2-3.

x축 위의 $x=\dfrac{1}{t}\ (1\le t\le e)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 높이가

$\ln t$이고 밑변의 길이는 t인 직각 삼각형이다. 따라서 단면의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times t\times\ln t$이다.

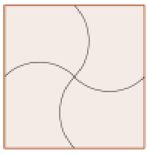
그리고 $dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$이므로 구하는 부피를 V라 하면 제시문 (라), (마)에 의해

$V=\dfrac{1}{2}\int_e^1 t\ln t\left(-\dfrac{1}{t^2}\,dt\right)=\dfrac{1}{2}\int_1^e\dfrac{\ln t}{t}\,dt$ 이다. $\ln t=u$라 하면 $\dfrac{1}{t}dt=du$이므로

$V=\dfrac{1}{2}\int_1^e\dfrac{\ln t}{t}\,dt=\dfrac{1}{2}\int_0^1 u\,du=\dfrac{1}{4}$ 이다.

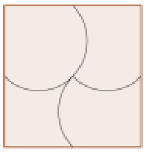
논제 3-1.

i)



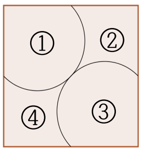
의 경우는 네 영역이 모두 같은 역할을 한다. 따라서 제시문 (나)에 의해서 서로 다른 타일의 종류는 빨간색, 노란색, 파란색, 초록색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같다. 즉, $(4-1)!=3!=6$(가지)

ii)



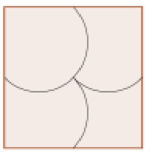
의 경우는 네 영역이 모두 다른 역할을 한다. 따라서 서로 다른 타일의 종류는 빨간색, 노란색, 파란색, 초록색을 순서 있게 나열하는 경우의 수와 같다. 즉 $4\times3\times2\times1=24$(가지)

iii)



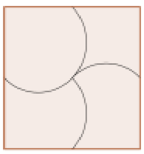
의 경우는 ①과 ③이, ②와 ④가 서로 같은 역할을 한다. 따라서 ①과 ②의 어느 하나의 타일에 빨간색을 칠한다고 생각하면 서로 다른 타일의 종류는 노란색, 파란색, 초록색을 순서 있게 나열하는 경우의 수와 같다. 즉, $2\times(3\times2\times1)=12$(가지)

iv)



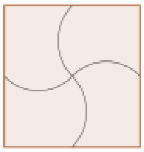
의 경우는 ii)의 경우와 같이 $4\times3\times2\times1=24$(가지)

v)



의 경우는 ii)의 경우와 같이 $4\times3\times2\times1=24$(가지)

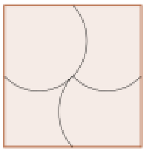
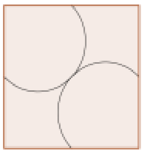
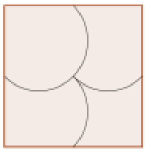
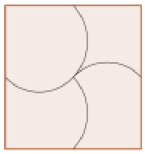
vi)



의 경우는 i)의 경우와 같이 $3\times2\times1=6$(가지)
그러므로 구하는 타일의 종류는 $6+24+12+24+24+6=96$, 96가지이다.

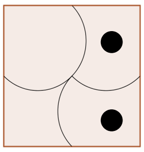
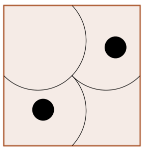
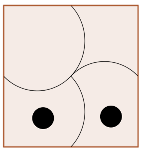
논제 3-2.

논제3-1)의 풀이에서 $\frac{1}{4}$ 보다 큰 넓이를 차지하는 색이 존재하는 경우는

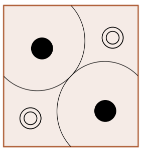
ii)  24가지, iii)  12가지, iv)  24가지, v)  24가지

총 84가지이다.

이 중 빨간색, 노란색 영역의 넓이가 서로 같은 경우의 수는 다음과 같다.

ii) , iv) , v)  의 경우는

●의 자리에 빨간색, 노란색이 칠해지고 ●이 아닌 자리에 파란색, 초록색이 칠해지면 된다.
따라서 $3\times(2\times2)=12$(가지)

iii)  의 경우는

●의 자리에 빨간색, 노란색이 칠해지거나, ◎의 자리에 빨간색, 노란색이 칠해지면 된다.
따라서 $2\times2=4$(가지)

그러므로 구하는 확률은 제시문 (다)에 의해서 $\dfrac{\frac{12+4}{96}}{\frac{84}{96}}=\dfrac{16}{84}=\dfrac{4}{21}$ 이다.

18 부산대학교(의학계) 모의[18)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 과학탐구 3개 영역 등급 합 4 이내 & 영어 2등급 이내 & 한국사 4등급 이내	수학 (3문항, 7문제)	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오. (30점)

(가) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$와 $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 이루는 각의 크기가 θ일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

(나) 좌표공간에서 중심이 $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=r^2$$

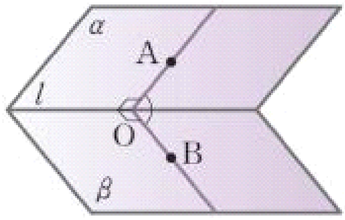
(다) 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$를 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

(라) 좌표공간의 점 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$에서 평면 $ax+by+cz+d=0$까지 거리 h는

$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(마) 오른쪽 그림과 같이 한 직선 l에서 만나는 두 반평면 α, β로 이루어지는 도형을 이면각이라 하고, 교선 l을 이면각의 변, 두 반평면을 각각 이면각의 면이라고 한다. 이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 α, β 위에 각각 그으면 각 AOB는 점 O의 위치에 관계없이 크기가 일정하다. 이때 이 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다.



18) 부산대학교 홈페이지

논제 1-1. 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구를 S라 할 때, S 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$에서 S와 접하는 평면의 방정식을 구하여라. (10점)

논제 1-2. 원점을 지나는 평면 중에서 구 $x^2+y^2+(z+3)^2=4$와의 교선의 길이가 $2\sqrt{3}\pi$이고, xz-평면과의 이면각의 크기가 60°인 평면의 방정식을 구하여라. (20점)

[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오. (35점)

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
1) 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.
2) 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

(다) 함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여
1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

(라) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

(마) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(바) 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f'(g(t))g'(t)\,dt$$

함수 $f(x)=\ln(x^2+1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선의 방정식을 $y=g_t(x)$라 할 때, 다음 논제에 답하시오. (단, t는 실수)

논제 2-1. 구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f'(x)$의 최솟값과 최댓값을 구하시오. (5점)

논제 2-2. 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=g_1(x)$, $y=g_{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (15점)

논제 2-3. 함수 $f(x)-g_t(x)$의 극솟값을 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$를 구하시오. (단, $t\neq\pm1$) (15점)

[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오. (40점)

(가) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \text{ (단, } 0 \le r \le n)$$

(나) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \text{ (단, } 0 \le r \le n)$$

(다) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r = n^r$$

(라) 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, 확률분포는

$$P(X=r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r} \text{ (단, } r=0, 1, \cdots, n)$$

4종류의 영문자 A, B, C, D가 무작위로 반복되어 일렬로 나열되어 있다. 이때 4개의 영문자는 동일한 확률로 나타난다고 가정하자. 여기서 5개의 영문자로 구성된 하나의 조각을 총 n개를 뽑아서 다시 일렬로 배열하였다. 즉, 총 나열된 영문자의 수는 $5n$개이다. (단, n은 큰 자연수이다.)

(예)

$CACBA$	$DDABB$	$BDACA$	……	$DACCD$

논제 3-1. 총 n개의 조각에서 하나의 조각 안에 동일한 영문자가 3개 이상 나타나는 조각의 수가 단 한 개도 없을 확률을 P라고 하자. 그리고 동일한 영문자가 연속해서 3개 이상 나타나는 조각의 수가 적어도 한 개 이상일 확률을 Q라고 하자. $P+Q$의 값을 n을 사용한 식으로 표현하시오. (15점)

논제 3-2. 각 조각마다 동일한 영문자가 3개 이상 나타나지 않았다고 가정하자. 총 $5n$개의 영문자가 나열되었을 때 두 개의 연속된 조각에서 동일한 영문자가 연속해서 4개가 나타날 수는 있다. 예를 들면 첫 번째 조각의 마지막 두 개의 영문자가 'AA'이고 두 번째 조각의 첫 번째 두 개의 영문자가 'AA'일 경우 '$AAAA$'가 나타난다. 이처럼 연속된 4개의 동일한 영문자가 정확하게 $n-1$회 나타날 경우의 수는 2^p3^q이다. p와 q를 각각 n을 사용한 식으로 표현하시오. (20점)

• 풀어보기

문제 1. 곡선 $y=e^x-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, e-1)$에서의 접선을 l이라 하자. 이때, 곡선 $y=e^x-1$과 y축, 접선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는? (2011. 전국연합)

① $\frac{e}{2}-1$ ② $e-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $e-1$ ⑤ $\frac{e}{2}+1$

문제 2. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? (2012. 전국연합)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

문제 3. 다섯 개의 문자 a, b, c, d, e를 모두 사용하여 만든 다섯 자리 문자열 중에서 다음 세 조건을 만족시키는 문자열의 개수를 구하시오. (예를 들어 $cedba$는 조건을 만족시키지만 $cabed$는 조건을 만족시키지 않는다.) (2009. 전국연합)

(가) 문자 a의 바로 다음 자리에 문자 b가 올 수 없다.
(나) 문자 b의 바로 다음 자리에 문자 c가 올 수 없다.
(다) 문자 c의 바로 다음 자리에 문자 a가 올 수 없다.

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ①

$y=e^x-1$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, e-1)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-(e-1)=e(x-1)$ $\therefore\ y=ex-1$

따라서 곡선 $y=e^x-1$과 y축, 접선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 (e^x-ex)\,dx=\frac{e}{2}-1$$

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

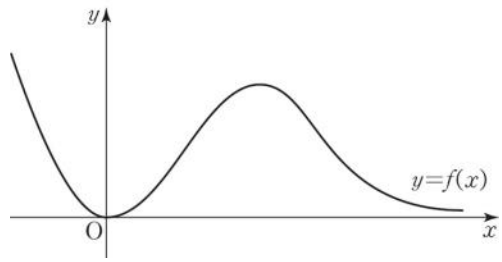
$f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$에서

$$f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=kx(2-x)e^{-x}$$

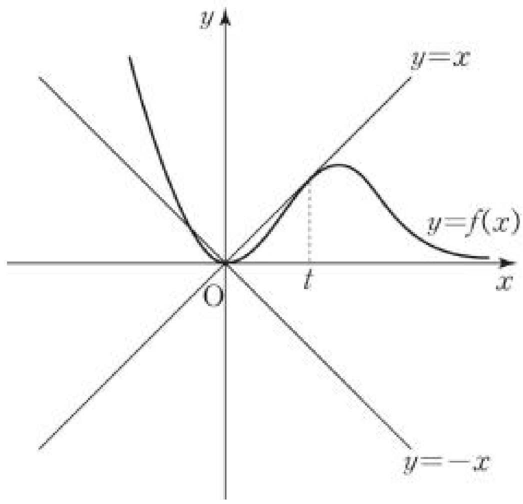
이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이다.

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4k}{e^2}$	$\searrow$



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값이 $g(t)$이므로 곡선 $y=f(x)$가 두 직선 $y=x$, $y=-x$와 만나는 점을 찾는다.



이때, 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않으려면 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면

$$kt^2e^{-t}=t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=t$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$kt(2-t)e^{-t}=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $2-t=1$

$\therefore\ t=1 \qquad \therefore\ k=e$

따라서 구하는 k의 최댓값은 e이다.

풀어보기(문제3) 정답 66

다섯 개의 문자 a, b, c, d, e를 모두 사용하여 만드는 문자열의 개수는 $5!=120$

조건 (가)에서 문자 a의 바로 다음 자리에는 문자 b가 올 수 없으므로 ab가 포함되는 문자열 $4!=24$개를 뺀다.

같은 방법으로 문자 b의 바로 다음에 문자 c, 문자 c의 바로 다음에 문자 a가 오는 경우도 각각 24개씩이다.

그런데, abc, bca, cab가 포함되는 문자열의 경우 중복되어 제외되므로 각각의 경우의 수 $3!=6$을 더해준다.

따라서 구하는 문자열의 개수는

$$120-24\times3+6\times3=66$$

대학발표 예시답안

논제 1-1.

(다)에 의해 길이가 1인 단위벡터 $\vec{n}=(n_1, n_2, n_3)$에 수직이고 구 위의 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$를 지나는 평면의 방정식은 $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$이다.

평면 위의 점 (x, y, z)의 위치벡터를 $\vec{X}$, 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$의 위치벡터를 $\vec{P}$라 하면 평면의 방정식은 $\vec{n}\bullet(\vec{X}-\vec{P})=0$로 쓸 수 있다.

평면과 구가 점 $P(x_0, y_0, z_0)$에서 접하므로, 원점 O에서 평면 $\vec{n}\bullet(\vec{X}-\vec{P})=0$까지 거리는 1임과 $|\vec{n}|=1$임을 알고, (라)를 적용하면 $|\vec{n}\bullet(-\vec{P})|=1$이고,

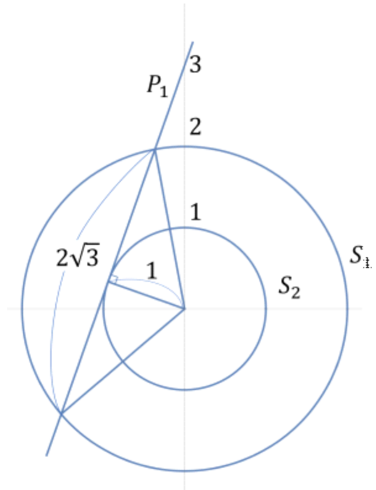
(가)에 의해 $|\vec{n}||\vec{P}|\cos\theta=\pm1$이고 $|\vec{n}|=1$, $|\vec{P}|=1$이므로 $\cos\theta=\pm1$을 얻을 수 있다.

그러므로 $\vec{n}=\pm\vec{P}$이고 구하고자 하는 평면의 방정식은 $\vec{P}\bullet(\vec{X}-\vec{P})=0$

또는 $x_0x+y_0y+z_0z-1=0$ 이다.

논제 1-2.

평행이동에 의해 문제에서 주어진 구와 평면을 반지름이 2이고 중심이 원점인 구 S_1과 $(0, 0, 3)$을 지나고 S_1과의 교선의 길이가 $2\sqrt{3}\pi$인 평면 P_1로 가정할 수 있다.



평면 P_1은 원점으로부터 거리가 1인 평면이므로 원점이 중심이고 반지름이 1인 구 S_2와 접하는 것을 알 수 있다.

구 S_2 위의 점 (x, y, z)에서 접평면에 수직인 벡터는 (x, y, z)이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{cases}(x, y, z)\cdot(x, y, z-3)=0 \\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면 $z=\frac{1}{3}$을 얻고 접평면에 수직인 벡터는 매개변수 t를 이용하여 $(x, y, z)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos t, \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin t, \frac{1}{3}\right)$로 쓸 수 있다. 이면각의 크기가 60°이므로 이면각의 면을 포함하는 두 평면의 수직인 벡터 사이의 각은 60°와 120°이므로

$(x, y, z)\cdot(0, 1, 0)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin t=\pm\frac{1}{2}$이고 $\sin t=\pm\frac{3}{4\sqrt{2}}$, $\cos t=\pm\frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}}$을 얻을 수 있다.

그러므로 접평면에 수직인 네 개의 벡터는 $(x, y, z)=\left(\pm\frac{\sqrt{23}}{6}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$이고

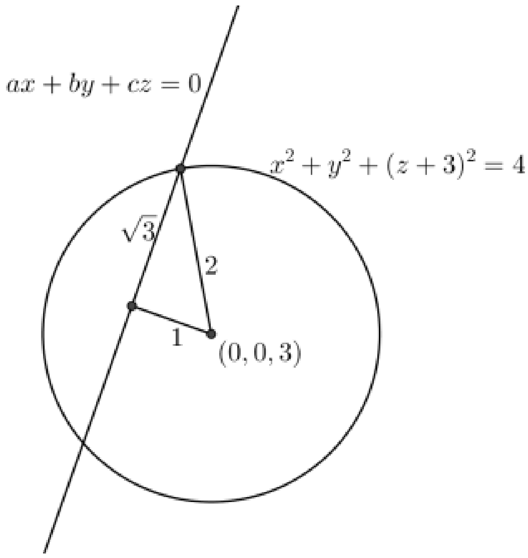
접평면의 방정식은 $\pm\frac{\sqrt{23}}{6}x\pm\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}(z-3)=0$이다.

z축으로 3만큼 평행이동하면 $\pm\frac{\sqrt{23}}{6}x\pm\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=0$(복부호 동순 아님)이다.

(나침반 다른 풀이)

구하고자 하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz=0$이라 하면 다음 그림에서와 같이 구의 중심에서 평면 $ax+by+cz=0$까지의 거리는 1이다. 따라서 $\frac{|-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$, 즉

$$9c^2=a^2+b^2+c^2 \qquad \cdots\cdots \quad ①$$



한편, xz-평면과의 이면각의 크기가 60°이고 xz-평면의 법선벡터를 $(0,\ 1,\ 0)$이라 하면 $(0,\ 1,\ 0)\bullet(a,\ b,\ c)=1\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\cos 60^\circ$, 즉

$$4b^2=a^2+b^2+c^2 \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

①, ②를 연립하면 $b=\pm\frac{3}{2}c$, $a=\pm\frac{\sqrt{23}}{2}c$이다. 따라서 평면의 방정식은

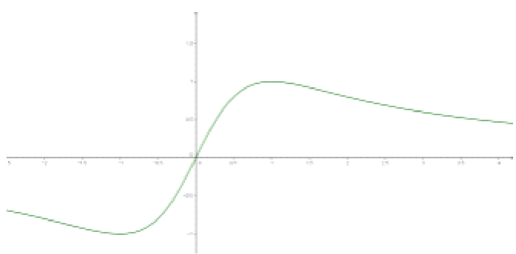
$$\pm\frac{\sqrt{23}}{2}x\pm\frac{3}{2}y+z=0 \text{ (복부호 동순이 아님)}$$

논제 2-1.

$f(x)=\ln(x^2+1)$에서 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$이고, 함수 $f'(x)$는 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이므로 제시문 (나)에 의해 최댓값과 최솟값을 가진다.

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=0$에서 $x=\pm1$이므로 함수 $f'(x)$는 $x=\pm1$에서 극값을 가진다. 함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 곡선 $y=f'(x)$의 그래프는 아래와 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	↘	-1	↗	1	↘
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$



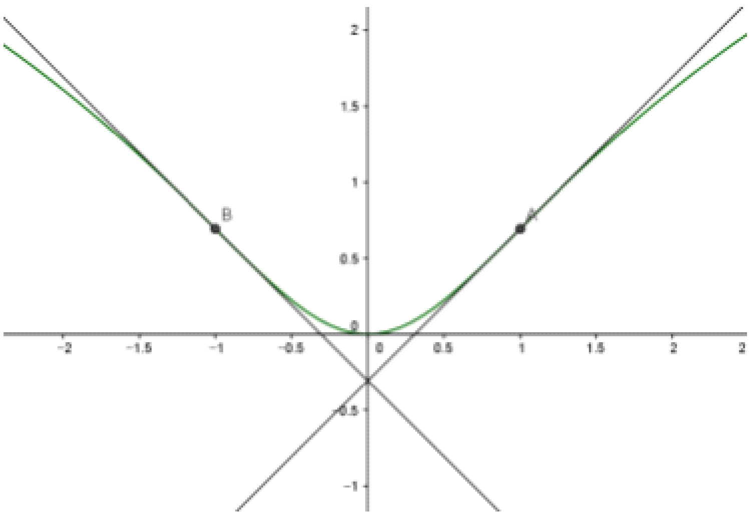
따라서 $f'(-2)=-\frac{4}{5}$, $f'(2)=\frac{4}{5}$이고 $f'(-1)=-1$, $f'(1)=1$이므로 $f'(x)$의 최솟값은 $f'(-1)=-1$이고 최댓값은 $f'(1)=1$이다.

논제 2-2.

$g_1(x) = f'(1)(x-1)+f(1) = x-1+\ln 2$, $g_{-1}(x) = f'(-1)(x+1)+f(-1) = -x-1+\ln 2$ 이다.

먼저 직선 $y=g_1(x)$는 점 $(1,\ \ln 2)$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선이고, $p(x)=f(x)-g_1(x)$라 하면 $p'(x)=f'(x)-g_1{}'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-1=\dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}$ 에서 $p(x)$는 미분가능하고 $x\neq 1$일 때 $p'(x)<0$이므로 제시문 (다)에 의해 함수 $p(x)$는 감소한다. 따라서 방정식 $f(x)-g_1(x)=0$는 오직 하나의 실근$(x=1)$을 가진다.

마찬가지로 직선 $y=g_{-1}(x)$는 점 $(-1,\ \ln 2)$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선이고, $q(x)=f(x)-g_{-1}(x)$라 하면 $q'(x)=f'(x)-g_{-1}{}'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}+1=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ 에서 $q(x)$는 미분가능하고 $x\neq -1$일 때 $q'(x)>0$이므로 제시문 (다)에 의해 함수 $q(x)$는 증가한다. 따라서 방정식 $f(x)-g_{-1}(x)=0$은 오직 하나의 실근$(x=\ -1)$을 가진다. 그러므로 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=g_1(x)$, $y=g_{-1}(x)$의 그래프를 좌표평면위에 나타내면 아래와 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=g_1(x)$, $y=g_{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}\{f(x)-g_{-1}(x)\}\,dx + \int_{0}^{1}\{f(x)-g_1(x)\}\,dx \\ &= 2\int_0^1\{f(x)-g_1(x)\}dx \\ &= 2\int_0^1 f(x)\,dx - 2\int_0^1 g_1(x)\,dx \end{aligned}$$

한편

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln(x^2+1)dx = \int_0^1 (x)'\ln(x^2+1)dx = \left[x\ln(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$=\ln 2-\int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx$$

여기서 $x=\tan\theta$ 라 치환하면 $dx=\sec^2\theta\,d\theta$ 이므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}\times\sec^2\theta\right)d\theta=\ln 2-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\,d\theta$$

$$=\ln 2-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\,d\theta=\ln 2-2\left[\tan\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$$

이고,

$$\int_0^1 g_1(x)\,dx=\int_0^1(x-1+\ln 2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x+x\ln 2\right]_0^1=\frac{1}{2}-1+\ln 2=\ln 2-\frac{1}{2}$$

이다. 그러므로 $S=2\left(\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right)-2\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\pi-3$ 이다.

논제 2-3.

함수 $k(x)=f(x)-g_t(x)=f(x)-f'(t)(x-t)-f(t)$ 라 하자.

$$k'(x)=f'(x)-g_t'(x)=f'(x)-f'(t)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2t}{t^2+1}$$

$$=\frac{2x(t^2+1)-2t(x^2+1)}{(x^2+1)(t^2+1)}=\frac{-2tx^2+2(t^2+1)x-2t}{(x^2+1)(t^2+1)}=\frac{-2(x-t)(tx-1)}{(x^2+1)(t^2+1)}=0$$

에서 $x=t$ 또는 $x=\frac{1}{t}$ 이다.

한편, $k''(x)=f''(x)=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$ 이고, 다음 두 가지 경우로 나누어 극솟값을 구해보자.

1) $|t|<1$ 일 때

제시문 (나)와 (다)에 의해 $k'(t)=0$, $k''(t)=\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}>0$ 이므로 $x=t$ 일 때 극솟값을 가지고, $k'\left(\frac{1}{t}\right)=0$, $k''\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2-\frac{2}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2}<0$ 이므로 $x=\frac{1}{t}$ 일 때 극댓값을 가진다. 따라서 $h(t)=k(t)=0$ 이다.

2) $|t|>1$ 일 때

제시문 (나)와 (다)에 의해 $k'(t)=0$, $k''(t)=\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}<0$ 이므로 $x=t$ 일 때 극댓값을 가지

고, $k'\left(\frac{1}{t}\right)=0,\quad k''\left(\frac{1}{t}\right)=\dfrac{2-\frac{2}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2}>0$ 이므로 $x=\frac{1}{t}$ 일 때 극솟값을 가진다. 따라서

$$h(t)=k\left(\frac{1}{t}\right)=\ln\left(\frac{1}{t^2}+1\right)-\frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{t^2}+1}\left(\frac{1}{t}-t\right)-\ln(t^2+1)=\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)+\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}$$ 이다.

1), 2)에 의해

$$h(t)=\begin{cases}0 & (|t|<1)\\ \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)+\dfrac{2(t^2-1)}{t^2+1} & (|t|>1)\end{cases}$$

이다.

논제 3-1.

한 조각에서 4가지 중 한 종류의 영문자가 3개 이상 나올 확률은 제시문 (라)에 의해서

$$p_1=4\left[{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0\right]=\frac{53}{128}$$

p_1을 성공의 확률이라고 할 때 총 n개의 조각 중에서 단 한 번의 성공도 일어나지 않을 확률은 제시문 (라)에 의해서

$$P={}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{53}{128}\right)^0\left(1-\frac{53}{128}\right)^n=\left(\frac{75}{128}\right)^n$$

한 조각에서 4가지 중 한 종류의 영문자가 연속해서 3개 이상 나올 확률은

$$p_2=4\left[3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^5\right]=\frac{17}{128}$$

p_2를 성공의 확률이라고 할 때 총 n개의 조각 중에서 적어도 한 개 이상의 성공이 일어날 확률은 제시문 (라)에 의해서

$$Q=1-{}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{17}{128}\right)^0\left(1-\frac{17}{128}\right)^n=1-\left(\frac{111}{128}\right)^n$$

그러므로

$$P+Q=1-\left(\frac{111}{128}\right)^n+\left(\frac{75}{128}\right)^n$$

논제 3-2.

총 n개의 조각에서 모든 연결된 두 개의 조각은 연속된 4개의 동일한 영문자를 가지고 있다. 첫 번째 조각의 첫 3개의 영문자를 나열하는 경우의 수는 3개의 영문자를 중복순열한 후 3개의 영문자가 모두 동일한 경우를 제외시키는 것이므로 제시문 (다)에 의해서

$${}_{3}\Pi_{3}-3=24=2^{3}\cdot 3$$

두 번째 조각은 4개의 영문자 중에서 3개의 영문자를 선택하여 나열하는 것이므로 제시문 (가)와 (나)에 의해서

$${}_{4}\mathrm{C}_{3}\cdot {}_{3}\mathrm{P}_{3}=2^{3}\cdot 3$$

세 번째 조각부터 $n-1$번째 조각의 경우 각 조각마다 3개의 영문자 중 2개를 선택해서 나열하는 것이므로 제시문 (가)와 (나)에 의해서

$$\left({}_{3}\mathrm{C}_{2}\cdot {}_{2}\mathrm{P}_{2}\right)^{n-3}=2^{n-3}\cdot 3^{n-3}$$

마지막 n번째 조각의 마지막 3개의 영문자를 나열하는 경우 또한 첫 번째 조각과 동일하므로

$${}_{3}\Pi_{3}-3=24=2^{3}\cdot 3$$

위에 언급한 모든 경우의 수를 곱하게 되면 총 경우의 수는 $2^{n+6}\cdot 3^{n}$

즉, $p=n+6$이고 $q=n$이다.

19 부산대학교(자연계) 수시[19)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	한국사 제외한 4개 영역 중 수학(가) 포함 3개 영역 등급 합 7 이내 & 한국사 4등급 이내	수학 (3문항, 6문제)	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

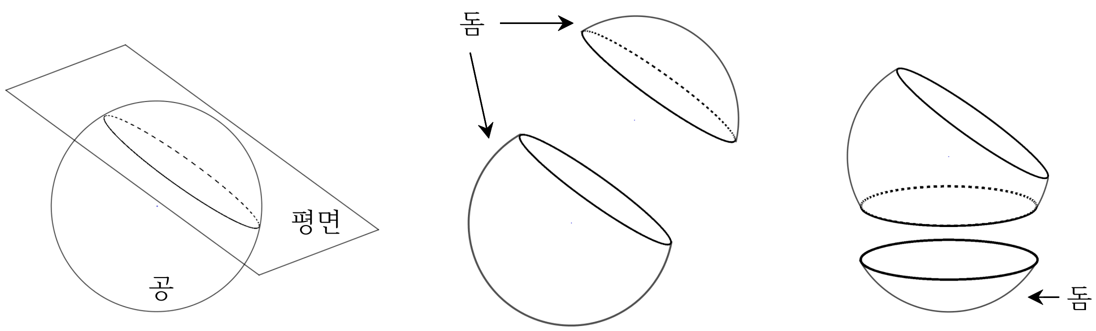
$$V=\int_a^b S(x)dx \text{ (단, } S(x)\text{는 구간 } [a,\ b]\text{에서 연속이다.)}$$

(나) 공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합을 구라고 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라고 한다.

(다) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

구의 중심으로부터의 거리가 구의 반지름의 길이보다 작거나 같은 점의 집합을 공이라 하고, 구의 중심을 공의 중심, 구의 반지름을 공의 반지름이라 하자.
그림과 같이 구와 한 평면으로 둘러싸인 입체도형을 돔이라 하자.



19) 부산대학교 홈페이지

[1-1] 반지름의 길이가 1인 하나의 공에서 크기가 같은 돔 6개를 잘라내고자 한다. 돔의 크기가 최대가 되도록 잘랐을 때, 잘라내고 남은 입체도형을 A라 하자. 입체도형 A를 설명하고, 그 부피를 구하시오.

(20점)

[1-2] [1-1]의 입체도형 A에서 최대한 큰 돔 하나를 더 잘라내었다. 마지막으로 잘라낸 돔의 평면부분의 넓이를 구하시오. (10점)

[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(나) 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 또 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

좌표평면 위의 점 $(t,\ 0)$에서 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$ 위의 점에 이르는 거리의 최솟값을 $f(t)$라 하자.

[2-1] 함수 $f(t)$의 미분가능성을 조사하시오. (25점)

[2-2] $G(p)=\int_0^{5p} tf(t)dt$일 때, $G(1)$의 값을 구하시오. (10점)

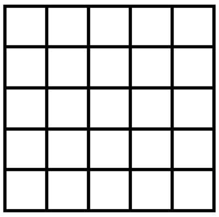
[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

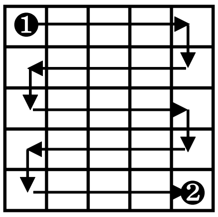
(가) 두 사건 A, B에 대하여 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n이라고 하면 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

(나) n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p, q, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \cdots \times r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

[그림1]과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형을 가로, 세로로 각각 5등분하여 한 변의 길이가 1인 25개의 정사각형을 만든 뒤, [그림2]와 같이 ❶번에서 ❷번까지 화살표 방향으로 25개의 정사각형에 각각 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 흰색 또는 검은색 타일을 붙이려고 한다. 흰색 타일은 연속해서 붙일 수 없고, 검은색 타일은 연속해서 2개까지는 붙일 수 있다.

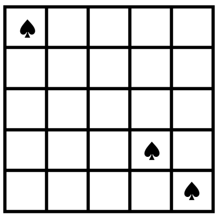

[그림 1]



[그림 2]

[3-1] 검은색 타일을 최대한 많이 붙이려고 한다. 이때 검은색 타일의 개수를 구하고, 타일을 붙일 수 있는 경우의 수를 구하시오. (10점)

[3-2] [그림3]과 같이 ♠가 표시된 3개의 위치에는 반드시 검은색 타일을 붙이는 경우의 수를 구하시오. (25점)


[그림 3]

• 풀어보기

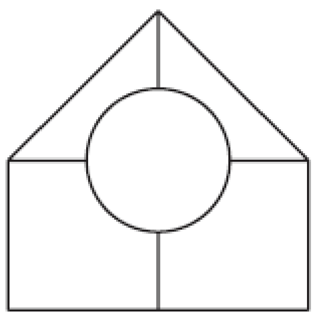
문제1. 좌표공간에서 두 구

$$S_1 : x^2+y^2+z^2-2x+6z=26,$$

$$S_2 : x^2+y^2+z^2+6x=2$$

가 만나서 생기는 도형을 포함한 평면을 α라 하자. 원점을 O, 구 S_1의 중심을 A라 할 때, 평면 α 위를 움직이는 점 P에 대하여 $5|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+3\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$의 최솟값을 구하시오.

문제2. 그림과 같은 5개의 영역을 서로 다른 4가지 색으로 칠하여 4개의 영역으로 보이는 문양을 만들려고 한다. 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하고 한 영역에는 한 가지 색만을 칠할 때, 서로 다르게 색칠된 문양의 개수를 구하시오. (단, 같은 색을 칠하는 두 영역이 이웃하면 한 영역으로 보고, 이웃하지 않으면 다른 영역으로 본다.)



• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 87

$$S_1 : x^2+y^2+z^2-2x+6z=26 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_2 : x^2+y^2+z^2+6x=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡-㉠을 하면 $8x-6z=-24$이므로 두 구가 만나서 생기는 도형을 포함하는 평면 α의 방정식은

$$4x-3z+12=0$$

㉠에서 $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=6^2$이므로

$\mathrm{A}(1,\ 0,\ -3)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+3\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=4\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PO}}+3\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{4}\right|$$

선분 OA를 $3:1$로 내분하는 점을 B라 하면

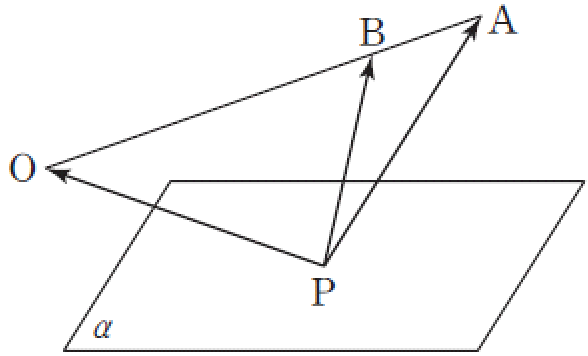
$$\mathrm{B}\left(\frac{3\times1+1\times0}{3+1},\ \frac{3\times0+1\times0}{3+1},\ \frac{3\times(-3)+1\times0}{3+1}\right)$$

즉, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\ 0,\ -\frac{9}{4}\right)$

이때 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PO}}+3\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{4}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}$이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+3\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=4|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$가 최소일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+3\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$도 최소이다.



$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최솟값은 점 B와 평면 α 사이의 거리와 같으므로

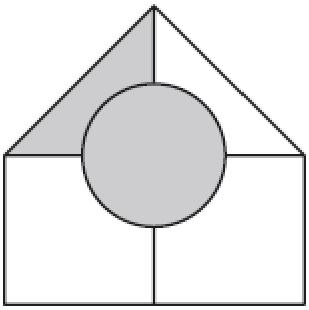
$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\geq\frac{\left|4\times\frac{3}{4}+0\times0+(-3)\times\left(-\frac{9}{4}\right)+12\right|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{87}{20}$$

따라서 $5|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+3\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=20|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최솟값은

$$20\times\frac{87}{20}=87$$

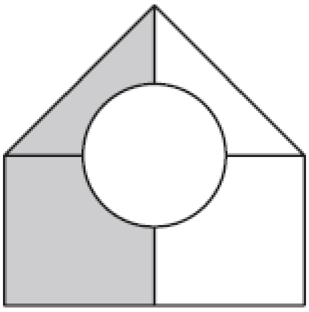
풀어보기(문제2) 정답 192

(i) 그림과 같이 가운데 원을 포함한 두 영역을 한 가지 색으로 칠하고 남은 세 영역을 3가지 색으로 칠하는 경우



원과 같은 색을 칠할 영역을 고르는 경우의 수가 4이고, 두 영역에 공통으로 칠할 색을 고르는 경우의 수가 4, 남은 세 영역을 3가지 색으로 칠하는 경우의 수가 $3!$이므로 문양의 개수는 $4\times4\times3!=96$이다

(ii) 그림과 같이 원을 포함하지 않은 두 이웃한 영역을 한 가지 색으로 칠하고 남은 세 영역을 3가지 색으로 칠하는 경우



두 이웃한 영역을 고르는 경우의 수가 4이고, 두 영역에 공통으로 칠할 색을 고르는 경우의 수가 4, 남은 세 영역을 3가지 색으로 칠하는 경우의 수가 $3!$이므로 문양의 개수는

$$4\times4\times3!=96$$

(i), (ii)에서 구하는 문양의 개수는

$$96+96=192$$

대학발표 예시답안

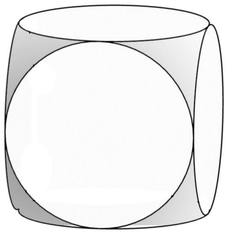
[1-1]

돔은 구와 한 평면으로 둘러싸인 입체도형이므로 돔의 평면 부분의 둘레는 원이 된다.

하나의 공에서 겹치지 않는 2개의 돔을 생각할 때, 크기가 같은 경우는 공의 중심에서 2개의 돔을 결정하는 두 평면사이의 거리가 같은 경우이다. 돔의 크기가 최대가 되도록 자르는 경우 두 돔의 평면부분이 서로 접하게 된다.

그러므로 크기가 같은 3개 이상의 돔을 잘라낼 때, 잘라낸 돔의 크기가 최대가 되려면 이웃하는 돔의 평면부분이 서로 접해야 한다.

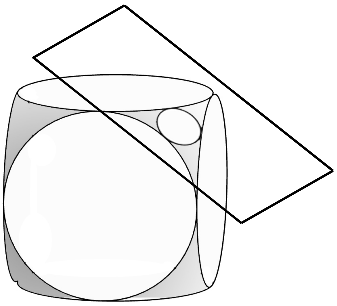
크기가 같은 3개의 돔을 잘라서 남은 부분의 부피가 최소가 되어야 하므로 다음과 같이 생각할 수 있다.
공의 중심을 좌표공간의 원점에 두고 평면 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=1$, $z=-1$에 평행한 평면으로 자른다고 할 때, 남은 부분의 부피가 최소가 되는 경우는 임의의 하나의 돔의 평면부분이 이웃하는 4개의 돔의 평면부분과 서로 접할 경우의 6개의 돔을 잘라내고 남은 입체도형이 구하고자 하는 입체도형 A이다. 그림으로 나타내면 다음과 같다.



공의 중심을 좌표공간의 원점에 두고 평면 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=1$, $z=-1$에 평행한 평면으로 자른다고 할 때, 돔들이 처음으로 서로 접하는 경우를 생각한다. xy평면에 놓인 접점들은 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정사각형이므로
평면 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에 의해 생기는 돔을 잘라낼 때 남은 부분의 부피가 최소가 된다.
남은 부분의 부피를 구하기 위해 돔 하나의 부피를 구한다.
$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에 의해 생기는 돔 중 부피가 작은 돔은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x\le 1$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{1-x^2}$인 원판으로 이루어진 입체도형이므로 제시문 (가)에 의하여 잘라낸 돔 하나의 부피는 $\pi\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}(1-x^2)dx=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi$이다.
반지름의 길이가 1인 공은 $-1\le x\le 1$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{1-x^2}$인 원판으로 이루어진 입체도형이므로 제시문 (가)에 의하여 $\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\dfrac{4}{3}\pi$이다.
따라서 돔의 크기가 최대가 되도록 잘라내고 남은 입체도형 A의 부피는
(공의 부피)$-6\times$(돔 하나의 부피)$=\dfrac{15\sqrt{2}-16}{6}\pi$이다.

[1-2]

[1-1] 에서 구한 입체도형 A는 반지름의 길이 $r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 원판 6개와 서로 모양이 같은 구의 일부분 8개로 둘러싸여 있다.
크기가 가장 큰 돔을 제외하기 위해서는 입체도형 A에서 구의 일부 중 인접한 세 원들과 모두 접하는 평면으로 잘라내는 것이다.

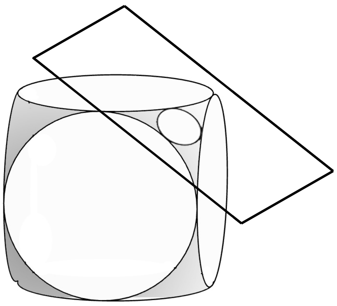


새로운 돔을 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 인 부분에서 잘라낸다고 할 때, 원 3개에 모두 접하는 평면의 법선벡터는 대칭성에 의해 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$가 되고, 평면과 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에 놓인 중심이 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원과의 접점은 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 구하는 평면의 방정식은 제시문 (다)에 의하여 $x+y+z-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$이다. 공의 중심인 원점에서 평면 $x+y+z-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ 사이의 거리는 $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$이다. 마지막으로 잘라낸 돔의 평면부분의 원의 반지름의 길이를 r_2라 하면 피타고라스의 정리에 의하여 $r_2{}^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$이므로 마지막으로 잘라낸 평면부분의 넓이는 $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\pi$이다.

[1-2] **별해**

[1-1] 에서 구한 입체도형 A는 반지름의 길이 $r_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원판 6개와 서로 모양이 같은 구의 일부분 8개로 둘러싸여 있다.
크기가 가장 큰 돔을 제외하기 위해서는 입체도형 A에서 구의 일부 중 인접한 세 원들과 모두 접하는 평면으로 잘라내는 것이다.



새로운 돔을 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 인 부분에서 잘라낸다고 할 때, 원 3개에 모두 접하는 평면의 법선벡터는 대칭성에 의해 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$가 되고 평면과 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에 놓인 중심

이 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원과의 접점은 $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 평면과 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$에 놓인 중심이 $\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원과의 접점은 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 평면과 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$에 놓인 중심이 $\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원과의 접점은 $\mathrm{R}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다. 세 점 $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$을 지나는 평면의 방정식은 $x+y+z-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$이다.

마지막으로 잘라낸 돔의 평면부분의 원의 반지름의 길이를 r_2라 하면 세 점 $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 외접원이다.

정삼각형이므로 $r_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{\mathrm{PQ}}$ 이므로 ${r_2}^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$이고 마지막으로 잘라낸 평면부분의 넓이는 $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\pi$이다.

[2-1]

포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점을 $\mathrm{A}(x,y)$라 하고, x축 위의 한 점을 $\mathrm{B}(t,0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{x-(t-2p)\}^2+4p(t-p)}$ 이다.

$t-2p\ge 0$인 경우, $f(t)=2\sqrt{p(t-p)}$ 이다.

$t-2p<0$인 경우, $f(t)=\sqrt{t^2}=|t|$ 이다.

그러므로 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} 2\sqrt{p(t-p)} & (t\ge 2p) \\ t & (0\le t<2p) \\ -t & (t<0) \end{cases}$$

이다.

함수 $f(t)$는 정의된 각 구간에서 미분가능하므로 $t=0$과 $t=2p$에서 미분가능성을 확인하면 된다.

제시문 (가), (나)에 의하여

(ⅰ) $\lim\limits_{t\to 0-}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim\limits_{t\to 0-}\frac{-t-0}{t-0}=-1$, $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim\limits_{t\to 0+}\frac{t-0}{t-0}=1$

따라서 $t=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅱ) $\lim\limits_{t\to 2p-}\frac{f(t)-f(2p)}{t-2p}=\lim\limits_{t\to 2p-}\frac{t-2p}{t-2p}=1$

$$\lim_{t\to 2p+}\frac{f(t)-f(2p)}{t-2p}=\lim_{t\to 2p+}\frac{2\sqrt{p(t-p)}-2p}{t-2p}=\lim_{t\to 2p+}\frac{2p}{\sqrt{p(t-p)}+p}=1$$

따라서 $t=2p$ 에서 미분가능하다.

그러므로 함수 $f(t)$ 는 $t=0$ 을 제외한 모든 실수에서 미분가능하다.

[2-2]

$$G(p)=\int_0^{5p} tf(t)dt=\int_0^{2p} tf(t)dt+\int_{2p}^{5p} tf(t)dt=\int_0^{2p} t^2dt+\int_{2p}^{5p} t\times 2\sqrt{p(t-p)}\,dt$$

따라서

$$G(1)=\int_0^2 t^2dt+\int_2^5 t\times 2\sqrt{t-1}\,dt$$

(i) $\int_0^2 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$

(ii) $t-1=s$ 라 두면

$$\int_2^5 t\times 2\sqrt{t-1}\,dt=2\int_1^4 (s+1)\sqrt{s}\,ds=2\int_1^4 (s\sqrt{s}+\sqrt{s})ds=2\left[\frac{2}{5}s^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$=2\left\{\frac{2}{5}(2^5-1)+\frac{2}{3}(2^3-1)\right\}=2\left(\frac{62}{5}+\frac{14}{3}\right)=\frac{124}{5}+\frac{28}{3}$$

그러므로 $G(1)=\frac{8}{3}+\frac{28}{3}+\frac{124}{5}=\frac{184}{5}$ 이다.

[3-1]

검은색 타일을 연속해서 2개씩 붙이는 횟수를 A라 하면,

$$3A\le 25,\ A\le\frac{25}{3}$$

이므로 A의 최댓값은 8이고, $25=3\times 8+1$ 이다.

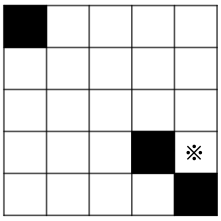
따라서 검은색 타일의 최대 개수는 $2\times 8+1=17$ 이다.

이 때, 타일을 붙일 수 있는 경우의 수는

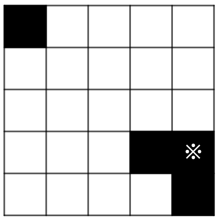
'검은색 타일이 연속해서 붙는 경우' 8개, '검은색 타일을 연속하지 않고 1개만 붙이는 경우' 1개, 총 9개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

그러므로 $\frac{(8+1)!}{8!}=9$ 이다.

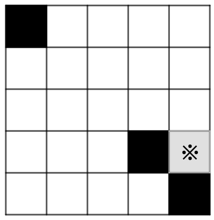
[3-2]



[그림4]



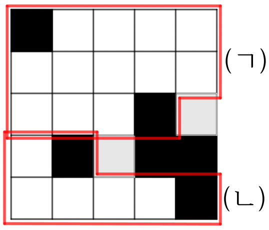
[case1]



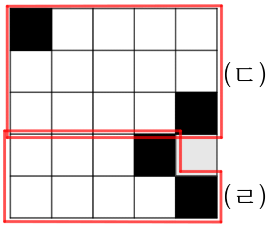
[case2]

[그림4]와 같이 ※자리에

검은색 타일을 붙이는 경우 [case1]과 흰색 타일을 붙이는 경우 [case2]로 구별하고 검은색 타일이 연속해서 2개가 붙는 개수를 x, 검은색 타일이 연속되지 않고 1개만 붙는 개수를 y라 하자.



[그림5]



[그림6]

[case 1]은 [그림5]와 같이 ❶과 ❷를 제외한 6개의 타일의 색이 정해진다.

(ㄱ)영역에서 붙일 수 있는 흰색 타일의 개수는 $(x+y-1)$이다.

즉, $2x+y+(x+y-1)=14$, $3x+2y=15$

이를 만족하는 순서쌍 (x, y)는 $(1, 6)$, $(3, 3)$, $(5, 0)$뿐이다.

즉, (ㄱ)영역이 만들어지는 경우의 수는 $\frac{7!}{6!}+\frac{6!}{3!3!}+\frac{5!}{5!}=7+20+1=28$이다.

(ㄴ)영역에서 붙일 수 있는 흰색 타일의 개수는 $(x+y-1)$이다.

즉, $2x+y+(x+y-1)=7$, $3x+2y=8$

이를 만족하는 순서쌍 (x, y)는 $(0, 4)$, $(2, 1)$뿐이다.

즉 (ㄴ)영역이 만들어지는 경우의 수는 $\frac{4!}{4!}+\frac{3!}{2!}=1+3=4$이다.

따라서 [case1]이 만들어지는 경우의 수는 $28\times4=112$이다.

[case 2]는 [그림6]과 같이 ❶과 ❷를 제외한 6개의 타일의 색이 정해진다.

위와 같은 방법으로 계산하면 (ㄷ), (ㄹ)영역이 만들어지는 경우의 수는 각각 37, 7이다.

따라서 [case2]가 만들어지는 경우의 수는 $37\times7=259$이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 $112+259=371$이다.

(나침반 다른 풀이)

25개의 정사각형에 타일이 붙는 순서대로 번호를 붙이면 다음과 같다.

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

1번, 17번, 25번에는 검은색 타일이 붙어야 하므로 2번부터 16번의 15개의 정사각형에 붙을 타일을 표로 나타내어 계산해 보면 다음과 같다. 단, ①은 흰색 타일 1개, ❶는 검은색 타일 1개, ❷는 검은색 타일 2개를 의미한다.

2번~16번 정사각형의 타일색의 구성

❷ 없는 경우	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	1가지
			∨		∨		∨		∨		∨		∨			
❷ 1개		①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	${}_6C_1$=6가지
					∨		∨		∨		∨		∨			
❷ 2개			❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	${}_5C_2$=10가지
					∨		∨		∨		∨		∨			
❷ 3개				①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	${}_5C_3$=10가지
							∨		∨		∨		∨			
❷ 4개					❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	${}_4C_4$=1가지
16번 정사각형에 검은색 타일이 붙는 경우의 수																28
❷ 없는 경우	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	1가지
				∨		∨		∨		∨		∨		∨		
❷ 1개		❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	${}_6C_1$=6가지
				∨		∨		∨		∨		∨		∨		
❷ 2개			①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	${}_6C_2$=15가지
						∨		∨		∨		∨		∨		
❷ 3개				❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	${}_5C_3$=10가지
						∨		∨		∨		∨		∨		
❷ 4개					①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	${}_5C_4$=5가지
16번 정사각형에 흰색 타일이 붙는 경우의 수																37

18번~24번 정사각형의 타일색의 구성

❷ 없는 경우	❶	①	❶	①	❶	①	❶	1가지
			∨		∨			
❷ 1개	❶	①	❶	①	❶	①		${}_2C_1$=2가지
18번 정사각형에 검은색 타일이 붙는 경우의 수								3
❷ 없는 경우	①	❶	①	❶	①	❶	①	1가지
		∨		∨				
❷ 1개	①	❶	①	❶	①	❶		${}_2C_1$=2가지
		∨		∨				
❷ 2개	①	❶	①	❶	①			1가지
18번 정사각형에 흰색 타일이 붙는 경우의 수								4

16번에 흰색 타일이 붙은 경우 18번에는 두 가지 색이 다 올 수 있으므로

$$37\times(3+4)=37\times7=259$$

의 경우가 있고 16번에 검은색 타일이 붙은 경우 18번에는 반드시 흰색 타일이 와야 하므로

$$28 \times 4 = 112$$

의 경우가 있다.

따라서 1번, 17번, 25번에는 검은색 타일이 붙는 경우의 수는

$$259 + 112 = 371$$

이다.

20 부산대학교(의학계) 수시[20)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 과학탐구 3개 영역 등급 합 4 이내 & 영어 2등급 이내 & 한국사 4등급 이내	수학 (3문항, 6문제)	100분

[문항 1] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

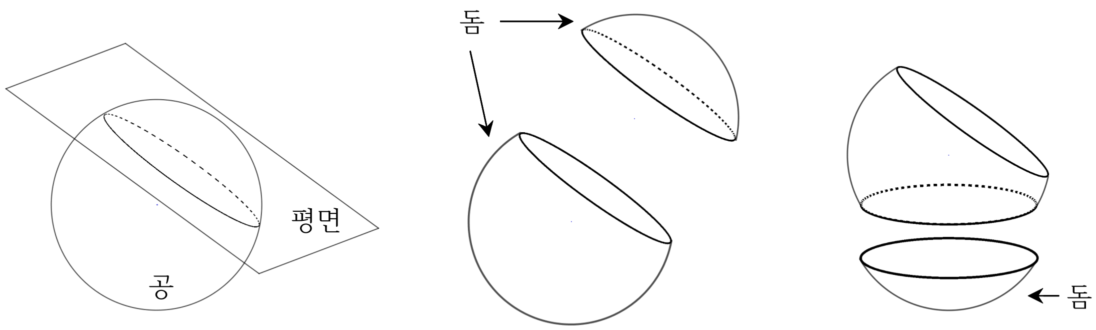
$$V=\int_a^b S(x)dx \text{ (단, } S(x)\text{는 구간 } [a,\ b]\text{에서 연속이다.)}$$

(나) 공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합을 구라고 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라고 한다.

(다) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

구의 중심으로부터의 거리가 구의 반지름의 길이보다 작거나 같은 점의 집합을 공이라 하고, 구의 중심을 공의 중심, 구의 반지름을 공의 반지름이라 하자.
그림과 같이 구와 한 평면으로 둘러싸인 입체도형을 돔이라 하자.



20) 부산대학교 홈페이지

[1-1] 반지름의 길이가 1인 하나의 공에서 크기가 같은 돔 6개를 잘라내고자 한다. 돔의 크기가 최대가 되도록 잘랐을 때, 잘라내고 남은 입체도형을 A라 하자. 입체도형 A를 설명하고, 그 부피를 구하시오. (20점)

[1-2] 앞 [1-1]의 입체도형 A에서 최대한 큰 돔 하나를 더 잘라내었다. 마지막으로 잘라낸 돔의 평면부분의 넓이를 구하시오. (10점)

[문항 2] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

(나) 함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여
 1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
 2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[2-1] $p>0$일 때, 구간 $[0,\infty)$에서 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+p^2}}$의 최솟값을 구하시오. (25점)

[2-2] $ab\geq 3$일 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

[문항 3] 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

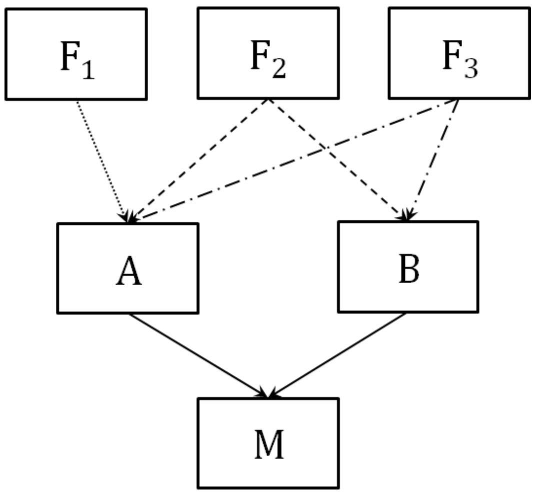
(나) 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0)$$

(다) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0,\ \mathrm{P}(B) > 0)$$

그림과 같이 3개의 공장 F_1, F_2, F_3에서 생산된 휴대폰이 물류센터 A 또는 B를 거쳐서 본사 M에 배송된다. 각각의 공장에서는 동일한 수의 휴대폰을 생산하며, 각 공장마다 두 종류의 휴대폰(스마트폰과 폴더폰)을 생산하고 있다. 공장 F_1에서는 스마트폰 90%, 폴더폰 10%, 공장 F_2에서는 스마트폰 80%, 폴더폰 20%, 공장 F_3에서는 스마트폰 70%, 폴더폰 30%의 비율로 생산한다. 공장 F_1에서 생산한 휴대폰은 모두 물류센터 A로 보낸다. 공장 F_2에서 생산한 스마트폰의 50%와 폴더폰의 50%는 물류센터 A로 보내고 나머지는 물류센터 B로 보낸다. 공장 F_3에서 생산한 스마트폰의 75%와 폴더폰의 75%는 물류센터 A로 보내고 나머지는 물류센터 B로 보낸다.



[3-1] 본사 M에서 임의로 휴대폰 2대를 선택하였다. 선택한 2대의 휴대폰이 서로 다른 종류이면서 서로 다른 공장에서 생산되었고 서로 다른 물류센터를 거쳐 배송된 휴대폰일 확률을 구하시오. (15점)

[3-2] 본사 M에서 n대의 휴대폰을 선택하여 일렬로 나열하였다. 이웃한 휴대폰은 반드시 서로 다른 종류이면서 서로 다른 공장에서 생산되었고 서로 다른 물류센터를 거쳐 배송된 휴대폰이어야 한다. 이러한 방법으로 총 n대의 휴대폰을 나열하는 경우의 수를 k_n이라고 할 때, k_{11}과 k_{18}의 값을 각각 구하시오. (20점)

(예) $n=8$일 경우 (S:스마트폰, D:폴더폰)

$$\mathrm{ASF_2-BDF_3-ASF_1-BDF_2-ASF_3-BDF_2-ASF_1-BDF_3}$$
$$\mathrm{BSF_2-ADF_3-BSF_2-ADF_1-BSF_3-ADF_1-BSF_2-ADF_3}$$
$$\vdots$$

• 풀어보기

문제1. 양수 a에 대하여 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오.

문제2. 어느 대학 신입생 모집은 수시모집과 정시모집이 있다. 신입생 중 남학생 수와 여학생 수의 비는 $3:2$이고 수시모집으로 입학한 학생 수는 정시모집으로 입학한 학생 수의 2배이다. 신입생 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 수시모집으로 입학한 학생이었을 때 이 학생이 여학생일 확률은 $\dfrac{3}{10}$이다. 신입생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 정시모집으로 입학한 남학생일 확률은?

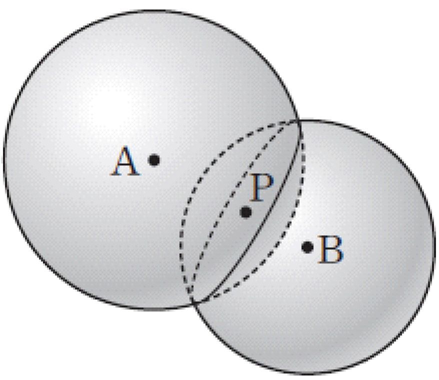
① $\dfrac{1}{15}$　② $\dfrac{2}{15}$　③ $\dfrac{1}{5}$　④ $\dfrac{4}{15}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$

문제3. 그림과 같이 좌표공간에서 두 구

$$S_1 : x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-27=0,$$

$$S_2 : x^2+y^2+z^2-6x-2y+8z+1=0$$

의 중심을 각각 A, B라 하고, 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원의 중심을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m과 n은 서로소인 자연수이다.)



• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 11

$f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$ 에서

$$f'(x)=\frac{(x-5)^2+36-(x-5)\times2(x-5)}{\{(x-5)^2+36\}^2}$$
$$=\frac{-(x-5)^2+36}{\{(x-5)^2+36\}^2}=\frac{-x^2+10x+11}{\{(x-5)^2+36\}^2}$$
$$=\frac{-(x+1)(x-11)}{\{(x-5)^2+36\}^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=11$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	11	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-\dfrac{1}{12}$을 가지고,

$x=11$에서 극댓값 $f(11)=\dfrac{1}{12}$을 갖는다.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}=0$이고, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}=0$이므로 양수 a에 대하여 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 $M+m=0$이 되도록 하려면 극솟값 $f(-1)=-\dfrac{1}{12}$과 극댓값 $f(11)=\dfrac{1}{12}$이 각각 최솟값과 최댓값이 되어야 한다.

즉, $x=-1$과 $x=11$은 모두 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에 속해야 하므로 $-a\le-1$이고 $a\ge11$이어야 한다.

따라서 $a\ge11$이므로 양수 a의 최솟값은 11이다.

풀어보기(문제2) 정답 ②

신입생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 남학생인 사건을 A, 수시모집으로 입학한 학생인 사건을 B라 하자.

신입생 중에서 남학생 수를 $3a$, 여학생 수를 $2a$, 정시모집으로 입학한 학생 수를 b, 수시모집으로 입학한 학생 수를 $2b$라 하면 $5a=3b$이다.

한편, 수시모집으로 입학한 여학생 수를 x라 하면 신입생 중에서 임의로 한 명을 뽑았더니 수시모집으로 입학한 학생이었을 때 이 학생이 여학생일 확률은

$P(A^C|B)=\dfrac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\dfrac{n(A^C\cap B)}{n(B)}=\dfrac{3}{10}$이므로 $\dfrac{x}{2b}=\dfrac{3}{10}$

따라서 $x=\dfrac{3}{5}b$, $5a=3b$이므로 이 대학의 신입생 인원 수는 다음 표와 같다.

	A	A^C	합계
B	$\dfrac{7}{5}b=\dfrac{7}{3}a$	$x=\dfrac{3}{5}b=a$	$2b$
B^C	$\dfrac{2}{3}a$	a	b
합계	$3a$	$2a$	$5a(=3b)$

따라서 신입생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 정시모집으로 입학한 남학생일 확률은

$$P(A\cap B^C)=\frac{\frac{2}{3}a}{5a}=\frac{2}{15}$$

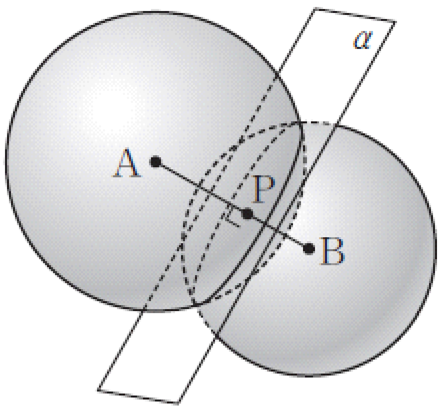
풀어보기(문제3) 정답 49

두 구가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라 하면 평면 α의 방정식은

$(x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-27)-(x^2+y^2+z^2-6x-2y+8z+1)=0$에서

$4x+6y-12z-28=0$, 즉 $2x+3y-6z-14=0$이다.

이때 선분 AB는 평면 α와 점 P에서 수직으로 만난다.



구 $S_1 : x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-27=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36$이므로 구 S_1의 중심 A의 좌표는

A$(1,\ -2,\ 2)$

구 $S_2 : x^2+y^2+z^2-6x-2y+8z+1=0$에서

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=25$이므로 구 S_2의 중심 B의 좌표는

B$(3,\ 1,\ -4)$

이때 선분 PA의 길이는 점 A와 평면 α 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{PA}}=\frac{|2\times1+3\times(-2)-6\times2-14|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{30}{7}$$

또 선분 PB의 길이는 점 B와 평면 α 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{PB}}=\frac{|2\times3+3\times1-6\times(-4)-14|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{19}{7}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=\frac{30}{7}:\frac{19}{7}=30:19$이므로

$$m+n=30+19=49$$

대학발표 예시답안

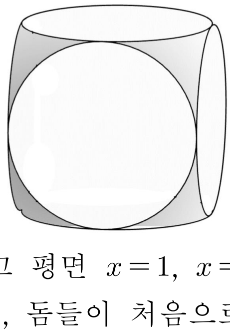
[1-1] 돔은 구와 한 평면으로 둘러싸인 입체도형이므로 돔의 평면 부분의 둘레는 원이 된다.

하나의 공에서 겹치지 않는 2개의 돔을 생각할 때, 크기가 같은 경우는 공의 중심에서 2개의 돔을 결정하는 두 평면사이의 거리가 같은 경우이다. 돔의 크기가 최대가 되도록 자르는 경우 두 돔의 평면부분이 서로 접하게 된다.

그러므로 크기가 같은 3개 이상의 돔을 잘라낼 때, 잘라낸 돔의 크기가 최대가 되려면 이웃하는 돔의 평면부분이 서로 접해야 한다.

크기가 같은 3개의 돔을 잘라서 남은 부분의 부피가 최소가 되어야 하므로 다음과 같이 생각할 수 있다.

공의 중심을 좌표공간의 원점에 두고 평면 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=1$, $z=-1$에 평행한 평면으로 자른다고 할 때, 남은 부분의 부피가 최소가 되는 경우는 임의의 하나의 돔의 평면부분이 이웃하는 4개의 돔의 평면부분과 서로 접할 경우의 6개의 돔을 잘라내고 남은 입체도형이 구하고자 하는 입체도형 A이다. 그림으로 나타내면 다음과 같다.



공의 중심을 좌표공간의 원점에 두고 평면 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=1$, $z=-1$에 평행한 평면으로 자른다고 할 때, 돔들이 처음으로 서로 접하는 경우를 생각한다. xy 평면에 놓인 접점들은 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정사각형이므로

평면 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에 의해 생기는 돔을 잘라낼 때 남은 부분의 부피가 최소가 된다.

남은 부분의 부피를 구하기 위해 돔 하나의 부피를 구한다.

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에 의해 생기는 돔 중 부피가 작은 돔은 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le 1$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{1-x^2}$인 원판으로 이루어진 입체도형이므로 제시문 (가)에 의하여 잘라낸 돔 하나의 부피는 $\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}(1-x^2)dx=\frac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi$이다.

반지름의 길이가 1인 공은 $-1\le x\le 1$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이 $\sqrt{1-x^2}$인 원판으로 이루어진 입체도형이므로 제시문 (가)에 의하여 $\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi$이다.

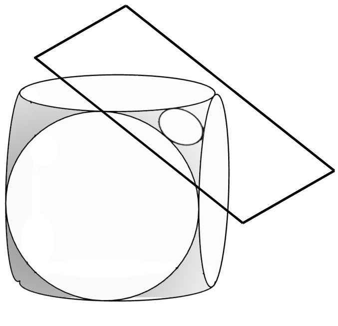
따라서 돔의 크기가 최대가 되도록 잘라내고 남은 입체도형 A의 부피는

(공의 부피)$-6\times$(돔 하나의 부피)$=\frac{15\sqrt{2}-16}{6}\pi$이다.

[1-2]

[1-1] 에서 구한 입체도형 A는 반지름의 길이 $r_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원판 6개와 서로 모양이 같은 구의 일부분 8개로 둘러싸여 있다.

크기가 가장 큰 돔을 제외하기 위해서는 입체도형 A에서 구의 일부 중 인접한 세 원들과 모두 접하는 평면으로 잘라내는 것이다.



새로운 돔을 $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$인 부분에서 잘라낸다고 할 때, 원 3개에 모두 접하는 평면의 법선벡터는 대칭성에 의해 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$가 되고, 평면과 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에 놓인 중심이 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원과의 접점은 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 구하는 평면의 방정식은 제시문 (다)에 의하여 $x+y+z-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$이다.

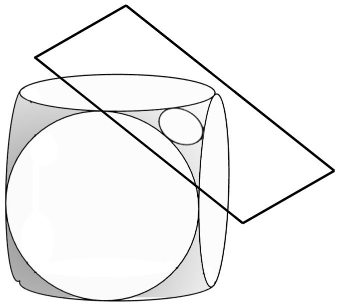
공의 중심인 원점에서 평면 $x+y+z-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ 사이의 거리는 $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$이다. 마지막으로 잘라낸 돔의 평면부분의 원의 반지름의 길이를 r_2라 하면 피타고라스의 정리에

의하여 $r_2^2=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}$이므로 마지막으로 잘라낸 평면부분의 넓이는 $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}\pi$이다.

[1-2] 별해

[1-1] 에서 구한 입체도형 A는 반지름의 길이 $r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 원판 6개와 서로 모양이 같은 구의 일부분 8개로 둘러싸여 있다.

크기가 가장 큰 돔을 제외하기 위해서는 입체도형 A에서 구의 일부 중 인접한 세 원들과 모두 접하는 평면으로 잘라내는 것이다.



새로운 돔을 $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ 인 부분에서 잘라낸다고 할 때, 원 3개에 모두 접하는 평면의 법선벡터는 대칭성에 의해 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$가 되고 평면과 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에 놓인 중심이 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 원과의 접점은 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, 평면과 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에 놓인 중심이 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 원과의 접점은 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, 평면과 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에 놓인 중심이 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 원과의 접점은 $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다. 세 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$을 지나는 평면의 방정식은 $x+y+z-\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$이다.

마지막으로 잘라낸 돔의 평면부분의 원의 반지름의 길이를 r_2라 하면 세 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 외접원이다.

정삼각형이므로 $r_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{\mathrm{PQ}}$ 이므로 $r_2^2=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}$이고 마지막으로 잘라낸 평면부분의 넓이는 $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}\pi$이다.

[문항 2]

[2-1] $f(x)$의 그래프의 개형을 알아보기 위해 $f'(x)$의 부호를 조사해보자.

$x>0$에 대하여

$$f'(x)=-\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}+\frac{p^2}{2\sqrt{x}(x+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-\sqrt{x}(x+p^2)^{\frac{3}{2}}+p^2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}(1+x)^{\frac{3}{2}}(x+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

으로부터 $f'(x)=0$ 인 점을 찾아보면

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow p^2(1+x)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x}(x+p^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow p^4(1+x)^3-x(x+p^2)^3=0$$

이고

$$0=p^4(1+x)^3-x(x+p^2)^3=(p^2-x^2)\{x^2-p^2(p^2-3)x+p^2\}$$

이므로 $x^2-p^2(p^2-3)x+p^2=0$의 해를 조사하기 위해 판별식을 조사해보면

$$D=p^4(p^2-3)^2-4p^2=p^2\{p^2(p^2-3)^2-4\}=p^2(p^2-1)^2(p^2-4)$$

이다.

(i) $p>2$ 일 때, $D>0$이므로

$x^2-p^2(p^2-3)x+p^2=0$는 서로 다른 두 실근을 갖는데, 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면, 제시문 (가)에 의하여

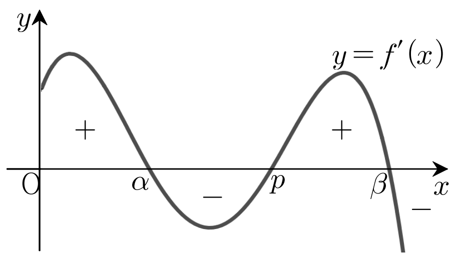
$\alpha+\beta=p^2(p^2-3)>0$, $\alpha\beta=p^2>0$이므로 $0<\alpha<p<\beta$임을 알 수 있다.

$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow p^2(1+x)^{\frac{3}{2}}\ge\sqrt{x}(x+p^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow p^4(1+x)^3-x(x+p^2)^3\ge 0$이므로

$f'(x)$의 부호는 $p^4(1+x)^3-x(x+p^2)^3$의 부호와 일치한다. 그러므로

$p^4(1+x)^3-x(x+p^2)^3=(p^2-x^2)\{x^2-p^2(p^2-3)x+p^2\}=-(x+p)(x-p)(x-\alpha)(x-\beta)$의

$x>0$일 때, 부호를 조사하면



이므로, 제시문 (나)에 의해 $x>0$일 때, $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	p	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$		+		-		+		-
$f(x)$	1	↗		↘		↗		↘

최솟값이 될 수 있는 값은 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1=f(0)$이고 $f(p)=\frac{2}{\sqrt{1+p}}$ 인데

$p \geq 3$이면 $f(p) = \dfrac{2}{\sqrt{1+p}} \leq 1$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $\dfrac{2}{\sqrt{1+p}}$이고

$2 < p < 3$이면 $f(p) = \dfrac{2}{\sqrt{1+p}} > 1$이므로 $f(x)$의 최솟값은 1이다.

(ii) $0 < p \leq 2$ 일 때

• $p \neq 1,\ p \neq 2$이면 $D < 0$이므로

$0 < x < p$이면 $(p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2-3)x + p^2\} > 0$이고

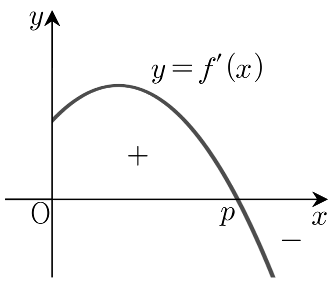
$x > p$이면 $(p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2-3)x + p^2\} < 0$이다.

• $p = 1$ 또는 $p = 2$이면 $D = 0$ 이고

$0 < x < p$이면 $(p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2-3)x + p^2\} > 0$이고

$x > p$ 이면 $(p^2 - x^2)\{x^2 - p^2(p^2-3)x + p^2\} < 0$이다.

$f'(x)$의 부호를 조사하면



제시문 (나)를 이용하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$		+		-
$f(x)$	1	↗		↘

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 = f(0)$ 이므로 $f(x)$의 최솟값은 1이다.

그러므로 (i)과 (ii)의 결과를 종합해 보면

$p \geq 3$이면 $f(x)$의 최솟값은 $\dfrac{2}{\sqrt{1+p}}$ 이고,

$0 < p < 3$ 이면 $f(x)$의 최솟값은 1이다.

[2-2]

[2-1]의 결과에 의하면

$ab \geq 3$이면 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + a^2b^2}}$는 최솟값 $\dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$을 가지므로

모든 $x \geq 0$에 대하여 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + a^2b^2}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$이다.

그러므로 $x=a^2$일 때

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2+a^2b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

즉, $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$가 성립한다.

[문항 3]

[3-1] 선택된 휴대폰이 물류센터 A, B에서 배송된 사건을 각각 A, B라고 정의하고 공장 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3$에서 생산된 사건을 각각 F_1, F_2, F_3이라고 정의한다.

3개의 공장에서 생산된 휴대폰의 수는 동일하므로 $\mathrm{P}(F_1)=\mathrm{P}(F_2)=\mathrm{P}(F_3)=\dfrac{1}{3}$이고 제시문 (가), (나)에 의해서 사건 A와 F_1이 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap F_1)=\mathrm{P}(A|F_1)\mathrm{P}(F_1)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

같은 방법으로 $A\cap F_2, A\cap F_3, B\cap F_2, B\cap F_3$의 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A\cap F_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cap F_3)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(B\cap F_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B\cap F_3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

각 공장에서 물류센터 A 또는 B로 보내지는 스마트폰과 폴더폰의 비율은 각 공장의 생산 비율과 동일하므로 본사 M에서 선택된 휴대폰의 확률은 다음과 같다.

(1) 물류센터 A

	스마트폰	폴더폰
공장 F_1	$\frac{9}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$
공장 F_2	$\frac{8}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$	$\frac{2}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$
공장 F_3	$\frac{7}{10}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{40}$	$\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{40}$

(2) 물류센터 B

	스마트폰	폴더폰
공장 F_1	0	0
공장 F_2	$\frac{8}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$	$\frac{2}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$
공장 F_3	$\frac{7}{10}\times\frac{1}{12}=\frac{7}{120}$	$\frac{3}{10}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{40}$

본사 M에서 선택된 2대의 휴대폰이 서로 다른 종류이면서 서로 다른 공장에서 생산되었고 서로 다른 물류센터를 거쳐 배송된 휴대폰일 확률은 제시문 (다)에 의하여

$$2\left[\frac{2}{15}\left(\frac{1}{30}+\frac{3}{40}\right)+\frac{7}{120}\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{30}\right)+\frac{1}{30}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{40}\right)+\frac{1}{40}\left(\frac{3}{10}+\frac{2}{15}\right)\right]=2\left[\frac{11}{600}+\frac{2}{75}\right]=\frac{9}{100}$$

[3-2] 선택할 수 있는 휴대폰의 종류는 BSF_2, BSF_3, BDF_2, BDF_3, ASF_1, ADF_1, ASF_2, ASF_3 ADF_2, ADF_3이다. 이 중에서 물류센터 B에서 배송된 휴대폰의 그룹을 P, F_1공장에서 생산하고 물류센터 A에서 배송된 휴대폰의 그룹을 Q, F_2 또는 F_3공장에서 생산하고 물류센터 A에서 배송된 휴대폰의 그룹을 R이라고 하자. 즉,

P	$BSF_2, BSF_3, BDF_2, BDF_3$
Q	ASF_1, ADF_1
R	$ASF_2, ASF_3, ADF_2, ADF_3$

P그룹 휴대폰을 처음 나열하는 수형도는 다음과 같다.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & P \\ & Q \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ P \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & P \\ & R \arrow[r, dash] & P \end{tikzcd}$$

P그룹 휴대폰 다음엔 반드시 Q그룹 또는 R그룹 휴대폰이 오며, Q그룹 휴대폰 다음엔 반드시 P그룹 휴대폰 2종류가 각각 오게 되고, R그룹 휴대폰 다음엔 P그룹 휴대폰이 반드시 와야 한다. 위 규칙에 의하여 표로 나타내면

휴대폰	P	Q	R
1대	1	1	1
2대	$1+1=2$	$1\times2=2$	1
3대	$2+1=3$	$2\times2=4$	2
4대	$4+2=6$	$3\times2=6$	3
5대	3^2	$2^2\cdot3$	$2\cdot3$
⋮	⋮	⋮	⋮
11대	3^5	$2^2\cdot3^4$	$2\cdot3^4$
12대	$2\cdot3^5$	$2\cdot3^5$	3^5
⋮	⋮	⋮	⋮
18대	$2\cdot3^8$	$2\cdot3^8$	3^8

P그룹, Q그룹, R그룹 휴대폰은 각각 4종류, 2종류, 4종류이므로

$$k_{11} = 4\cdot3^5 + 2\cdot2^2\cdot3^4 + 4\cdot2\cdot3^4 = 7\cdot2^2\,3^4$$

$$k_{18} = 4\cdot2\cdot3^8 + 2\cdot2\cdot3^8 + 4\cdot3^8 = 2^4\cdot3^8$$

21 서울과학기술대학교 모의[21)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학 (3문항, 11문제)	100분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (34점)

왕복 $10\,\mathrm{km}$의 거리를 갑과 을이 다음과 같은 방법으로 두 번 경주를 한다. 갑이 출발한지 20분 후에 을이 출발하고, 시간은 이때부터 측정하기로 한다.

(1) 첫 번째 경주: 갑이 갈 때는 $10\,\mathrm{km/h}$의 속력으로 올 때는 $8\,\mathrm{km/h}$의 속력으로 뛰고, 을이 갈 때는 $15\,\mathrm{km/h}$의 속력으로 올 때는 $12\,\mathrm{km/h}$의 속력으로 자전거를 탄다.

(2) 두 번째 경주: 갑의 속도는 $v_1(t)$이고 을의 속도는 $v_2(t)$이다. 이때 $v_1(t)$와 $v_2(t)$는 시간 t에 대하여 미분가능한 함수이다.

[1.1] 첫 번째 경주에서 두 사람이 서로 반대 방향으로 가면서 마주치는 지점이 있음을 사잇값 정리(중간값 정리)를 이용하여 보이시오.

[1.2] 첫 번째 경주에서 두 사람이 서로 반대 방향으로 가면서 마주치는 지점은 출발점으로부터 얼마나 떨어져있는지 그 거리를 구하시오.

[1.3] 두 번째 경주에서 두 사람의 속도가 같은 시각이 두 번 이상이라면, 두 사람의 가속도가 같은 시각이 있음을 평균값 정리를 이용하여 보이시오.

21) 서울과학기술대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 페르마의 원리에 의하면 빛은 최단 시간으로 이동할 수 있는 경로를 택한다.

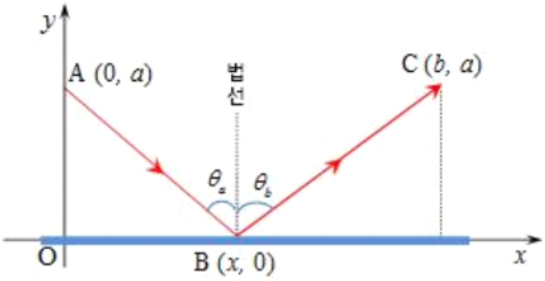
(나) <그림 1>은 점 A에서 출발한 빛이 x축에 놓여있는 어떤 판의 점 B에서 반사되어 점 C까지 진행하는 것을 나타낸다.

(다) <그림 2>은 왼쪽 구멍을 통해 들어온 레이저 빛이 평행한 두 개의 판 사이에서 짝수 번 반사된 후 오른쪽 구멍을 통해 나와 사다리꼴 모양의 목표물을 맞히는 것을 나타낸다. 두 판의 가로 길이는 100cm이고 세로 방향으로 10cm만큼 떨어져있다. 레이저 빛의 입사각 θ의 범위는 $0° \sim 60°$이다. (단, 빛의 산란, 회절 및 판의 두께 효과 등은 무시한다.)

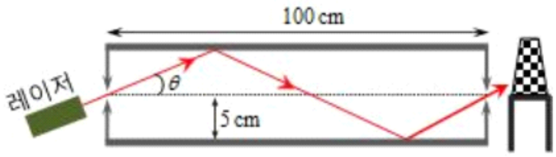
(라) 빛이 판에서 반사될 때 빛 세기는 입사하는 빛 세기에 비해 4%가 줄어든다.

(마) 필요할 경우 다음을 이용하라.

$$\sqrt{3} = 1.732,\ \log 2 = 0.301,\ \log 3 = 0.477$$



<그림 1>



<그림 2>

[2.1] 점 A에서 점 C까지 빛이 이동할 때 걸린 시간을 x의 함수 $f(x)$로 나타내시오. (단, 빛의 속력은 v이다.)

[2.2] 페르마 원리를 이용하여 $\theta_a = \theta_b$임을 보이시오.

[2.3] 빛의 반사가 가능한 최대 횟수는 얼마인지 구하시오.

[2.4] 최대 횟수로 반사된 뒤 오른쪽 구멍으로 나온 빛 세기는 원래 빛 세기의 반값보다 큰지 작은지 밝히시오.

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

어떤 건물에 방이 4개 있다. 두 사람이 다음의 규칙에 따라 마일리지를 획득하는 게임을 한다.

(1) 처음에 두 사람은 서로 다른 방에 있다.

(2) 한 번 게임을 할 때마다 현재 있는 방에 머무를 수 없고, 반드시 다른 방으로 이동해야 한다.

(3) 서로 상대방이 어떤 방으로 이동할지 알 수 없다.

(4) 두 사람이 한 방에서 만날 때마다 두 사람에게 각각 마일리지 9포인트가 주어진다.

[3.1] 현재 두 사람이 만났을 때, 다음 게임에서 만날 확률과 만나지 못할 확률을 각각 구하시오. 그리고 현재 두 사람이 만나지 못했을 때, 다음 게임에서 만날 확률과 만나지 못할 확률을 각각 구하시오.

[3.2] n이 자연수일 때, n번째 게임에서 두 사람이 처음으로 만날 확률을 구하시오.

[3.3] 게임을 세 번 할 때, 한 사람이 얻는 마일리지의 확률분포를 구하시오.

[3.4] 게임을 세 번 할 때, 한 사람이 얻는 마일리지의 기댓값을 구하시오.

• 풀어보기

문제1. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-12t+k\ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀔 때, k의 값은? (2017년 6월 모평)

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

문제2. 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같으면 한 개의 동전을 4번 던지고, 나온 눈의 수가 다르면 한 개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때, 동전을 4번 던졌을 확률은? (2017년 6월 모평)

① $\dfrac{3}{23}$　② $\dfrac{5}{23}$　③ $\dfrac{7}{23}$　④ $\dfrac{9}{23}$　⑤ $\dfrac{11}{23}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④

$v=3t^2-12=3(t-2)(t+2)$

운동방향이 바뀔 때 $v=0$이므로 $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.

그때 위치가 원점이므로

$0=2^3-12\cdot 2+k$ 이다.

따라서 $k=16$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ①

주사위의 눈이 같은 사건 A, 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건 B라 하자.

주사위의 눈이 같아서 동전을 4번 던진 후 뒷면과 앞면이 나온 횟수가 같을 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2^4}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$$

이다.

주사위의 눈이 달라서 동전을 2번 던진 후 뒷면과 앞면의 나온 횟수가 같을 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{5}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{2^2}=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

이다.

따라서

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{5}{12}}=\frac{3}{23}$$

이다.

[문제 1] 대학발표 예시답안

[1.1] 측정을 시작할 때 갑은 $\frac{10}{3}$km되는 지점에 있고 $\frac{1}{6}$시간 후에 반환점에 도달하며 $\frac{1}{3}$시간 후에는 반환점으로부터 $\frac{4}{3}$km되는 지점에 있다. 측정을 시작할 때 을은 출발점에 있고 $\frac{1}{3}$시간 후에 반환점에 도달한다. 측정을 시작한지 t시간 후의 갑과 을의 출발지점으로부터의 거리를 각각 $A(t)$, $B(t)$라 하면, $A(t)=B(t)$가 되는 t가 0과 $\frac{1}{3}$사이에 존재함을 보이면 된다.

$$f(t)=A(t)-B(t)$$

라 하면, $f(t)$는 연속이고

$$f(0)=A(0)-B(0)=\frac{10}{3}>0$$

이고

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=A\left(\frac{1}{3}\right)-B\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{3}-5=-\frac{4}{3}<0$$

이다. 사잇값 정리(중간값 정리)에 의하여 $f(t)=A(t)-B(t)=0$이 되는 t가 존재한다. 즉, $A(t)=B(t)$가 되는 t가 존재한다.

[1.2] 출발점으로부터 x km 떨어진 지점에서 두 사람이 만났다고 하자. $\frac{1}{6}$시간 후에 갑은 반환점에 있고 을은 출발점으로부터 $\frac{5}{2}$ km 지점에 있다. 이때부터 t시간 후 두 사람이 만났다고 하면

$$t=\frac{5-x}{8},\ t=\frac{x-\frac{5}{2}}{15}$$

이므로

$$\frac{5-x}{8}=\frac{x-\frac{5}{2}}{15}$$

이다. 이 방정식을 풀면 $75-15x=8x-20$이므로 $x=\frac{95}{23}$ km이다.

[1.3] $g(t)=v_1(t)-v_2(t)$라 하자. 두 사람의 속도가 같은 시각을 t_1과 t_2라 하면 $g(t_1)-g(t_2)=0$이다.
평균값 정리에 의하여

$$0=\frac{g(t_1)-g(t_2)}{t_1-t_2}=g'(c)$$

가 되는 c가 t_1과 t_2사이에 존재한다. 그런데 $g'(c)=v_1'(c)-v_2'(c)=a_1(c)-a_2(c)$이므로

$$a_1(c)=a_2(c)$$

이다.

[문제 2] 대학발표 예시답안

[2.1] 이동거리는 선분의 길이 $\overline{AB}+\overline{BC}$이므로 시간

$$f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{v}$$

이다.

[2.2] 시간 $f(x)$가 최소가 되는 조건을 찾으면 된다. $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{v}\left(\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{2(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}\right)$$

이다. 그런데 $f'(0)<0$이고 $f'(b)>0$이므로 $f'(x)=0$일 때 $f(x)$는 최소이다. 따라서

$$\sin\theta_a=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}=\sin\theta_b$$

즉, $\theta_a=\theta_b$이다.

[2.3] n번 반사될 때 $\tan\theta=\dfrac{\frac{10}{2}}{\frac{100}{2n}}=\dfrac{n}{10}$ 이다.

16번 반사될 때 $\tan\theta=\dfrac{16}{10}=1.6$이므로 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}=1.732$보다 작다. 하지만 18번 반사될 때는 $\tan\theta=\dfrac{18}{10}=1.8$이므로 1.732보다 크다. 따라서 최대 반사 횟수는 16번이다.

[2.4] 원래 빛 세기를 I_0라 하자. 1번 반사되면 $I_0(1-0.04)=0.96I_0$, 2번 반사되면 $0.96\,I_0(1-0.04)=0.96^2\,I_0$이고, n번 반사되면 $0.96^n\,I_0$가 된다. 최대 반사가 16번이 가능하므로 나오는 빛 세기는 $0.96^{16}\,I_0$이 된다.
이를 $0.5\,I_0$와 비교해 보면 된다.

$$16\log(0.96)=16\log(\log3+5\log2-2)=16\,(0.477+5\times0.301-2)=-0.288$$

이고

$$\log(0.5)=-\log2=-0.301$$

즉, $0.96^{16}>0.5$이 성립하므로, 원래 빛 세기의 반값보다 크다.

[문제 3] 대학발표 예시답안
[3.1] 현재 두 사람이 만났을 때 다음 게임에서

$$\text{만날 확률은 }\left(\frac{1}{3}\right)^2\times3=\frac{1}{3}\text{, 만나지 못할 확률은 }1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

이다. 그리고 현재 두 사람이 만나지 못했을 때 다음 게임에서

$$\text{만날 확률은 }\left(\frac{1}{3}\right)^2\times2=\frac{2}{9}\text{, 만나지 못할 확률은 }1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

이다.

[3.2] n번째 게임에서 처음으로 만날 확률은 $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{n-1}\times\dfrac{2}{9}$ 이다.

[3.3] 세 번의 게임 동안 한 사람이 획득하는 마일리지를 확률변수 X라고 하자. 세 번의 게임 동안 만나는 횟수는 0, 1, 2, 3이며 이에 따른 확률변수 X의 값은 0, 9, 18, 27이다.

(ⅰ) $P(X=0)=\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{343}{729}$

(ⅱ) $P(X=9)=\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{266}{729}$

(ⅲ) $P(X=18)=\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{34}{243}$

(ⅳ) $P(X=27)=\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{81}$

이때 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	9	18	27	계
$P(X=x)$	$\frac{343}{729}$	$\frac{266}{729}$	$\frac{34}{243}$	$\frac{2}{81}$	1

[3.4] 기댓값 $E(X)$는 다음과 같다.

$$E(X)=9\times P(X=9)+18\times P(X=18)+27\times(X=27)$$
$$=9\times\frac{266}{729}+18\times\frac{34}{243}+27\times\frac{2}{81}=\frac{524}{81}$$

22 서울과학기술대학교 수시(오후)[22)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학 (3문항, 10문제)	100분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 양수 x, y, z에 대하여

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

이므로

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0$$

이 성립한다. 따라서 $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ 이고, $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$ 으로 놓으면

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

임을 알 수 있다. 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

(나) 좌표공간의 임의의 두 점 $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3), \mathrm{Q}(y_1, y_2, y_3)$의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$라고 하고 $\vec{p}$와 $\vec{q}$가 이루는 각을 θ라고 하면, $\vec{p}$와 $\vec{q}$의 내적은 $\vec{p} \cdot \vec{q} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ 또는 $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$ 이다. $|\vec{p}|^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $|\vec{q}|^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) &= |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 \\ &\geq (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2 \\ &= (\vec{p} \cdot \vec{q})^2 \\ &= (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\end{aligned}$$

이다. 즉, 부등식

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \geq (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

이 성립함을 알 수 있다. 등호는 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$일 때 성립한다.

(다) 미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서

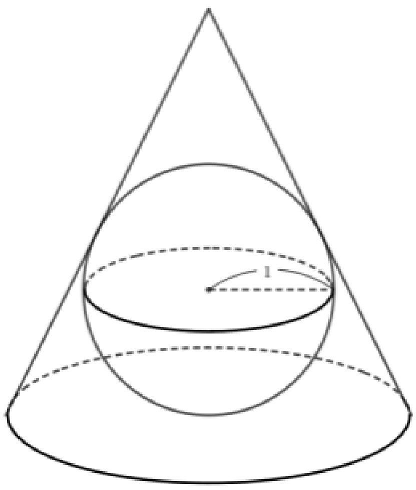
- $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
- $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

22) 서울과학기술대학교 홈페이지

[1.1] 뚜껑이 없는 직육면체 상자의 겉넓이가 75이다. 제시문 (가)의 부등식 (1)을 이용하여, 이 상자의 부피의 최댓값을 구하시오.

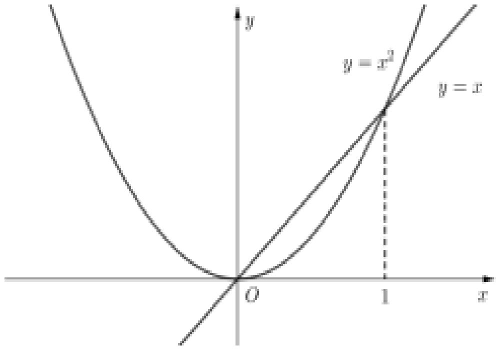
[1.2] 제시문 (나)의 부등식 (2)를 이용하여, $x^2+3y^2+8z^2=1$을 만족하는 양수 x, y, z에 대하여 $x+9y+8z$의 최댓값을 구하고, 이때 세 양수 x, y, z를 구하시오.

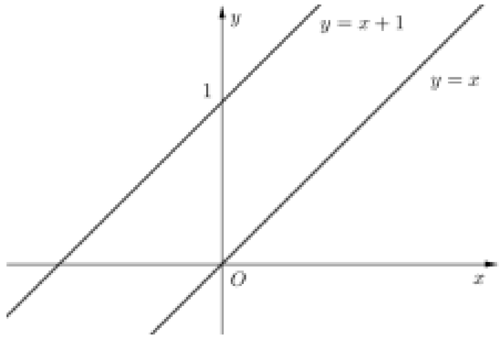
[1.3] 반지름이 1인 구가 있다. 이 구면에 외접하는 직원뿔의 겉넓이(밑면은 제외) S를 최소로 하는 직원뿔의 높이 x를 구하시오.



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 $x=a$에서 만날 때, 즉 $f(a)=a$일 때, a를 함수 f의 고정점이라 한다. 예를 들면 $f(x)=x^2$의 고정점은 0과 1이고, $g(x)=x+1$의 고정점은 존재하지 않는다.





(나) 사잇값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 특히 $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(다) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린 구간 (a, b)에서 미분가능이면 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

[2.1] 집합 $X=\{x|0 \leq x \leq 1\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 X에서 연속일 때, f의 고정점이 집합 X에 존재함을 다음과 같이 증명한다. 빈 칸을 모두 채우시오.

[증명] $f(0)=0$ 또는 $\boxed{\text{A}}$이면 0 또는 1은 고정점이다. $f(0) \neq 0$이고 $f(1) \neq 1$일 때, $g(x)=f(x)-x$라 하면, g는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이다. $\boxed{\text{B}}>0$이고 $\boxed{\text{C}}<0$이므로 사잇값 정리에 의해 $\boxed{\text{D}}$인 c가 열린 구간 $(0, 1)$에 존재한다. $f(c)=c$이므로 c는 고정점이다.

[2.2] 집합 $X=\{x|0 \leq x \leq 1\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 X에서 연속이고, 열린 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하면, 문제 [2.1]에 의해 f의 고정점이 집합 X에 존재하는 것을 알 수 있다. 만약 열린 구간 $(0, 1)$에 속하는 모든 x에서 $f'(x) \neq 1$이면, 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 f의 고정점이 하나만 존재함을 보이시오.

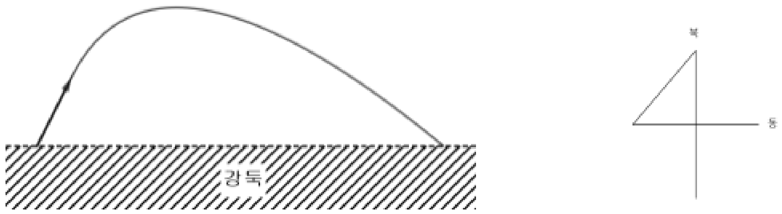
[2.3] 함수 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$의 고정점이 존재하지 않음을 보이시오.

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 작은 배가 강둑에서 출발하여 흐르는 강물에 수직 방향으로 움직인다. 시각 t에서 강물에 대한 배의 속도 $\vec{v}(t)$는 다음과 같다. (단, $\overrightarrow{e_1}=(1, 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0, 1)$)

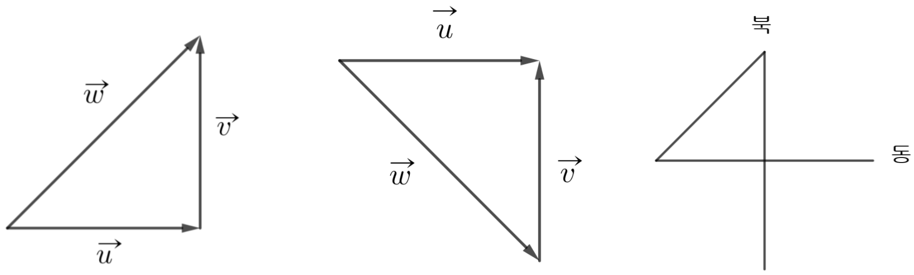
$$\vec{v}(t)=\begin{cases} 2t\overrightarrow{e_2} & (0 \le t < 2) \\ (8-2t)\overrightarrow{e_2} & (t \ge 2) \end{cases}$$

강물은 배가 움직이는 동안 동쪽으로 시각 t에서 $\overrightarrow{u}(t)=t\overrightarrow{e_1}$의 속도로 흐르고 있어서, 강둑에 서 있는 사람에게는 배가 그림과 같은 궤적을 따라 움직이는 것으로 관찰된다. (단, 배의 크기는 무시하기로 한다.)



(나) 강둑에 대한 강물의 속도를 $\vec{u}$, 강물에 대한 배의 속도를 $\vec{v}$, 강둑에 대한 배의 속도를 $\vec{w}$라 하면, 세 속도 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$$



[3.1] 배가 강둑에서 북쪽으로 가장 멀리 도달할 때까지 걸린 시간을 구하시오.

[3.2] 배가 강둑에서 북쪽으로 가장 멀리 도달할 때 배와 강둑 사이의 거리를 구하시오.

[3.3] 배가 강둑을 출발하여 제시문 (가)의 그림과 같이 다시 강둑에 부딪칠 때까지, 동쪽으로 움직인 총 거리를 구하시오.

[3.4] 배가 출발한 후 6초가 되는 순간 강물에 대한 배의 속도를 $\vec{v}(t)=\{-4+c(t-6)\}\overrightarrow{e_2}$로 변경하였더니 강둑에 도달할 때 $\vec{v}(t)=\vec{0}$이 되었다. 이때 상수 c를 구하시오.

• 풀어보기

문제1. 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(a,\,2a)$에서 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$의 최솟값을 구하시오.(2017 3월 전국연합 가형)

문제2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)\neq 1$
> (나) $f(x)+f(-x)=0$
> (다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(2017 대입 6월 모평 가형)

> <보기>
> ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq -1$이다.
> ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
> ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제3. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0<t<\pi)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\,y)$가

$$x=\sqrt{3}\sin t,\ y=2\cos t-5$$

이다. 시각 $t=\alpha\,(0<\alpha<\pi)$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 평행할 때, $\cos\alpha$의 값은? (단, O는 원점이다.)(2018 대입 대수능 가형)

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{3}{10}$ ④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 90

$\mathrm{A}\left(\alpha,\ -\dfrac{2}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\ -\dfrac{2}{\beta}\right)$라 하자. $y=-\dfrac{2}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{x^2}$

점 A를 지나는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{\alpha^2}(x-\alpha)-\dfrac{2}{\alpha}$ 즉, $y=\dfrac{2}{\alpha^2}x-\dfrac{4}{\alpha}$ …… ㉠

같은 방법으로 점 B를 지나는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{\beta^2}x-\dfrac{4}{\beta}$ …… ㉡

㉠, ㉡이 모두 $\mathrm{P}(a,\ 2a)$를 지나므로

$2a=\dfrac{2a}{\alpha^2}-\dfrac{4}{\alpha}$, $2a=\dfrac{2a}{\beta^2}-\dfrac{4}{\beta}$ 즉, $a\alpha^2+2\alpha-a=0$, $a\beta^2+2\beta-a=0$

이 성립하고, α, β는 이차방정식 $ax^2+2x-a=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해서 $\alpha+\beta=-\dfrac{2}{a}$, $\alpha\beta=-1$를 이용하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$

$=(a-\alpha)^2+\left(2a+\dfrac{2}{\alpha}\right)^2+(a-\beta)^2+\left(2a+\dfrac{2}{\beta}\right)^2$

$=10a^2-2a(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+8a\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)+4\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)$

$=10a^2+4+\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+8a\times\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+4\times\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$=10a^2+\dfrac{20}{a^2}+30$,

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\alpha-\beta)^2+\left(-\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}\right)^2=5(\alpha-\beta)^2=5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=5\left(\dfrac{4}{a^2}+4\right)=\dfrac{20}{a^2}+20$

그러므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=10a^2+\dfrac{40}{a^2}+50$이다.

$a^2=t\,(t>0)$으로 놓고 $f(t)=10t+\dfrac{40}{t}+50$이라 하면 $f'(t)=10-\dfrac{40}{t^2}=\dfrac{10(t^2-4)}{t^2}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	90	↗

함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최솟값 90을 갖는다.

$a^2=2$이므로 $a=\sqrt{2}$에서 점 P의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$의 최솟값은 90이다.

[다른 풀이]
절대부등식을 이용하면

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=10a^2+\frac{40}{a^2}+50\ge 2\sqrt{10a^2\times\frac{40}{a^2}}+50=2\times20+50=90$$

(단, 등호는 $10a^2=\dfrac{40}{a^2}$ 즉, $a=\sqrt{2}$ 일 때 성립한다.)

풀어보기(문제2) 정답 ①
ㄱ. 조건 (가)에 의하여 $f(-x)\ne1$ 이고 조건 (나)에 의하여 $f(x)=-f(-x)\ne-1$ 이다.
(참)
[다른 풀이]
$f(a)=-1$ 인 실수 a가 존재하면 (나)에 의해 $-f(-a)=-1$ 이고 $f(-a)=1$ 이므로 (가)에 모순이다. 따라서 $f(x)\ne-1$ 이다. (참)
ㄴ. $f(x)$는 연속이고 원점 대칭 함수이므로 $f(x)>1$ 인 실수 x가 존재하면 사잇값 정리에 의해 $f(k)=1$ 인 실수 k가 존재해야 한다. 이것은 (가)에 모순이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<1$ 이다. 같은 방법으로 $f(x)>-1$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 $-1<f(x)<1$ 이다. (다)에서

$$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}=1-\{f(x)\}^2$$

이므로 $f'(x)>0$ 이고 $f(x)$는 증가함수이다. (거짓)
ㄷ. $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$ 이고

$$\lim_{y\to x}\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\{f'(x)\}^2-\{f'(y)\}^2}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\{f'(x)+f'(y)\}\{f'(x)-f'(y)\}}{y-x}$$
$$=-2f'(x)f(x)$$

이므로 $f''(x)=-2f'(x)f(x)$ 이다.
$f''(x)=-2f'(x)f(x)=0$ 를 만족하는 x의 값은 0이고 $x=0$일 때, $f''(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 $f''(x)$는 오직 하나의 변곡점을 갖는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

풀어보기(문제3) 정답 ④
점 P의 시각 $t\,(0<t<\pi)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 $x=\sqrt{3}\sin t,\ y=2\cos t-5$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cot t,\ \frac{dy}{dt}=-2\sin t$$

따라서 점 P의 시각 $t=\alpha\,(0<\alpha<\pi)$에서의 속도 $\vec{v}=(\sqrt{3}\cos\alpha,\ -2\sin\alpha)$
한편, 점 P의 시간 $t=\alpha\,(0<\alpha<\pi)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 $x=\sqrt{3}\sin\alpha,\ y=2\cos\alpha-5$
이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\sqrt{3}\sin\alpha,\ 2\cos\alpha-5)$
시각 $t=\alpha(0<\alpha<\pi)$에서의 점 P의 속도 $\vec{v}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 평행하므로

$$\vec{v}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (\text{단, } t\text{는 0이 아닌 실수})$$

즉, $(\sqrt{3}\cos\alpha,\ -2\sin\alpha)=t(\sqrt{3}\sin\alpha,\ 2\cos a-5)$에서

$$\sqrt{3}\cos\alpha=t\times\sqrt{3}\sin\alpha \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$-2\sin\alpha=t\times(2\cos\alpha-5) \quad\cdots\cdots ㉡$$

$0<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서 $t=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

이므로 이 값을 ㉡에 대입하면 $-2\sin\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times(2\cos\alpha-5)$

$-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-5\cos\alpha$

이때, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$이므로

$-2(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-5\cos\alpha$

$-2=-5\cos\alpha$ 따라서 $\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$

[문제1] 대학발표 예시답안

[1.1]

$x,\ y,\ z$를 각각 뚜껑이 없는 상자의 길이(가로), 폭(세로), 높이라고 하자.
그러면 $75=xy+2xz+2yz$이고, 제시문 (가)의 부등식으로부터

$$\frac{75}{3}=\frac{xy+2xz+2yz}{3}\ge\sqrt[3]{4x^2y^2z^2}$$

이 성립한다. 양변을 세제곱을 하고, 이 상자의 부피를 V라고 할 때

$$25^3=\left(\frac{xy+2xz+2yz}{3}\right)^3\ge 4x^2y^2z^2=4V^2$$

이므로 $V^2\le\dfrac{25^3}{4}$, $V\le\dfrac{1}{2}25^{\frac{3}{2}}=\dfrac{125}{2}$가 성립한다. 따라서 V의 최댓값은 $\dfrac{125}{2}$이다.

[1.2]

부등식 $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\le(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$에 의하여,

$$(x+9y+8z)^2\le\{x^2+(\sqrt{3}\,y)^2+(\sqrt{8}\,y)^2\}\left\{1^2+\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)^2+\sqrt{8^2}\right\}$$

$$=\left\{1^2+\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)^2+\sqrt{8^2}\right\}$$

$$=36$$

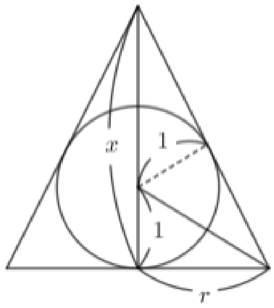
이 성립한다. 따라서 $x+9y+8z$의 최댓값은 6이다.
등호가 성립하기 위한 조건으로

$$x=k,\ \sqrt{3}\,y=\frac{9}{\sqrt{3}}k,\ \sqrt{8}\,z=\sqrt{8}\,k,\ \text{즉}\ x=k,y=3k,z=k\,(k>0)$$

이것을 $x^2+3y^2+8z^2=1$에 대입하면

$k^2+3\cdot 9k^2+8k^2=1,\ 36k^2=1, k=\frac{1}{6}$이므로 $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{6}$이다.

[1.3]
직원뿔 밑면의 반지름을 r, 높이를 x라고 하자. 그러면



$$\frac{1}{2}rx=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sqrt{x^2+r^2}=\frac{1}{2}(r+\sqrt{x^2+r^2})$$

$$rx=r+\sqrt{x^2+r^2},\ r(x-1)=\sqrt{x^2+r^2}\text{이므로}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $r^2=\frac{x}{x-2}\ (x>2)$

$$S=\pi r\sqrt{x^2+r^2}\ (\text{직원뿔의 겉넓이})$$
$$=\pi\sqrt{\frac{x}{x-2}}\sqrt{x^2+\frac{x}{x-2}}=\frac{\pi x(x-1)}{x-2}(x>2)$$

$$S'=\frac{\pi(x^2-4x+2)}{(x-2)^2},\ x^2-4x+2=0\ \ \therefore x=2+\sqrt{2}\ (\because x>2)$$

S는 구간 $(2, 2+\sqrt{2})$에서 감소하고, 구간 $(2+\sqrt{2}, \infty)$에서 증가한다.
그러므로 S는 $x=2+\sqrt{2}$ 일 때, 최솟값 $(3+2\sqrt{2})\pi$을 갖는다.
따라서 $x=2+\sqrt{2}$ 이다.

[문제2] 대학발표 예시답안

[2.1]
$f(0)=0$ 또는 $\boxed{f(1)=1}$이면 0 또는 1은 고정점이다. $f(0)\neq 0$이고 $f(1)\neq 1$일 때, $g(x)=f(x)-x$라 하면, g는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이다. $\boxed{g(0)}>0$이고 $\boxed{g(1)}<0$이므로 사이값 정리에 의해 $\boxed{g(c)=0}$인 c가 열린 구간 $(0, 1)$에 존재한다. $f(c)=c$이므로 c는 고정점이다.

$$\text{(A)}f(1)=1\ \ \text{(B)}g(0)\ \ \text{(C)}g(1)\ \ \text{(D)}g(c)=0$$

[2.2]

고정점이 유일하다는 것을 보이기 위해 두 개의 고정점 a, b가 집합 X에 있다고 가정하면 $f(a)=a, f(b)=b$이다. f는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속, 열린 구간 (a, b)에서 미분가능이므로 평균값 정리에 의해 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 c가 열린 구간 (a, b)에 존재한다.

그러나 a, b는 고정점이므로 $f'(c)=\dfrac{b-a}{b-a}=1$이다. 따라서 열린 구간 $(0, 1)$에 속하는 모든 x에서 $f'(x)\neq 1$이라는 조건에 모순이다. 그러므로 고정점은 유일하다.

[2.3]

$g(x)=f(x)-x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-x$라 하자.

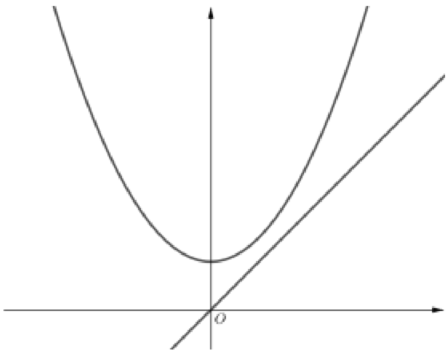
$g'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})-1=0$으로 부터 $e^{2x}-2e^x-1=0$

따라서 $e^x=1+\sqrt{2}$이므로 $x=\ln(1+\sqrt{2})$이다.

x		$\ln(1+\sqrt{2})$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$

따라서 $g(x)$의 극솟값(최솟값)은 $g(\ln(1+\sqrt{2}))=\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$이다.

한편 $1+\sqrt{2}=2.4<2.7=e$이므로 $\ln(1+\sqrt{2})<\ln e=1$이고, 최솟값은 $\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})>0$이다. 따라서 $g(x)=0$인 해가 존재하지 않으므로 $f(x)=x$을 만족하는 해가 존재하지 않고, 따라서 f의 고정점은 존재하지 않는다.



[문제3] 대학발표 예시답안

[3.1]

배가 북쪽으로 가장 멀리 도달할 때 $\vec{v}(t)=\vec{0}$이어야 한다. 따라서 $8-2t=0$이 성립해야 하며 이 방정식을 풀면 $t=4$이다.

[3.2]

$\vec{v}(t)=v(t)\overrightarrow{e_2}$ 라 하자. 강둑의 수직 방향 위치를 $y=0$ 이라고 하면, 배가 북쪽으로 가장 멀리 도달할 때 배의 위치 y는 다음과 같이 주어진다.

$$y=\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2 2tdt+\int_2^4 (8-2t)dt$$

위 식에서 적분을 하면, $4+8\times(4-2)-(4^2-2^2)=8$이다.

[3.3]

배가 북쪽으로 가장 멀리 도달한 후 다시 강둑으로 향한다. $t=4$일 때 $y=8$이며, 강둑을 향하여 움직인 후 $t=t_f$에서 $y=0$이 되어야 한다. $t=4$부터 $t=t_f$까지

$v(t)=8-2t$ 이므로 $y=8+\int_4^{t_f}(8-2t)dt=0$이 된다.

위 식으로부터 2차 방정식 $t_f^2-8t_f+8=0$을 얻는다. 이 방정식을 풀었을 때, 얻을 수 있는 해 중 적절한 해는 $t_f=4+2\sqrt{2}$ 이다.

한편, 시간 t_f 동안 배는 동쪽 방향으로 $u(t)=1t$의 속력으로 움직인다. 동쪽 방향의 이동거리를 x라 하면, $x=\int_0^{t_f}u(t)dt=\int_0^{4+2\sqrt{2}}1tdt=\frac{1}{2}(4+2\sqrt{2})^2=12+8\sqrt{2}$ 이다.

[3.4]

출발 후 $t=6$일 때 배의 북쪽 방향의 위치 y는

$y=\int_0^6 v(t)dt=\int_0^2 2tdt+\int_2^6(8-2t)dt$ 으로 주어진다. 위 식에서 적분을 하면 $y=4$가 된다.

따라서 $t=6$ 이후에는 남쪽으로 $8-4=4$만큼 더 이동한 후 $v(t)=0$이 되어야 한다.

y축 방향으로의 위치 변화 $\triangle y$는

$\triangle y=-4=\int_6^{t_f}\{-4+c(t-6)RIGHTdt$ 으로 주어지며, 적분을 하면 다음과 같다.

$$-4=(-4-6c)(t_f-6)+\frac{c}{2}(t_f{}^2-36)---(1)$$

한편 $v(t_f)=0$ 이어야 하므로,

$-4+c(t_f-6)=0$ 로부터 $c=\frac{4}{t_f-6}---(2)$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면 이차방정식 $t_f^2-14t_f+48=0$을 얻는다.

위 이차방정식을 풀었을 때 얻을 수 있는 해 중 적절한 해는 $t_f=8$이다.

$t_f=8$을 식 (2)에 대입하면 $c=2$이다.

23 서울시립대학교 모의[23)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(4문제)	120분

[문제 1] (100점)

좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$을 지나는 직선이 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 제1사분면의 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점 중에서 점 A에 가까운 점을 P라 하자. $\angle\mathrm{PAO}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\overline{\mathrm{AP}}-2}{\theta^2}$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

[문제 2] (100점)

한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD를 밑면으로 하고 높이가 3인 사각뿔 V−ABCD에서 밑면의 중심을 O라 하고, 삼각형 VAB, VBC의 무게중심을 각각 P, Q라 하자. 꼭짓점 V의 밑면 위로의 정사영이 선분 AC에 있다고 할 때, $\cos(\angle\mathrm{POQ})$의 최솟값을 구하여라.

23) 서울시립대학교 홈페이지

[문제 3] (총 100점)

흰 공과 빨간 공이 각각 1개씩 들어 있는 주머니가 있다. 세 명의 학생 A, B, C가 A, B, C 순서로 주머니에서 1개의 공을 임의로 꺼내고, 공을 꺼낼 때마다 바로 공 1개를 다시 채워 넣는다. 이때 A, B, C가 채워 넣는 공이 빨간색일 확률은 p이고, 흰색일 확률은 $1-p$이다.

(a) B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 흰 공과 빨간 공이 각각 1개일 확률을 구하여라. (50점)

(b) C가 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 구하여라. (50점)

[문제 4] (총 100점)

자연수 n과 세 함수

$$f(x)=x\cdot 2^x, \qquad g(x)=x-[x], \qquad h(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{n} & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

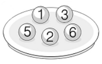
에 대하여, 합성함수 $y=g\circ f(x)$의 그래프와 함수 $y=h(x)$의 그래프와의 교점의 개수를 a_n이라 하자. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

(a) 필요하면 $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot 2^x=0$을 이용해서, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려라. (40점)

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}^2}{a_k a_{k+1}}$을 구하여라. (60점)

• 풀어보기

문제1. 주머니에 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 자연수 중 연속된 자연수의 최대 개수가 3인 사건을 A라 하자.

예를 들어 

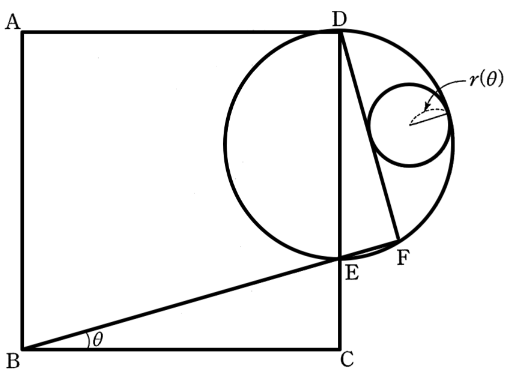
은 연속된 자연수의 최대 개수가 3이므로 사건 A에 속하고, 

은 연속된 자연수의 최대 개수가 2이므로 사건 A에 속하지 않는다. 사건 A가 일어날 확률은? (2016. 4월 전국연합)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{11}{42}$ ④ $\frac{13}{42}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

문제2. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle \mathrm{EBC}=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. 이때

$\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ (2016. 9월 모평)



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$ ④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ⑤

주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼내는 방법의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_5 = 252$$

(i) 연속된 세 수가 $\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우

4를 제외한 6개 중 2개를 선택하므로 ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$

(ii) 연속된 세 수가 $\{8,\ 9,\ 10\}$인 경우

7을 제외한 6개 중 2개를 선택하므로 ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$

(iii) 연속된 세 수가 $\{n+1,\ n+2,\ n+3\}$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$인 경우

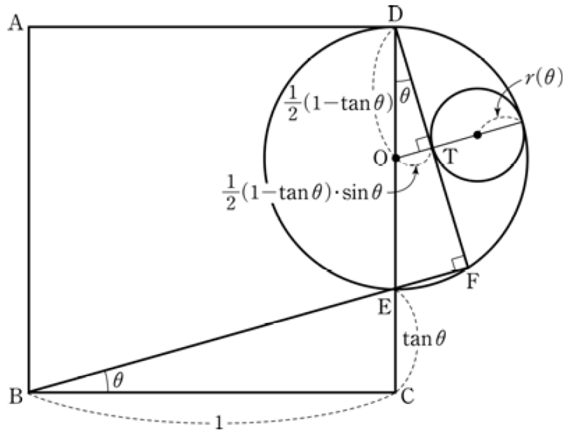
n과 $n+4$를 제외한 5개 중 2개를 선택하므로

$$6\times{}_5\mathrm{C}_2 = 60$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $n(A)=90$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{90}{252}=\dfrac{5}{14}$

풀어보기(문제2) 정답 ④



$\angle\mathrm{EBC}=\theta$이므로

$$\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{DEF}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

삼각형 DEF에서 $\angle\mathrm{DFE}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{EDF}=\theta$

한편, $\overline{\mathrm{EC}}=\tan\theta$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=1-\tan\theta$이고

선분 DE의 중점을 O이라 하면

$$\overline{\mathrm{DO}}=\frac{1-\tan\theta}{2}$$

직선 DF가 작은 원과 접하는 점을 T이라 하면

직각삼각형 DOT에서

$$\overline{\mathrm{OT}}=\left(\frac{1-\tan\theta}{2}\right)\times\sin\theta$$

$$\begin{aligned} r(\theta)&=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1-\tan\theta}{2}-\left(\frac{1-\tan\theta}{2}\right)\times\sin\theta\right\}\\ &=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1-\tan\theta}{2}\right)\times(1-\sin\theta)\\ &=\frac{(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{4}\end{aligned}$$

한편, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}+}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$에서 $\frac{\pi}{4}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\frac{\pi}{4}-$일 때, $t\to0+$이므로

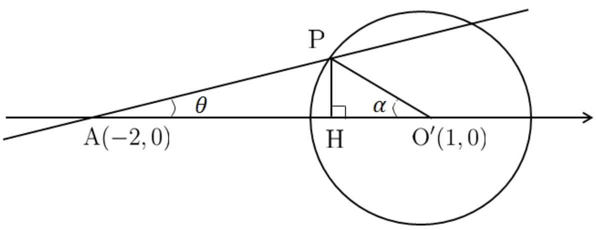
$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}&=\lim_{t\to0+}\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}}{t}\\ &=\lim_{t\to0+}\frac{2\tan\theta}{t(1+\tan\theta)}=\lim_{t\to0+}\frac{\tan\theta}{t}\times\lim_{t\to0+}\frac{2}{1+\tan\theta}\\ &=1\times2=2\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}&=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\frac{(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{4}}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\sin\theta}{4}\\ &=2\times\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})\end{aligned}$$

[문제 1] 대학발표 예시답안

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle\mathrm{PO'H}=\alpha$ 라 하자. (단, $\mathrm{O'}(1,0)$이다.)



이제 $\overline{\mathrm{AP}}=x$라 하자. 그러면 두 직각삼각형 PAH와 PHO′으로부터

$\overline{\mathrm{PH}}=x\sin\theta=\sin\alpha$이고 $\overline{\mathrm{AO'}}=x\cos\theta+\cos\alpha$인데, $\overline{\mathrm{AO'}}=3$이므로

$$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=(3-x\cos\theta)^2+(x\sin\theta)^2$$

이다. 그리고 이차방정식 $x^2-6\cos\theta x+8=0$을 풀면

$$x=3\cos\theta\pm\sqrt{9\cos^2\theta-8}$$

이다. 그런데 직선은 원과 두 점에서 만나야 하므로 θ의 값은 직선이 원에 접할 때의 각보다 작아야 한다. 원의 반지름이 1이고 $\overline{\mathrm{AO'}}=3$이므로

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}<\cos\theta<1$$

이다. 따라서 $9\cos^2\theta-8>0$이고, $\lim_{\theta\to0+}x=2$이므로 $x=3\cos\theta-\sqrt{9\cos^2\theta-8}$이다. 그러므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{x-2}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(3\cos\theta-2)-\sqrt{9\cos^2\theta-8}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{12(1-\cos\theta)}{\theta^2\left\{(3\cos\theta-2)+\sqrt{9\cos^2\theta-8}\right\}}$$

이고, $\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\frac{1}{2}$,

$\lim_{\theta\to0+}\frac{12}{\left\{(3\cos\theta-2)+\sqrt{9\cos^2\theta-8}\right\}}=6$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{x-2}{\theta^2}=3$$

이다.

[문제 2] 대학발표 예시답안

$\mathrm{A}(-3,-3,0)$, $\mathrm{B}(3,-3,0)$, $\mathrm{C}(3,3,0)$, $\mathrm{D}(-3,3,0)$이고, 꼭짓점 V의 z좌표가 3이 되도록 좌표축을 정하자. 그러면 $\mathrm{O}(0,0,0)$이고, 두 점 A, C를 지나는 직선의 방정식은 $y=x$, $z=0$이므로 $\mathrm{V}(3x,3x,3)$ $(|x|\le1)$로 나타낼 수 있다. 한편, $\mathrm{P}(x,x-2,1)$, $\mathrm{Q}(x+2,x,1)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2x^2+1$이다. 그리고 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{2x^2-4x+5}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{2x^2+4x+5}$이므로 내적의 정의에 의해

$$\cos(\angle\mathrm{POQ})=\frac{2x^2+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}\sqrt{2x^2+4x+5}}$$

이고, $\cos(\angle\mathrm{POQ})>0$ 이다.

이제 $t=4x^4+4x^2+25$라 하면 $|x|\le1$이므로 $25\le t\le33$이고

$$\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}\sqrt{2x^2+4x+5}}\right)^2=\frac{4x^4+4x^2+1}{4x^4+4x^2+25}=1-\frac{24}{t}$$

이다. 따라서 $\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}\sqrt{2x^2+4x+5}}\right)^2$의 최솟값이 $\frac{1}{25}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{POQ})$의 최솟값은 $\frac{1}{5}$이다.

[문제 3] 대학발표 예시답안

(a) A가 공을 채워 넣은 후 주머니에 빨간 공이 2개일 확률은, 흰 공을 꺼내고 빨간 공

을 넣어야 하므로 $\frac{p}{2}$이고,

흰 공과 빨간 공이 각각 1개일 확률은, 빨간 공을 꺼내고 빨간 공을 넣거나 흰 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로 $\frac{p}{2}+\frac{1-p}{2}=\frac{1}{2}$이며, 흰 공이 2개일 확률은 빨간 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로 $\frac{1-p}{2}$이다.

B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 흰 공과 빨간 공이 각각 1개인 경우는, A가 공을 채워 넣은 후 주머니에 있는 흰 공의 개수 n에 따라 다음의 3가지 경우가 있다.

(i) $n=0$인 경우: 흰 공을 넣어야 하므로 확률은 $\frac{p}{2}\cdot(1-p)$이다.

(ii) $n=1$일 경우: 빨간 공을 꺼내고 빨간 공을 넣거나, 흰 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로 확률은

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot p+\frac{1}{2}\cdot(1-p)\right\}=\frac{1}{4}\text{이다.}$$

(iii) $n=2$일 경우: 빨간 공을 넣어야 하므로 확률은 $\frac{1-p}{2}\cdot p$이다.

따라서 구하는 값은 $\frac{1}{4}+p(1-p)$이다.

(b) 같은 방법으로 B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 빨간 공이 2개일 확률은 $\frac{p}{2}\cdot p+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot p=\frac{p}{4}+\frac{p^2}{2}$이다.

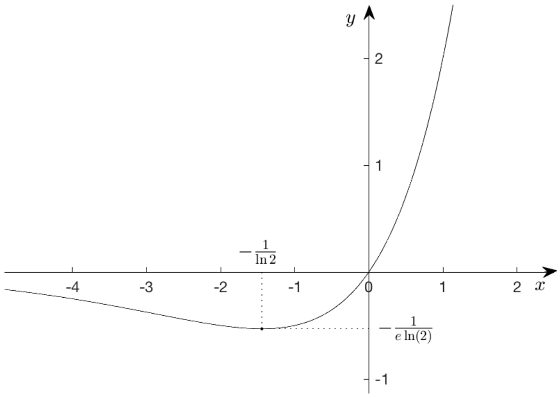
따라서 구하는 값은 $\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{4}+p(1-p)\right\}+\frac{p}{4}+\frac{p^2}{2}=\frac{1}{8}+\frac{3p}{4}$이다.

[문제 4] 대학발표 예시답안

(a) $f'(x)=2^x(1+x\ln 2)$이고 $f''(x)=2^x(2+x\ln 2)\ln 2$이다. 따라서 $x=-\frac{1}{\ln 2}$일 때 $f'(x)=0$이고 $f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=-\frac{1}{\ln 2}2^{-\frac{1}{\ln 2}}=-\frac{1}{2^{\log_2 e}\ln 2}=-\frac{1}{e\ln 2}$ 이므로, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\ln 2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\ln 2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	1	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e^2\ln 2}$	↘	$-\frac{1}{e\ln 2}$	↗	0	↗

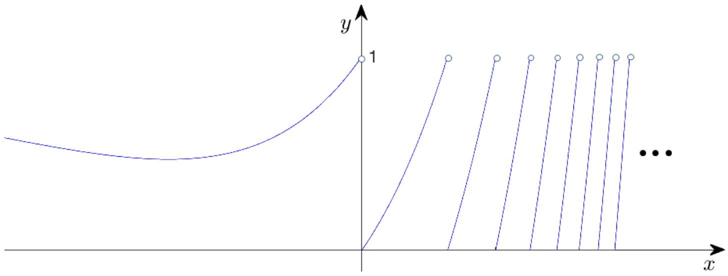
그런데 $2<e<4$이므로 $1<\log_2 e=\dfrac{1}{\ln 2}<2$이고 $0<\dfrac{1}{e\ln 2}<1$이다. 또한 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=0$이고 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



(b) 고정된 정수 k에 대해서 어떤 구간에 포함되는 모든 x가 $k \le f(x)<k+1$을 만족시키면

$$g\circ f(x)=f(x)-[f(x)]=f(x)-k$$

이므로, 주어진 그 구간에서 $y=g\circ f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축으로 $-k$만큼 평행이동한 그래프와 같다. 따라서 함수 $y=g\circ f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



(i) $x<0$일 때, $g\circ f(x)=f(x)+1$이므로 $x<0$에서 $y=g\circ f(x)$의 그래프와 $y=-x$의 그래프와의 교점의 개수는 1이다.

(ii) $x \ge 0$일 때, $f(0)=0$, $f(n)=n2^n$, $f'(0)=1$이므로 $x \ge 0$에서 $y=g\circ f(x)$의 그래프와 $y=\dfrac{x}{n}$의 그래프와의 교점의 개수는 $f(n)-1=n2^n-1$ 이다.

따라서 $a_n=n2^n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}^2}{a_k a_{k+2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}=n+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{3}{4}+n-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

이다.

24 서울시립대학교 수시[24)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수학Ⅰ·Ⅱ, 확률과 통계, 미적분Ⅰ·Ⅱ, 기하와 벡터	없음	수학(4문제)	120분

[문제 1] (총 100점)

다음 물음에 답하여라.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$의 값을 구하여라. (30점)

(b) 함수

$$F(x)=\begin{cases} x^3-3x & (x\le 0) \\ \dfrac{4x^2}{x^2+1} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 직선 $y=a$ (a는 $0\le a\le 2$인 상수)와 함수 $y=F(x)$의 그래프의 교점의 x좌표 중 최댓값을 M_a, 최솟값을 m_a라 하자. 구간 $[0,2]$에서 정의된 함수 $f(t)=M_t-m_t$에 대하여 $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$의 값을 구하여라 (70점)

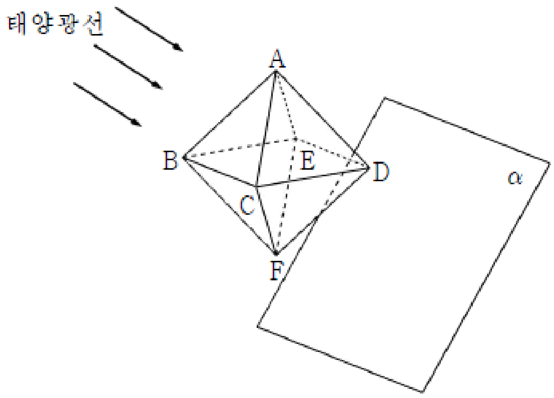
24) 서울시립대학교 홈페이지

[문제 2] (총 100점)

그림과 같은 한 모서리의 길이가 2인 정팔면체 ABCDEF에서 다음 물음에 답하여라.

(a) 두 삼각형 ABC와 EDF의 무게중심을 각각 G_1과 G_2라 할 때, 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{G_1G_2}$의 값을 구하여라. (30점)

(b) 벡터 $\overrightarrow{G_1G_2}$와 수직이고 정팔면체와 만나지 않는 한 평면을 α라 하자. 태양광선이 평면 α에 수직으로 비추어 정팔면체의 그림자가 평면 α에 생길 때, 이 그림자의 넓이를 구하여라. (70점)



[문제 3] (총 100점)

주사위 100개를 동시에 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나오는 주사위의 개수가 홀수이면 a점, 홀수가 아니면 b점을 받는다고 하자. 받는 점수를 확률변수 X라 할 때, $E(X)$의 값을 구하여라.

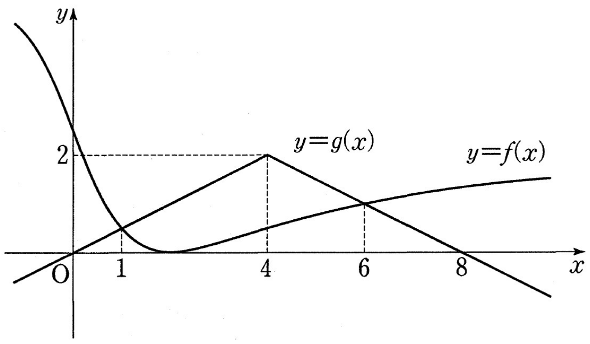
[문제 4] (총 100점)

자연수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 두 자연수 x와 y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 a_n이라 하자. $N=2^{2018}-1$일 때, $\sum_{k=1}^{N} a_k$의 값을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{n}{2^x}$ (2) $y \le 2^x$

• 풀어보기

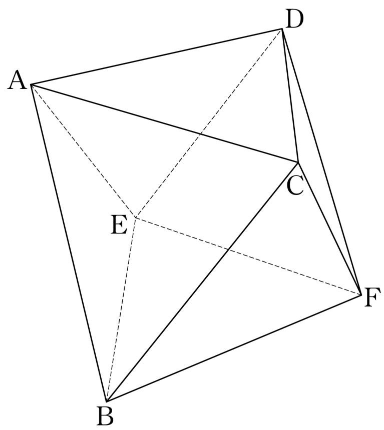
문제1. 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0\le a\le 8$ 인 a 에 대하여 $\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^8 g(x)\,dx$ 의 최솟값은? [4점] (2016년 6월 평가원)

① $14-5\ln5$ ② $15-5\ln10$ ③ $15-5\ln5$
④ $16-5\ln10$ ⑤ $16-5\ln5$

문제2. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정팔면체 ABCDEF가 있다. 두 삼각형 ABC, CBF의 평면 BEF 위로의 정사영의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은? [4점] (2015년 10월 전국연합)



① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

문제3. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 $\{(x,\ y)\,|\,2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\}$에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다.
(나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2,\ a_2 = 4$이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오. (2013학년도 대수능)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ②

$$\begin{aligned}h(a)&=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx\\&=\int_0^a f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx\\&=\int_0^8 g(x)dx+\int_0^a f(x)dx-\int_0^a g(x)dx\\&=8+\int_0^a (f(x)-g(x))dx\end{aligned}$$

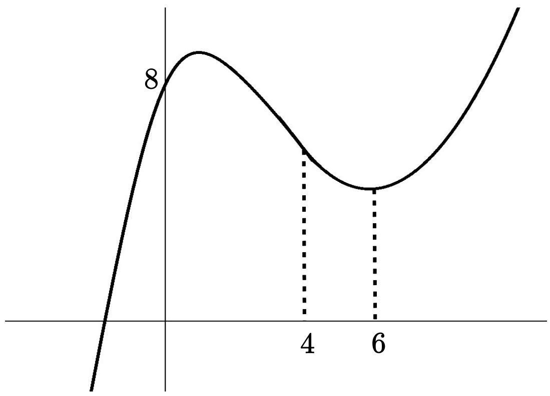
이라 하면

$$h'(a)=f(a)-g(a)=\begin{cases}\dfrac{5}{2}-\dfrac{10a}{a^2+4}-\dfrac{1}{2}a & (a\le 4)\\ \dfrac{5}{2}-\dfrac{10a}{a^2+4}+\dfrac{1}{2}a-4 & (a>4)\end{cases}$$

이고 $h(a)$는 연속함수이고 $h(0)=8$이므로

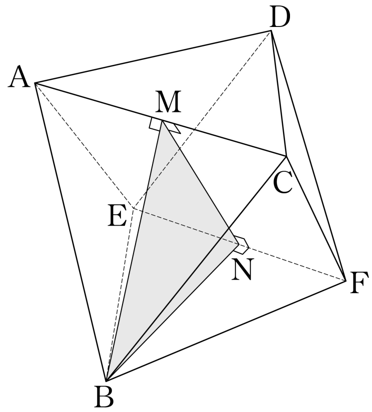
$$\begin{aligned}h(a)&=8+\int_0^a (f(x)-g(x))dx\\&=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+8+5\ln 4 & (a\le 4)\\ \dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{3}{2}a-5\ln(a^2+4)+16+5\ln 4 & (a>4)\end{cases}\end{aligned}$$

이고, 주어진 그래프는 아래와 같다.



따라서 $h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은 $h(6)=16-5\ln 10$이다.

풀어보기(문제2) 정답 ①



선분 AC와 EF의 중점을 각각 M, N이라 하면 사각형 AEFC가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{MN}}=2$, $\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{BN}}=\sqrt{3}$이다.

$\cos(\angle\mathrm{MBN})=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ 이므로

$$S_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

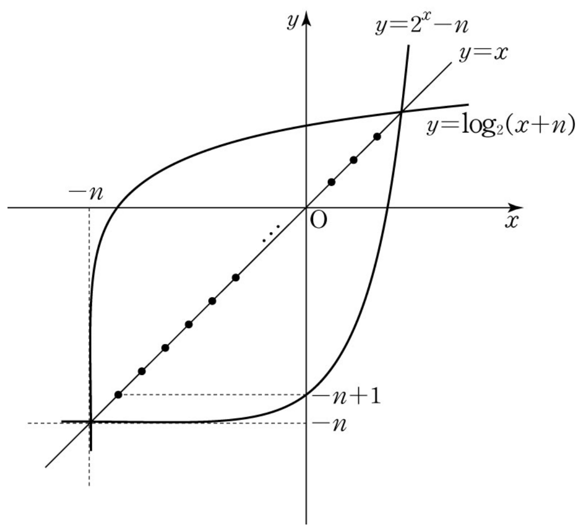
두 평면 BEF와 CBF가 이루는 각의 크기는 두 평면 ACD와 ABC가 이루는 각의 크기와 같다.

평면 BEF와 평면 ACD가 평행하므로

$$S_2=S_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad \therefore S_1+S_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

풀어보기(문제3) 정답 573

$y=2^x-n$과 $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



a_n 은 $-n<x$ 이고 $2^x-n\le x$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수이다. $n=k$ 일 때 만족하는 x 는 $-k+1,\ -k+2,\ \cdots,\ -1,\ 0$ 까지의 k 개와 $2^x-x\le k$ 를 만족시키는 자연수 x 가 있다.
이때, $2^1-1=1$, $2^2-2=2$, $2^3-3=5$, $2^4-4=12$, $2^5-5=27$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{30}a_n &= \sum_{k=1}^{30}k+(2-1)\times1+(5-2)\times2+(12-5)\times3+(27-12)\times4+(30-27+1)\times5\\ &=573\end{aligned}$$

[문제1] 대학발표 예시답안

(a) $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 라 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta=\tan^2\theta+1$ 이고, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

(b) 함수 $y=F(x)$ 의 그래프의 개형이 그림 1과 같으므로 $\int_0^2 f(t)\,dt$ 의 값은 그림 2의 어두운 부분의 넓이와 같다. 따라서

$$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_{-\sqrt{3}}^{-1}(x^3-3x)\,dx+2+\int_0^1\left(2-\frac{4x^2}{x^2+1}\right)dx$$

이다. 한편

$$\int_{-\sqrt{3}}^{-1}(x^3-3x)\,dx=1 \text{ 이고 } \int_0^1\left(2-\frac{4x^2}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{4}{x^2+1}-2\right)dx=\pi-2$$

이므로,

$$\int_0^2 f(t)\,dt=\pi+1$$

이다.

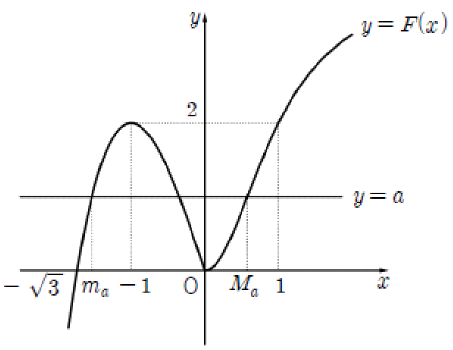


그림 1

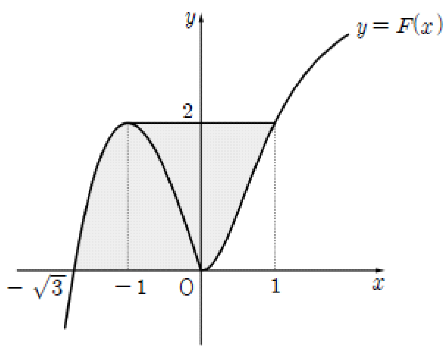


그림 2

[문제2] 대학발표 예시답안

(a) 네 점 B, C, D, E가 B$(-1,\ -1,\ 0)$, C$(1,\ -1,\ 0)$, D$(1,\ 1,\ 0)$, E$(-1,\ 1,\ 0)$이 되도록 좌표축을 정하자. 이때, A$(0,\ 0,\ a)$ $(a<0)$라 하면

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+a^2}=\sqrt{a^2+2}=2$$

이므로 A$(0,\ 0,\ \sqrt{2})$이고, F$(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ -\sqrt{2})$이고, $\mathrm{G}_1\left(0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $\mathrm{G}_2\left(0,\ \frac{2}{3},\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$이므로

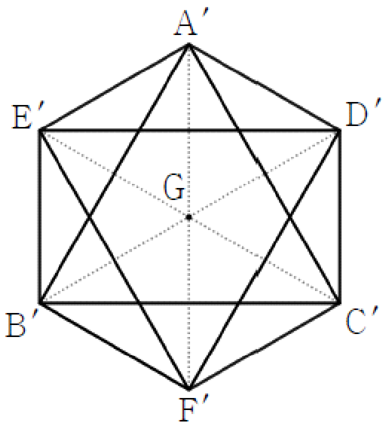
$$\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OG}_2}-\overrightarrow{\mathrm{OG}_1}=\left(0,\ \frac{4}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

이다. 따라서

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2}=(-1,\ -1,\ -\sqrt{2})\bullet\left(0,\ \frac{4}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=0$$

이다.

(b) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2}=(1,\ -1,\ -\sqrt{2})\bullet\left(0,\ \frac{4}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=0$이므로 평면 ABC와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2}$는 서로 수직이다. 마찬가지로 평면 DEF도 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2}$에 수직이다. 따라서 평면 α는 평면 ABC와 평면 DEF에 각각 평행하다. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2}$와 평면 α가 서로 수직이므로 두 점 G_1, G_2의 평면 α 위로의 정사영은 일치한다. 여섯 점 A, B, C, D, E, F의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′, D′, E′, F′이라 하면, 두 삼각형 A′B′C′과 E′D′F′은 한 변의 길이가 2이고 무게중심이 일치하는 정삼각형이다. 정사각형 BCDE의 정사영 B′C′D′E′은 마주보는 두 쌍의 변의 길이가 각각 같으므로 평행사변형이다. 따라서 다각형 A′E′B′F′C′D′은 정육각형이고 이것이 정팔면체의 그림자이다. 삼각형 A′B′C′의 무게중심을 G라 하면 $\overline{\mathrm{A'B'}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{A'G}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고, 정삼각형 GA′E′의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 그러므로 구하는 그림자의 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.



[문제3] 대학발표 예시답안

주사위 100개를 동시에 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나오는 주사위의 개수가 홀수일 확률 p와 홀수가 아닐 확률 $1-p$는 다음과 같다.

$$p=\sum_{k=1}^{50}{}_{100}\mathrm{C}_{2k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{101-2k},\quad 1-p=\sum_{k=0}^{50}{}_{100}\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{100-2k}$$

따라서

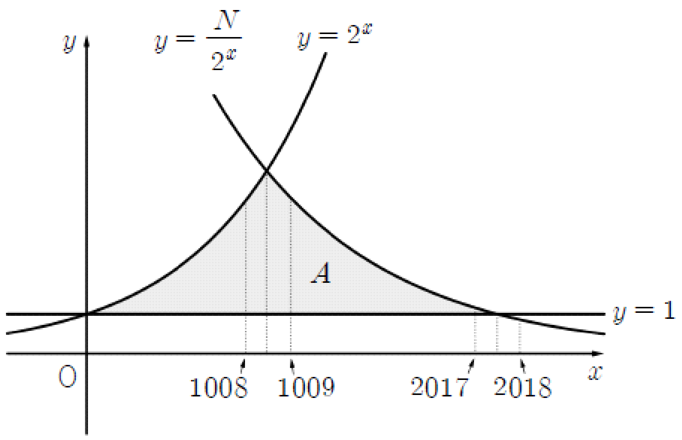
$$(1-p)-p=\sum_{k=0}^{100}(-1)^k{}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}=\sum_{k=0}^{100}{}_{100}\mathrm{C}_k\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}$$

이므로 이항정리에 의해

$$1-2p=\sum_{k=0}^{100}{}_{100}\mathrm{C}_k\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{100}=\frac{1}{3^{100}}$$

이다. 그러므로 $p=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{100}}$이고, $E(X)=ap+b(1-p)=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2\cdot 3^{100}}$이다.

[문제4] 대학발표 예시답안



그림과 같이 좌표평면에서 연립부등식 $y\le\frac{N}{2^x}$, $y\le 2^x$, $y\ge 1$의 영역을 A라 하자. $1\le n\le N$인 자연수 n에 대하여 $y=\frac{n}{2^x}$과 $y\le 2^x$을 모두 만족시키는 점 (x, y)(x, y는 자연수)는 영역 A에 속하고, $m\ne n$이면 두 곡선 $y=\frac{m}{2^x}$, $y=\frac{n}{2^x}$은 만나지 않는다. 한편 영역 A에 있는 점 (p, q)(p, q는 자연수)에 대하여 $r=q^{2^p}$라 두면 $r\le N$이고 점 (p, q)는 곡선 $y=\frac{r}{2^x}$에 있으며 $q\le 2^p$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{N}a_k$는 영역 A에 포함되는 점 (x, y)(x, y는 자연수)의 개수와 같으므로 그 점의 개수를 구하면 된다.

$x\ge 2018$이면 $y\le\frac{N}{2^x}\le\frac{2^{2018}-1}{2^{2018}}<1$이므로 $y\le\frac{N}{2^x}$을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서

쌍 (x, y)가 존재하지 않는다. 또한 $\frac{N}{2^x}=2^x$이면 $2^{2017}<2^{2x}=N<2^{2018}$이므로 $1008<x<1009$이다. 따라서 두 곡선 $y=2^x$, $y=\frac{N}{2^x}$의 교점의 x좌표는 1008보다 크고 1009보다 작다. 따라서 자연수 x에 대하여 $1 \le x \le 1008$이면 $1 \le y \le 2^x$인 자연수 y의 개수는 2^x이고 $1009 \le x \le 2017$이면 $1 \le y \le \frac{N}{2^x}=2^{2018-x}-2^{-x}$인 자연수 y의 개수는 $2^{2018-x}-1$이다.

그러므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} a_k &= \sum_{k=1}^{1008} 2^k + \sum_{k=1009}^{2017} (2^{2018-k}-1) \\ &= \sum_{k=1}^{1008} 2^k + \sum_{k=1}^{1009} (2^k-1) = 3 \cdot 2^{1009} - 1013\end{aligned}$$

이다.

25 성균관대학교 모의[25)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 과탐(2개 과목 평균) 중 2개 등급합 4 이내 및 영어 2 · 한국사 4 이내	수학(2문항, 6문제) 과학(물리, 화학, 생물 I 3문항 중 택1)	100분

[수학 1] 다음 〈제시문1〉~〈제시문3〉을 읽고 [수학1-ⅰ]~[수학1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

자연수의 거듭제곱의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<제시문2>

구간 $[a, b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.

<제시문3>

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^3+x$와 곡선 $y=n(x^4+x^2)$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_n이라고 한다.

[수학1-ⅰ] <제시문3>에서 a_1의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학1-ⅱ] <제시문3>의 a_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학1-ⅲ] <제시문3>의 a_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} n^4 a_n$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

25) 성균관대학교 홈페이지

[수학 2] 다음 〈제시문1〉~〈제시문3〉을 읽고 [수학2-i]~[수학2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

사인함수와 코사인함수의 도함수는 다음과 같다.

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$$

<제시문2>

두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

<제시문3>

함수 $y = f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$와 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)|dx$이다.

[수학2-ⅰ] 정적분 $\int_{-1}^{2} |\cos(\pi x)|\,dx$의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

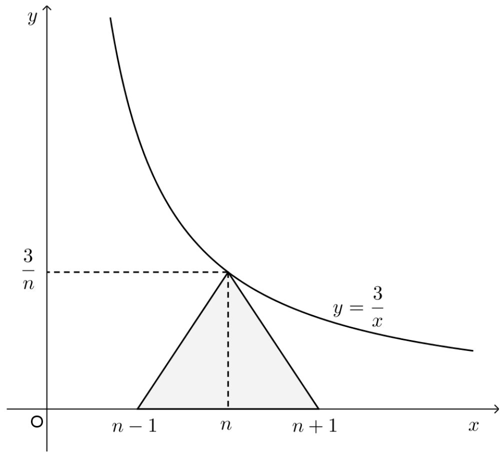
[수학2-ⅱ] 함수 $y = f(x)$가 $f(0) = 0$이고 모든 x에 대하여 $f'(x) = |\cos(\pi x)|$을 만족할 때, $\int_{-1}^{2} f(x)dx$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학2-ⅲ] 함수 $y = g(x)$가 $g(0) = g'(0) = 0$이고 모든 x에 대하여 $g''(x) = |\cos(\pi x)|$을 만족할 때, $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(x)dx$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

• 풀어보기

문제1. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ 위의 점 $\left(n,\ \dfrac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

(2016년 9월 평가원 나형)



① 410 ② 420 ③ 430 ④ 440 ⑤ 450

문제2. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\dfrac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \dfrac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\dfrac{7}{2}\pi \le \alpha \le \dfrac{7}{2}\pi$)

(2015년 9월 평가원 B형)

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}\pi$ ③ $\dfrac{5}{2}\pi$ ④ $\dfrac{7}{2}\pi$ ⑤ $\dfrac{9}{2}\pi$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④

$$a_n = \frac{1}{2}\times\{(n+1)-(n-1)\}\times\frac{3}{n} = \frac{1}{2}\times 2\times\frac{3}{n} = \frac{3}{n}$$

이므로

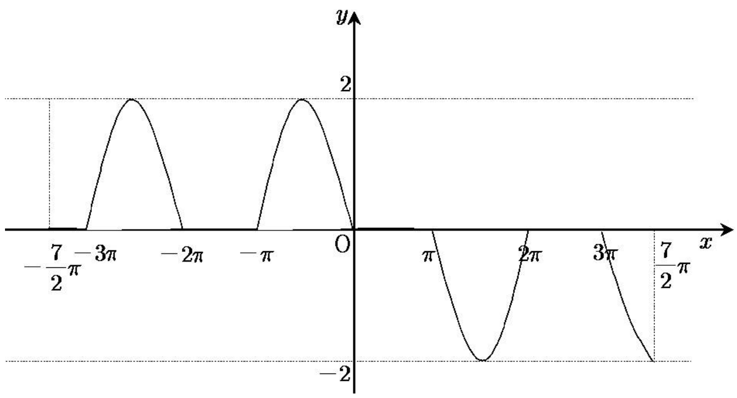
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{10}\frac{9}{\frac{3}{n}\times\frac{3}{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{10}\left(n^2+n\right) \\ &= \frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2} \\ &= 385+55=440\end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 ①

$f(x)$를 범위에 따라 정리해보면

$$f(x)=\begin{cases} 0 \ \left(-\dfrac{7\pi}{2}\le x\le -3\pi,\ -2\pi\le x\le -\pi,\ 0\le x\le \pi,\ 2\pi\le x\le 3\pi\right) \\ -2\sin x \ \left(-3\pi\le x\le -2\pi,\ -\pi\le x\le 0\right) \\ 2\sin x \ \left(\pi\le x\le 2\pi,\ 3\pi\le x\le \dfrac{7\pi}{2}\right)\end{cases}$$

이고 그래프는 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값 $\alpha = -\frac{7}{2}\pi$, 최댓값 $\beta = -3\pi$이므로

$$\beta-\alpha = -3\pi-\left(-\frac{7}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\pi$$

[수학1] 대학발표 예시답안

[수학1- i]

a_1의 값은 곡선 $y=x^3+x$와 곡선 $y=x^4+x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이이다.

방정식 $x^3+x=x^4+x^2$의 해는 $x=0, 1$이므로 a_1의 값은 <제시문2>로부터

$$\int_0^1 \left|(x^3+x)-(x^4+x^2)\right| dx$$

이다. 구간 $[0, 1]$에서 $x^3+x \geq x^4+x^2$이므로 이 정적분의 값은

$$\int_0^1 (x^3+x-x^4-x^2)\,dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{13}{60}$$

[수학1- ii]

일반적으로 자연수 n에 대하여 방정식 $x^3+x=n(x^4+x^2)$의 해는 $x=0, \frac{1}{n}$이므로 a_n의 값은 $\int_0^{\frac{1}{n}} \left|(x^3+x)-n(x^4+x^2)\right| dx$이다.

마찬가지로 구간 $\left[0, \frac{1}{n}\right]$에서 $x^3+x \geq n(x^4+x^2)$이므로 이 정적분의 값은

$$\int_0^{\frac{1}{n}} (x^3+x-nx^4-nx^2)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2-\frac{n}{5}\left(\frac{1}{n}\right)^5-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

이고 이를 정리하면 $a_n=\frac{1}{20n^4}+\frac{1}{6n^2}=\frac{3+10n^2}{60n^4}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{20n^2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$이다.

[수학1- iii]

$a_n=\frac{3+10n^2}{60n^4}$이므로 $\sum_{n=1}^{10} n^4 a_n=\frac{1}{60}\sum_{n=1}^{10}(3+10n^2)$이다.

$\sum_{n=1}^{10} 3=30$이고 <제시문1>에 의해 $\sum_{n=1}^{10} 10n^2=10\times\frac{10\times 11\times 21}{6}=3850$이므로 $\sum_{n\to\infty}^{10} n^4 a_n$의 값은 $\frac{30+3850}{60}=\frac{194}{3}$이다.

[수학2] 대학발표 예시답안

[수학2- i]

$|\cos(\pi x)|=|\cos(\pi(x+1))|$이 성립하므로 $\int_{-1}^{2}|\cos(\pi x)|\,dx=3\times\int_0^1|\cos(\pi x)|\,dx$이다. 또한

$$\int_0^1 |\cos(\pi x)|\, dx = 2\times\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x)\, dx$$

이므로 구하고자 하는 값은 $6\times\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x)\, dx$ 이다. $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x)\, dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$ 이므로 구하고자 하는 값은 $\frac{6}{\pi}$ 이다.

[수학2-ii]

구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $f'(x) = \cos(\pi x)$ 이고 $f(0) = 0$ 이므로 이 구간에서 $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ 이다. $f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ 이므로 자연수 k에 대하여 $f(x+k) = f(x) + \left(\frac{2}{\pi}\right)k$ 가 모든 실수 x에 대해 성립하고 이로부터 $f(-x) = -f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

따라서 문제의 적분값은 $\int_1^2 f(x)\, dx$ 와 같다. $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}$ 이므로

$$\int_1^2 f(x)\, dx = \int_0^1 \left(f(x) + \frac{2}{\pi}\right) dx = \frac{3}{\pi}$$

[수학2-ii] 다른 풀이

$-1 \le x < -\frac{1}{2}$ 일 때 $f'(x) = -\cos(\pi x)$ 이고 $f(x) = -\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + C_1$ (C_1은 상수)이다.

$-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$ 일 때 $f'(x) = \cos(\pi x)$ 이고 $f(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + C_2$ (C_2는 상수)이다.

$\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2}$ 일 때 $f'(x) = -\cos(\pi x)$ 이고 $f(x) = -\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + C_3$ (C_3은 상수)이다.

$\frac{3}{2} \le x \le 2$ 일 때 $f'(x) = \cos(\pi x)$ 이고 $f(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + C_4$ (C_4는 상수)이다.

$f(0) = 0$ 이므로 $C_2 = 0$이고 $C_1 = -\frac{2}{\pi}$, $C_3 = \frac{2}{\pi}$, $C_4 = \frac{4}{\pi}$ 이다. 따라서

$$\int_{-1}^2 f(x)\, dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) - \frac{2}{\pi}x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left[\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi}x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{4}{\pi}x\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\{(0-(-1)) - (0-0) + (0-0) - (1-0)\} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2}+1\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{\pi}\left(2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{\pi}$$

[수학2-iii]

[수학2-ii]에서와 같이 자연수 k에 대하여 $g'(x+k) = g'(x) + \left(\frac{2}{\pi}\right)k$이고,

$g'(-x) = -g'(x)$이 성립한다. 따라서 $g(-x) = g(x)$이고 문제의 적분식은

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\,dx$$

와 같다. 구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서 $g'(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$이고 $g(0) = 0$이므로 이 구간에서

$g(x) = \frac{1-\cos(\pi x)}{\pi^2}$이다. 따라서 $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}$이다.

마찬가지로 구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$에서 $g'(x) = \frac{\sin(\pi(x-1))}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{-\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{2}{\pi}$이고 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi^2}$이

므로 $g(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)x + \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right)$이다. 따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\,dx = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}$이다.

이를 종합하면, 구하고자 하는 적분값은

$$2\left(\frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}\right) + \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}\right) = \frac{1}{4\pi} + \frac{3}{2\pi^2} - \frac{3}{\pi^3}$$

[수학2-iii] 다른 풀이

$g(0) = g'(0) = 0$이고 모든 x에 대하여 $g''(x) = |\cos(\pi x)|$이므로 $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$일 때

$$g''(x) = \cos(\pi x),\ g'(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x),\ g(x) = -\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}$$

이다. 또한 $\frac{1}{2} \le x \le 1$일 때

$$g''(x) = -\cos(\pi x),\ g'(x) = -\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{2}{\pi},\ g(x) = \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi}x - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

이다. 따라서

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 g(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi^3}(1+1) + \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\pi^3}(0-1) + \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

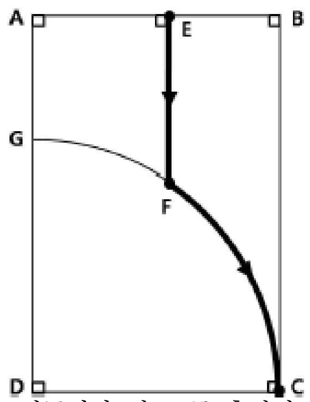
$$= -\frac{3}{\pi^3} + \frac{3}{2\pi^2} + \frac{1}{4\pi}$$

26 성균관대학교(자연계Ⅰ) 수시[26)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	**[자연계]** 국어, 수학 가, 과탐(2개 과목 평균) 중 2개등급합 4이내 및 영어2등급·한국사4등급 이내 **[반도체시스템공학, 소프트웨어학, 글로벌바이오메디컬공학]** 수학 가, 과탐(1개 과목) 등급합 3이내 및 영어2등급·한국사 4등급 이내 **[의예]** 국어, 수학 가, 과탐(2개 과목 평균) 중 3개등급합 4이내 및 영어1등급·한국사4등급 이내	수학2문제+과학1문제(물리1/화학1/생명과학1 3개 과목 중 1개 과목 선택	100분

[수학 1] 다음 〈제시문1〉~〈제시문3〉을 읽고 [수학1-ⅰ]~[수학1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=3, \overline{DC}=2$ 인 직사각형 ABCD 내부에, 점 D를 중심으로 하고 반지름이 2인 사분원 DGC가 놓여있다. 선분 AB 위의 한 점 E에서 선분 AD와 평행하게 그은 선분이 사분원 DGC의 호와 만나는 점을 F라 하자.

<제시문2>

성균이는 점 E에서 출발하여 오른쪽 그림과 같이 화살표 방향으로 선분 EF와 호 FC를 거쳐 점 C로 이동하고자 한다. 성균이는 선분 EF 위를 매초 1의 속력으로 움직이고 호 FC 위를 매초 2의 속력으로 이동한다. 성균이가 점 E를 출발하여 제시된 경로를 따라 점 C에 도달하는데 걸리는 시간을 T(초)라 한다.

<제시문3>

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다.

[수학1-ⅰ] 선분 AE의 길이가 $\sqrt{3}$일 때 <제시문2>의 T의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-ⅱ] <제시문2>의 T의 값이 최소가 되는 선분 AE의 길이를 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-ⅲ] <제시문2>의 T의 값이 최소가 될 때 도형 AEFG와 도형 ECBF의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.

26) 성균관대학교 홈페이지

[수학 2] 다음 〈제시문1〉~〈제시문4〉를 읽고 [수학2-ⅰ]~[수학2-ⅳ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

사건 A, B에 대하여 사건 B가 일어났을 때, 사건 A가 일어날 확률은 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이라 하고, 기호로 $P(A|B)$와 같이 나타낸다.

사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (단, $P(B)\neq 0$)을 만족한다.

<제시문2>

어떤 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C와 같이 나타낸다.

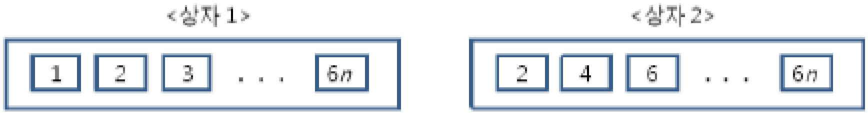
두 사건 A와 B에 대하여 $P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$가 항상 성립한다.

<제시문3>

$g(n)$과 $h(n)$이 n에 관한 다항식일 때, $\dfrac{g(n)}{h(n)}$을 n에 대한 유리식이라 한다. (단, $h(n)\neq 0$)

<제시문4>

자연수 n에 대하여 그림과 같이 <상자1>에는 1부터 $6n$까지의 자연수가 적힌 $6n$장의 카드가 있고 <상자2>에는 2부터 $6n$까지의 자연수가 적힌 $3n$장의 카드가 있다.



[수학2-ⅰ] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 합이 짝수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[수학 2-ⅱ] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[수학 2-ⅲ] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수일 때, 이 두 수의 합이 짝수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[수학 2-ⅳ] <제시문4>의 <상자1><상자2> 중 임의로 한 상자를 골라 그 안에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수를 곱했더니 >6의 배수가 되었다. 이 때 카드를 뽑은 상자가 <상자1>일 확률을 $f(n)$이라 했을 때 $\lim_{n\to\infty} f(n)$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

• 풀어보기

문제1. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? (2017. 6월 모평)

> (가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
>
> (나) 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15　② -12　③ -9　④ -6　⑤ -3

문제2. 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같으면 한 개의 동전을 4번 던지고, 나온 눈의 수가 다르면 한 개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때, 동전을 4번 던졌을 확률은? (2017. 6월 모평)

① $\frac{3}{23}$　② $\frac{5}{23}$　③ $\frac{7}{23}$　④ $\frac{9}{23}$　⑤ $\frac{11}{23}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}$, $f''(x)=9ae^{3x}+be^{x}$이고

(가)에 의해 $x=\ln\frac{2}{3}$이 변곡점이다. 따라서

$$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=9a\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3}+b\times\frac{2}{3}=\frac{8a+2b}{3}=0$$

$\therefore\ b=-4a$

$f'(x)=ae^{x}(3e^{2x}-4)$

(나) 조건에서 $f'(k)\geq 0$에서 k의 최솟값이 m이므로 $f'(m)=0$이다.

따라서 $3\cdot e^{2m}-4=0$이다.

$f(2m)=a\cdot e^{6m}-4a\cdot e^{2m}$

$$=a\left(\frac{4}{3}\right)^{3}-4a\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{80}{9}$$

따라서 $a=3$, $b=-12$이다.

$\therefore\ f(0)=a+b=-9$이다.

풀어보기(문제2) 정답 ①

두 개의 주사위가 같은 눈이 나오는 사건을 A, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 B라고 하면 구하는 확률은

$\dfrac{\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(B|A^{C})}$이고, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때는 다음과 같은 2가지 경우가 있다.

ⅰ) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같을 때

두 주사위의 눈의 수가 같을 확률은 $\frac{1}{6}$이고

동전을 4번 던졌을 때, 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나올 확률은 ${}_{4}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{3}{8}$이므로

구하는 확률 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$이다.

ⅱ) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 다를 때

두 주사위의 눈의 수가 다를 확률은 $\frac{5}{6}$이고

동전을 2번 던졌을 때, 앞면과 뒷면이 각각

1번씩 나올 확률은 ${}_{2}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{2}$이므로

구하는 확률 $\mathrm{P}(B|A^C) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{5}{12}} = \frac{3}{23}$ 이다.

[수학1] 대학발표 예시답안

수학1－ⅰ.

각 FDC를 x라 두면, 문제의 조건에서

$\cos x = \sqrt{3}$, 즉 $x = \frac{\pi}{6}$

따라서 $T = \frac{2}{1} + \dfrac{2 \cdot \frac{\pi}{6}}{2} = 2 + \frac{\pi}{6}$

수학1－ⅱ.

점 F에서 선분 DC에 내린 수선의 발을 H라 하고, ∠FDC를 x $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

선분 EF의 길이=선분 EH의 길이 - 선분 FH의 길이

$= 3 - 2\sin x$

이고 호 FC의 길이는 $2x$ 이므로

$$T = \frac{3 - 2\sin x}{1} + \frac{2x}{2} = 3 - 2\sin x + x$$

$T'(x) = 1 - 2\cos x$ 이고, $T'(x) = 0$에서 $x = \frac{\pi}{3}$

함수 T의 증감을 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$T'(x)$		$-$		$+$	
$T(x)$		↘	$T\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↗	

따라서 T는 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최솟값을 가지고, 이때 선분 AE의 길이는

$\overline{\mathrm{AE}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$

수학1－iii.

수학1－ii의 결과에 의해 T의 값이 최소가 될 때 $\angle \mathrm{FDC}=\frac{\pi}{3}$ 이므로

도형 FCH의 넓이=부채꼴 DFC의 넓이 - 삼각형 DFH의 넓이

$$=2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이를 이용하면

도형 ECBF의 넓이=직사각형 EBCH의 넓이 - 도형 FCH의 넓이

$$=3-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

도형 AEFG의 넓이=도형 ABCG의 넓이 - 도형 EBCF의 넓이

$$=6-\pi-\left(3-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=3-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[수학2] 대학발표 예시답안

수학2－i.

두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 짝수와 홀수는 각각 $3n$개가 있으므로 두 수가 모두 짝수 또는 모두 홀수인 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2+{}_{3n}\mathrm{C}_2$이다. 따라서 확률은 $\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_2+{}_{3n}\mathrm{C}_2}{{}_{6n}\mathrm{C}_2}=\frac{3n-1}{6n-1}$이다.

수학2-ii.

두 수의 곱이 6의 배수이려면 적어도 하나가 6의 배수이거나, 둘 다 6의 배수가 아니고 하나는 2의 배수이고 다른 하나는 3의 배수가 되어야 한다. 첫 번째 사건의 경우의 수는 ${}_{6n}\mathrm{C}_2-{}_{5n}\mathrm{C}_2$이고 두 번째 사건의 경우의 수는 $(3n-n)(2n-n)=2n^2$이다. 따라서 확률은 $\frac{{}_{6n}\mathrm{C}_2-{}_{5n}\mathrm{C}_2+2n^2}{{}_{6n}\mathrm{C}_2}=\frac{15n-1}{36n-6}$이다.

수학2-iii.

두 수의 곱이 6의 배수인 사건을 A라 하고 두 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하자. 그러면 $A\cap B$는 두 수가 모두 짝수이며 적어도 하나가 3의 배수인 사건과 같다. 이러한 사건의 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_2$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_2}{{}_{36}\mathrm{C}_2}=\frac{5n-1}{36n-6}$이다.

2-ⅱ에서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{15n-1}{36n-6}$이므로 답은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5n-1}{15n-1}$이 된다.

수학2-ⅳ.
<상자1>을 고르는 사건을 X라 하고 임의로 고른 상자에서 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수인 사건을 Y라 하자. 그러면 $\mathrm{P}(X|Y)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)}=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)}$을 만족한다.
2-ⅱ로부터 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{15n-1}{36n-6}=\dfrac{15n-1}{72n-12}$을 얻는다. <상자2>에서 뽑은 카드에 적힌 두 수의 곱이 6의 배수이려면 적어도 하나는 3의 배수이면 된다. 따라서

$$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_2}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}=\frac{5n-1}{18n-6}$$

이고

$$f(n)=\frac{\dfrac{15n-1}{72n-12}}{\dfrac{15n-1}{72n-12}+\dfrac{5n-1}{18n-6}}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\frac{\dfrac{15}{72}}{\dfrac{15}{72}+\dfrac{5}{18}}=\frac{3}{7}$$

을 얻는다.

27 성균관대학교(자연Ⅱ) 수시[27)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	**[자연계]** 국어, 수학 가, 과탐(2개 과목 평균) 중 2개등급합 4이내 및 영어2등급·한국사4등급 이내 **[반도체시스템공학, 소프트웨어학, 글로벌바이오메디컬공학]** 수학 가, 과탐(1개 과목) 등급합 3이내 및 영어2등급·한국사 4등급 이내 **[의예]** 국어, 수학 가, 과탐(2개 과목 평균) 중 3개등급합 4이내 및 영어1등급·한국사4등급 이내	수학2문제+과학1문제(물리1/화학1/생명과학1 3개 과목 중 1개 과목 선택	100분

[수학 1] 다음 〈제시문1〉, 〈제시문2〉를 읽고 [수학1-ⅰ]~[수학1-ⅱ]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

원 $C: x^2+y^2=4$와 두 점 $\mathrm{P}(0,2)$, $\mathrm{Q}(0,-1)$이 주어져 있다. 점 Q를 지나는 직선 L이 원 C와 만나는 두 점을 각각 R, S라 한다.

<제시문2>

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다.

[수학1-ⅰ] 직선 L의 기울기를 실수 $m\,(-2\le m\le 2)$이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS의 세 변의 길이의 제곱의 합 $\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{RS}}^2+\overline{\mathrm{SP}}^2$이 최대가 되는 m의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-ⅱ] 직선 L의 기울기를 실수 $m\,(-2\le m\le 2)$이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS의 넓이가 최대가 되는 m의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

27) 성균관대학교 홈페이지

[수학 2] 다음 〈제시문1〉~〈제시문3〉을 읽고 [수학2-ⅰ]~[수학2-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>
함수 $g(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x) \leq g(a)$를 만족하면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다고 한다.

<제시문2>
함수 $g(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x) \geq g(a)$를 만족하면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다고 한다.

<제시문3>
$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$은 $x_0=0, x_{2018}=100$과 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2018}$을 만족하는 실수이다. 닫힌 구간 $[0, 100]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 다음을 만족한다.
(1) $f(0)=\sqrt{2}, f(100)=\sqrt{3}$
(2) $f(x)$는 $x=x_l\ (l=1,3,5,\cdots,2017)$에서 극댓값을 가지고 $x=x_m\ (m=2,4,6,\cdots,2018)$에서 극솟값을 가진다.
(3) 2018 이하의 임의의 자연수 k에 대하여 열린 구간 (x_{k-1}, x_k)에서 $f'(x)$는 연속이며 $f'(x)=2$ 또는 $f'(x)=-3$이다.

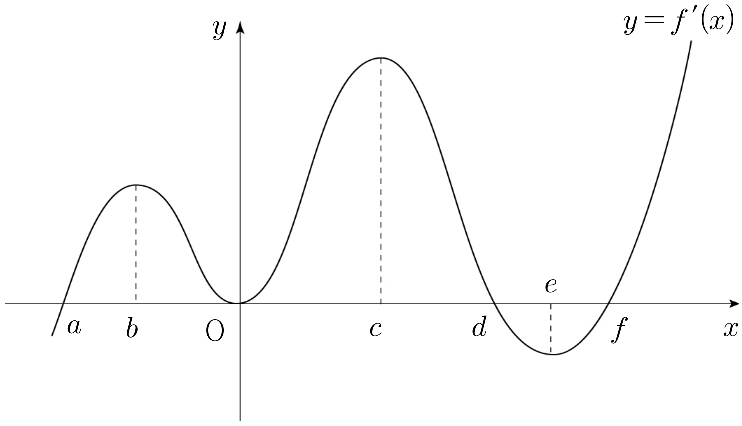
[수학2-ⅰ] <제시문3>에서 추가적으로 $x_1=1, x_{2017}=99$를 만족한다고 할 때 $f(x_1)$과 $f(x_{2017})$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-ⅱ] <제시문3>에서 추가적으로 $x_{1008}=49, x_{1010}=51, f(x_{1008})=\sqrt{5}, f(x_{1010})=\sqrt{7}$을 만족한다고 할 때 x_{1009}과 $f(x_{1009})$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-ⅲ] <제시문3>에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f(x_n)$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

• 풀어보기

문제1. 다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2012. 7월)



< 보 기 >

ㄱ. 구간 $[a,\ f]$에서 $f(x)$의 변곡점은 4개이다.
ㄴ. 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 1개이다.
ㄷ. 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(c)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제2. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t, \ln t)$, $\mathrm{Q}(2t, \ln 2t)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{R}(r(t), 0)$, $\mathrm{S}(s(t), 0)$이라 하자. 함수 $f(t)$를 $f(t)=r(t)-s(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 극솟값은? (2016. 4월)

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{5}$ ⑤ $-\dfrac{1}{6}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

ㄱ. 함수 $f(x)$는 원점 O와 $x=b,\ c,\ e$에서 변곡점을 가진다. (참)

ㄴ. $f(x)$는 $x=d$ 에서 극대가 된다. (참)

ㄷ. 구간 $[a,\ e]$ 에서 최댓값은 $f(d)$이다. (거짓)

풀어보기(문제2) 정답 ③

$y=\ln x$를 x에 대하여 미분하면 $y'=\dfrac{1}{x}$

점 $\mathrm{P}(t, \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\dfrac{1}{t}(x-t)$

$\therefore\ r(t)=t-t\ln t$

점 $\mathrm{Q}(2t, \ln 2t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln 2t=\dfrac{1}{2t}(x-2t)$

$\therefore\ s(t)=2t-2t\ln 2t$

$f(t)=r(t)-s(t)=(2\ln 2-1)t+t\ln t$

$f'(t)=2\ln 2+\ln t=0$에서 $t=\dfrac{1}{4}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	$-\frac{1}{4}$	↗

따라서 극솟값은 $-\dfrac{1}{4}$

[수학1] 대학발표 예시답안

수학1－ i .

직선 L의 방정식: $y=mx-1$를 원 C와 연립하면

$$(m^2+1)x^2-2mx-3=0\cdots(*)$$

이 방정식의 두 해를 α,β(단, $\alpha<0$, $\beta>0$)라 하자.

일반성을 잃지 않고 $\mathrm{R}(\alpha, m\alpha-1)$ $(\alpha<0)$, $\mathrm{S}(\beta, m\beta-1)$ $(\beta<0)$라 두면,

$$\overline{\mathrm{PR}}^2=\alpha^2+(m\alpha-1-2)^2=(m^2+1)\alpha^2-6m\alpha+18$$

$$\overline{\mathrm{SD}}^2=\beta^2+(m\beta-1-2)^2=(m^2+1)\beta^2-6m\beta+18$$

$$\overline{\mathrm{RS}}^2=(\alpha-\beta)^2+\{m\alpha-1-(m\beta-1)\}^2=(m^2+1)(\alpha-\beta)^2.$$

$I=\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{RS}}^2+\overline{\mathrm{SD}}^2$라 두고 이를 대입하면

$$\begin{aligned}I&=(m^2+1)(\alpha^2+\beta^2)-6m(\alpha+\beta)+18+(m^2+1)(\alpha-\beta)^2\\&=(m^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-6m(\alpha+\beta)+18+(m^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\end{aligned}$$

$(*)$로부터

$$\alpha+\beta=\frac{2m}{m^2+1}\ ,\ \alpha\beta=\frac{-3}{m^2+1}\cdots(**)$$

가 성립하므로,

$$\begin{aligned}I&=(m^2+1)\left\{\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2+\frac{6}{m^2+1}\right\}-6m\frac{2m}{m^2+1}+18+(m^2+1)\left\{\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2+\frac{12}{m^2+1}\right\}\\&=32+\frac{4}{m^2+1}\end{aligned}$$

양변을 미분하면

$$I'(m)=\frac{-8m}{(m^2+1)^2}$$

따라서 $I'(m)=0$에서 $m=0$을 얻고, 증감을 조사하면

m	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$I'(m)$		$+$		$-$	
$I(m)$		↗	36	↘	

따라서 $m=0$에서 최댓값을 가진다.

수학1－ii.

삼각형 PRS의 넓이를 A라 하면,

삼각형 PRS의 넓이=삼각형 PRQ의 넓이 + 삼각형 PQS의 넓이

$$A=\frac{1}{2}\cdot3\cdot(-\alpha)+\frac{1}{2}\cdot3\cdot\beta=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

그런데 수학1－ i 의 $(**)$로부터

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2+\frac{12}{m^2+1}}=\frac{2\sqrt{4m^2+3}}{m^2+1}$$

이므로

$$A(m)=\frac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+1}\quad(-2\le m\le 2)$$

함수 $A(m)$에 자연 로그를 취하고

$$\ln A(m)=\ln 3+\frac{1}{2}\ln(4m^2+3)-\ln(m^2+1)$$

양변을 미분하면

$$\frac{A'}{A}=\frac{4m}{4m^2++3}-\frac{2m}{m^2+1}=\frac{-2m(2m^2+1)}{(4m^2+3)(m^2+1)}$$

따라서

$$A'=\frac{-6m(2m^2+1)\sqrt{4m^2+3}}{(4m^2+3)(m^2+1)^2}$$

$A'(m)=0$에서 $m=0$을 얻고, 증감을 조사하면

m	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$A'(m)$		$+$		$-$	
$A(m)$		$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow\searrow$	

따라서 $m=0$에서 최댓값을 가진다.

[수학2] 대학발표 예시답안

수학2-ⅰ.

$f(x)$는 구간 (x_0,x_1)에서 기울기 2인 일차함수이고 구간 $(x_{2017},\ x_{2018})$에서 기울기 -3인 일차함수이다. 따라서 $f(x_1)=f(x_0)+2=\sqrt{2}+2$, $f(x_{2017})=f(x_{2018})+3=\sqrt{3}+3$이다.

수학2-ⅱ.

$f(x)$는 구간 $(x_{1008},\ x_{1009})$에서 기울기 2인 일차함수이고 구간 $(x_{1009},\ x_{1010})$에서 기울기 -3인 일차함수이다. 따라서 $\dfrac{f(x_{1009})-f(x_{1008})}{x_{1009}-x_{1008}}=2$, $\dfrac{f(x_{1010})-f(x_{1009})}{x_{1010}-x_{1009}}=-3$이다. 연립방정식에서 x_{1009}을 소거하면 $f(x_{1009})=\dfrac{3}{5}f(x_{1008})+\dfrac{2}{5}f(x_{1010})+\dfrac{6}{5}(x_{1010}-x_{1008})$을 얻는다. 주어진 값을 넣으면 $f(x_{1009})=\dfrac{12+3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{5}$을 얻고, 이를 통해 $x_{1009}=\dfrac{251-\sqrt{5}+\sqrt{7}}{5}$을 얻는다.

수학2-ⅲ.

$\sum$의 성질에 의해 $\displaystyle\sum_{n=0}^{2018}(-1)^n f(x_n)=\sum_{m=0}^{1009}f(x_{2m})-\sum_{m=0}^{1008}f(x_{2m+1})$로 나타낼 수 있다.

수학2-ⅱ의 문제 해결 과정에서 $f(x_{1009})=\dfrac{3}{5}f(x_{1008})+\dfrac{2}{5}f(x_{1010})+\dfrac{6}{5}(x_{1010}-x_{1008})$이므로

$0 \le m \le 1008$을 만족하는 임의의 정수 m에 대하여

$$f(x_{2m+1}) = \frac{3}{5}f(x_{2m}) + \frac{2}{5}f(x_{2m+2}) + \frac{6}{5}(x_{2m+2} - x_{2m})$$

로 나타낼 수 있다. 따라서 $\sum$의 성질에 의해

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{1008} f(x_{2m+1}) &= \sum_{m=0}^{1008}\left\{\frac{3}{5}f(x_{2m}) + \frac{2}{5}f(x_{2m+2}) + \frac{6}{5}(x_{2m+2} - x_{2m})\right\} \\ &= \sum_{m=0}^{1009} f(x_{2m}) - \frac{2}{5}f(x_0) - \frac{3}{5}f(x_{2018}) - \frac{6}{5}x_0 + \frac{6}{5}x_{2018}\end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{n=0}^{2018}(-1)^n f(x_n) = \sum_{m=0}^{1009} f(x_{2m}) - \sum_{m=0}^{1008} f(x_{2m+1}) = \frac{2}{5}\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{3} - 120$$

을 얻는다.

(다른 풀이)

증가하는 구간의 길이의 합을 t라 하면 감소하는 구간의 길이의 합은 $100-t$가 된다. 따라서 구간 $[0, 100]$에서의 함수 $f(x)$의 총 증가량은 $2t - 3(100-t) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$가 된다. 이를 풀면 $t = 60 - \dfrac{\sqrt{2}}{5} + \dfrac{\sqrt{3}}{5}$을 얻는다. 증가하는 구간은 (x_{2m}, x_{2m+1}) $(0 \le m \le 1008)$이므로

$$t = \sum_{m=0}^{1008}(x_{2m+2} - x_{2m}) = \sum_{m=0}^{1008}\frac{f(x_{2m+2}) - f(x_{2m})}{2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1008}\left\{(-1)^n f(x_n) - f(x_{2018})\right\}$$

이 된다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=0}^{2018}(-1)^n f(x_n) = x_{2018} - 2t = \frac{2}{5}\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{3} - 120$을 얻는다.

28 세종대학교 모의[28)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 영어 포함 3개 영역 등급합 7 이내 (한국사 필수 응시)	수학 (3문항, 10문제)	120분

[문제1] 실수인 상수 a, b, c에 대해 함수 $f(x)$는 $f(x)=ae^{-x}+bx+c$로 정의된다. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $g(x)$ $(-1 \le X \le 1)$와 함수 $f(x)$에 대해 관계식

$$\mathrm{P}(-1 \le X \le x)=\int_{-1}^{x} g(t)\,dt=\frac{2f(x)}{1+f(x)} \quad (\text{단, } -1 \le X \le 1) \cdots\cdots ①$$

이 성립할 때, 다음 물음에 각각 답하시오.

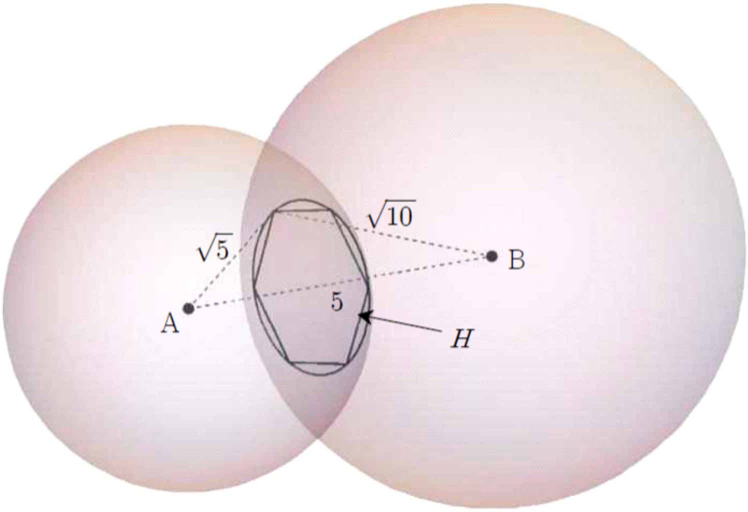
(1-1) $f(-1)$과 $f(1)$의 값을 각각 구하시오. (60점)

(1-2) $c=\frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{P}\left(-1 \le X \le \frac{1}{2}\right)$을 구하시오. (60점)

(1-3) 관계식 ①이 성립할 때, 가능한 c의 최댓값과 최솟값을 구하시오. (60점)

28) 세종대학교 홈페이지

[문제2] 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 구 S_1 과 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 구 S_2 가 있다. 두 구의 중심점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는 5 이다. 두 구가 만나서 생기는 원 C 에 내접하는 정육각형 H 위를 움직이는 두 점을 P, Q 라 할 때, 다음 물음에 각각 답하시오.



(2-1) 원 C 의 반지름의 길이를 구하시오. (60점)

(2-2) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ 의 크기 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$ 의 최댓값을 구하시오. (60점)

(2-3) 점 P 가 정육각형 H 의 한 변을 2 : 1 로 내분하는 점일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$ 의 최댓값을 구하시오. (60점)

[문제3] 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)e^{-f(t)}dt$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $g'(0)=\frac{1}{e}$
(다) 집합 $\{x \mid g''(x)=0$이고 x는 실수$\}$의 원소의 개수는 1이다.

다음 물음에 답하시오.

(3-1) 함수 $h(x)=xe^{-x}$의 도함수와 이계도함수를 이용하여 좌표평면에 곡선 $y=h(x)$의 개형을 그리시오. 또한, 함수의 극값과 곡선의 변곡점의 좌표를 구하시오. (60점)

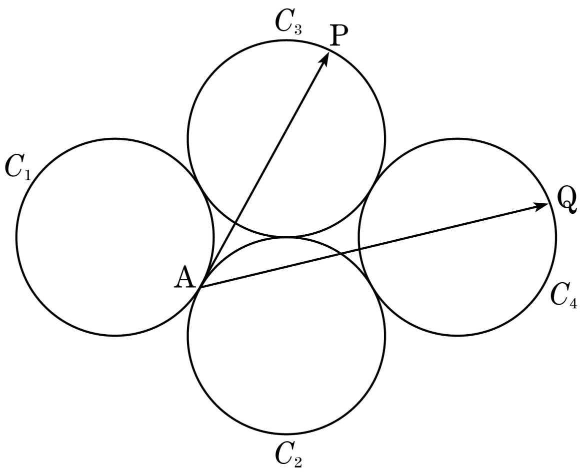
(3-2) $f(0)$을 구하시오. (60점)

(3-3) 함수 $f(x)$로 가능한 것을 모두 구하시오. (60점)

(3-4) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 최솟값을 구하시오. (60점)

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4가 서로 외접하고 있고, 두 원 C_1, C_2의 접점을 A라 하자. 원 C_3 위를 움직이는 점 P와 원 C_4 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값은? [4점] (2013학년도 10월)



① $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　② 6　　③ $3\sqrt{3}+1$　　④ $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$　　⑤ 7

문제2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

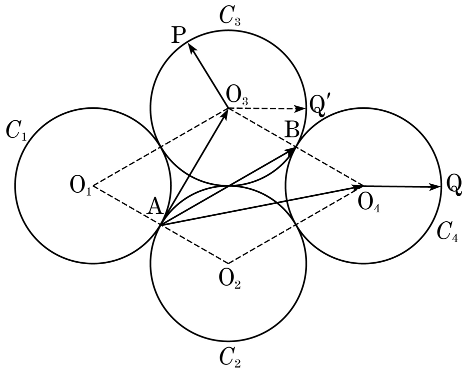
(가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

일 때, $\int_0^6 f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2016학년도 대수능

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ②



네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3, O_4라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라 하자.

사각형 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4\mathrm{O}_3$은 네 변의 길이가 모두 2인 마름모이고, 두 점 A, B는 각각 변 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$, 변 $\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4$의 중점이다.

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AO}_3}+\overrightarrow{\mathrm{AO}_4}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3}$$

한편, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O}_4\mathrm{Q}}$를 시점이 O_3이 되도록 평행이동하였을 때, 그 종점을 Q′이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{O}_4\mathrm{Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{Q}'}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}_3}+\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{P}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}_4}+\overrightarrow{\mathrm{O}_4\mathrm{Q}}\right)\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}_3}+\overrightarrow{\mathrm{AO}_4}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{O}_4\mathrm{Q}}\right)\\&=2\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3}+\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{P}}+\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{Q}'}\end{aligned}$$

이때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 크기가 최대가 되려면 $\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3}$은 방향과 크기가 일정한 벡터이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}_3\mathrm{Q}'}$이 $\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3}$과 방향이 같아야 한다.

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|\le 3\left|\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3}\right|=6$$

풀어보기(문제2) 정답 35

(나)에 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면

$$f(0)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(나)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$$

$$\therefore\ \{f'(x)\}^2=4-2f(x)\ \text{(단, } f'(x)\ge 0,\ f(x)\ge 2\text{)} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$x\le b$일 때 $f'(x)=2a(x-b)$이므로 ㉡에서

$$4a^2(x-b)^2=4-2\left\{a(x-b)^2+c\right\} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢이 $x \le b$인 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $4a^2=-2a$이고 $4-2c=0$이다.

$$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ c=2$$

따라서 $x \le b$일 때

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-b)^2+2$$

이때 $b<0$이면 $f(b)=2$이고 ㉠에서 $f(0)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이라는 ㉡의 조건에 모순이다.

$$\therefore\ b \ge 0$$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $f(0)=-\frac{1}{2}b^2+2=0$이다.

$$\therefore\ b^2=4$$

$$\therefore\ b=2\,(\because\ b \ge 0)$$

이때 ㉡에서 $f'(x) \ge 0$이고 $f(x) \le 2$이므로 $x>b$일 때 $f(x)=2$이다. 따라서

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x \le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x)dx &= \int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx\\ &=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2\,dx\\ &=\left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2+\left[2x\right]_2^6\\ &=\left(4-\frac{8}{6}\right)+(12-4)\\ &=12-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore\ p+q=3+32=35$$

[문제1] 대학발표 예시답안

(1-1) $\int_{-1}^{-1} g(t)\,dt=0=\frac{2f(-1)}{1+f(-1)}$ 이므로 $f(-1)=0$ 이다.

$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt=1=\frac{2f(1)}{1+f(1)}$ 이므로 $f(1)=1$ 이다.

정답 : $f(-1)=0$, $f(1)=1$

(1-2) 위에서 얻은 결과 $f(-1)=0$, $f(1)=1$과 $c=\frac{1}{2}$을 연립하면

$$ae-b+c=0,\ \frac{a}{e}+b+c=1,\ c=\frac{1}{2}$$

로부터 $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$을 구할 수 있으므로 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)$이다. 이때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$이므로 $\mathrm{P}\left(-1\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{3/2}{1+3/4}=\frac{6}{7}$이다.

정답 : $\frac{6}{7}$

(1-3) $f(-1)=0$, $f(1)=1$을 풀면 a, b를 c에 관한 식으로 표현할 수 있다. 즉

$$ae-b+c=0,\ \frac{a}{e}+b+c=1$$

에서

$$a=\frac{e}{1+e^2}-\frac{2e}{1+e^2}c,\ b=\frac{e^2}{1+e^2}-\frac{e^2-1}{1+e^2}c$$

를 구할 수 있다.

그런데 $g(x)$가 확률밀도함수이므로 $\frac{d}{dx}\frac{2f(x)}{1+f(x)}\ge 0$이 되어야 한다.

따라서 $\frac{d}{dx}\frac{2f(x)}{1+f(x)}=\frac{2f'(x)}{\{1+f(x)\}^2}\ge 0$으로부터 $-1\le x\le 1$인 모든 x에 대하여 $f'(x)=-ae^{-x}+b\ge 0$이다.

한편, $f''(x)=ae^{-x}$로부터 $f'(x)$는 a의 값에 따라 증가함수 또는 감소함수이므로 $f'(x)\ge 0$을 만족하기 위해서는 $f'(-1)\ge 0$과 $f'(1)\ge 0$만 만족하면 된다.

$$f'(x)=-ae^{-x}+b=-\left(\frac{e}{1+e^2}-\frac{2e}{1+e^2}c\right)e^{-x}+\frac{e^2}{1+e^2}-\frac{e^2-1}{1+e^2}c$$

이므로 $f'(-1)\ge 0$과 $f'(1)\ge 0$을 풀면,

$$f'(-1)=c\ge 0,\ f'(1)=\frac{e^2-1}{e^2+1}-\frac{e^2-3}{e^2+1}c\ge 0$$

이 되고, $0\le c\le\frac{e^2-1}{e^2-3}$을 얻는다.

따라서 c의 최솟값은 0이고 최댓값은 $\frac{e^2-1}{e^2-3}$이다.

정답 : 최솟값 0, 최댓값 $\frac{e^2-1}{e^2-3}$

[문제2] 대학발표 예시답안

(2-1)

원 C 위의 한 점 X에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 O라 하면 O는 원 C의 중심이다. 선분 AO의 길이를 x, 선분 BO의 길이를 y라 하면

$$x+y=5$$

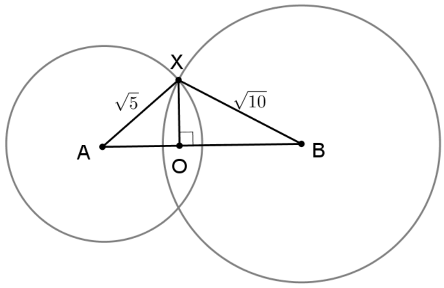
이고, 삼각형 XAO와 삼각형 XOB가 각각 직각삼각형이 되므로

$$x^2+r^2=5,\ y^2+r^2=10$$

이다. 이 세 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=3,\ r=1$을 얻는다.

정답 : 1

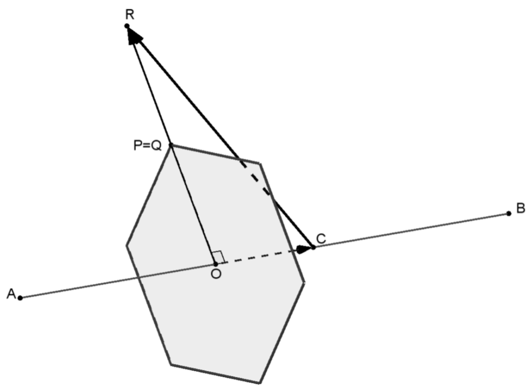
(2-1) 다른 풀이



그림에서 선분 XO의 길이가 원 C의 반지름임을 알 수 있다. 이것을 r라 두면,

$$\sqrt{5-r^2}+\sqrt{10-r^2}=5$$
$$\sqrt{10-r^2}=5-\sqrt{5-r^2}$$
$$10-r^2=25-10\sqrt{5-r^2}+5-r^2$$
$$\sqrt{5-r^2}=2$$
$$5-r^2=4$$
$$\therefore\ r=1\ (r>0)$$

(2-2)



$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$$

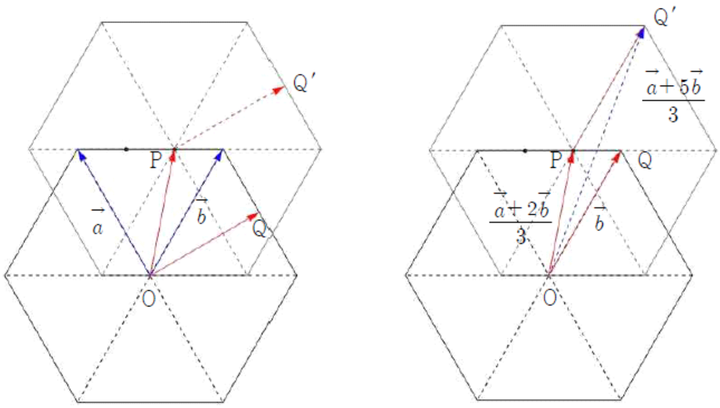
이고 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$ 와 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 는 수직이다. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 라 하면 $|\overrightarrow{OC}|=1$ 이다. 또한 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$ 가 최대가 되는 것은 $P=Q$ 이고 P 가 정육각형의 꼭짓점일 때 2 이므로 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$ 라 하면 $|\overrightarrow{OR}|=2$ 이다. 이때

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}|^2&=|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}|^2+|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2\\&=|-\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2=1+4=5\end{aligned}$$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}|$ 의 최댓값은 $\sqrt{5}$ 이다.
정답 : $\sqrt{5}$

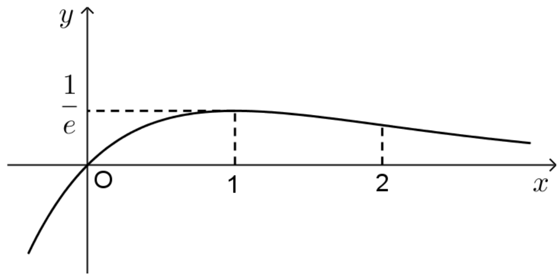
(2-3)
문제 (2-2)의 풀이에서처럼 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$ 가 최대가 될 때, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}|$ 는 최대가 된다. 점 P 가 정육각형 H 의 한 변 EF 를 $2:1$ 로 내분하는 점일 때, 벡터 $\overrightarrow{OE}$ 를 $\vec{a}$, 벡터 $\overrightarrow{OF}$ 를 $\vec{b}$ 라 하면, 다음 그림에서 보듯이 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ 이고, $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값은

$$\left|\frac{\vec{a}+5\vec{b}}{3}\right|=\frac{\sqrt{25+10\vec{a}\cdot\vec{b}+1}}{3}=\frac{\sqrt{31}}{3}$$



따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}|$ 의 최댓값은 $\sqrt{1+\dfrac{31}{9}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ 이다.

[문제3] 대학발표 예시답안
(3-1)
$h'(x)=(1-x)e^{-x}$, $h''(x)=(x-2)e^{-x}$ 임을 이용하여 $y=h(x)=xe^{-x}$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다. $x=1$ 일 때 극댓값 $\dfrac{1}{e}$ 을 갖고 $x=2$ 일 때 변곡점 $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$ 를 갖는다.



정답 : 그래프의 개형(위 그림), $x=1$일 때 극댓값 $\frac{1}{e}$, 변곡점 $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$

(3-2)
정적분과 미분의 관계를 이용하면

$$g'(x)=f(x)e^{-f(x)}$$

이다. 문제 (3-1)에서 그린 그래프에서 $xe^{-x}=\frac{1}{e}$을 만족하는 x는 1뿐이다. 그러므로

$$g'(0)=f(0)e^{-f(0)}=\frac{1}{e}$$

을 만족하는 $f(0)$은 1뿐이다. 즉 $f(0)=1$이다.
정답 : $f(0)=1$

(3-3)
문제 (3-2)에 의하여 $f(0)=1$이다. 또한 방정식

$$g''(x)=f'(x)e^{-f(x)}\{1-f(x)\}=0$$

의 실근의 개수가 1이므로 방정식 $f'(x)\{1-f(x)\}=0$의 실근의 개수도 1이어야 하는데, $f(0)=1$이므로 $x=0$이 이 방정식의 실근이다. 또한 $f'(x)$는 3차식이므로 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 문제의 조건을 만족하려면 $f'(x)=0$의 실근이 $x=0$이어야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$f'(x)=4x^3 \quad \text{또는} \quad f'(x)=4x(x^2+bx+c) \ (\text{단, } b^2-4c<0)$$

(첫 번째 경우) $f'(x)=4x^3$인 경우에

$$f(x)=x^4+1$$

이고, 이때 방정식 $0=1-f(x)=-x^4$의 해는 $x=0$뿐이므로 문제의 조건이 모두 성립한다.
(두 번째 경우) $f'(x)=4x(x^2+bx+c)$ (단, $b^2-4c<0$)인 경우

$$f(x)=x^4+\frac{4}{3}bx^3+2cx^2+1 \quad (b^2-4c<0)$$

가 되고, $0\le b^2<4c$를 이용하면 $x^2+\frac{4b}{3}x+2c>0$이므로

방정식 $0=1-f(x)=-x^2\left(x^2+\frac{4b}{3}x+2c\right)$는 $x=0$만을 실근으로 갖는다. 따라서 문제의 조건이 모두 성립한다.

정답 : $f(x)=x^4+1$, $f(x)=x^4+\frac{4}{3}bx^3+2cx^2+1 \quad (b^2-4c<0)$

(3-3) 다른 풀이

방정식 $g''(x)=f'(x)e^{-f(x)}\{1-f(x)\}=0$는 $f(0)=1$이므로 $x=0$을 근으로 가진다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1\,(a,\, b,\, c$는 실수)이라 하면 삼차방정식인

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c=0$$

은 1개의 실근을 가져야 하는데 그 실근은 $x=0$이어야 한다. 따라서 $c=0$이고

$$f'(x)=x(4x^2+3ax+2b)$$

이므로 방정식 $4x^2+3ax+2b=0$는 $x=0$을 중근으로 가지든지 실근을 갖지 않아야 한다.

즉, $a=b=0$이거나 $9a^2-32b<0$이어야 한다.

(첫 번째 경우) $a=b=0$인 경우

$$f(x)=x^4+1$$

(두 번째 경우) $9a^2-32b<0$인 경우

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+1$$

정답 : $f(x)=x^4+1$ 또는 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+1$ (단, $9a^2-32b<0$)

(3-4)

문제 (3-3)에서 구한 $f(x)$ 각각에 대해 정적분을 구해보자.

(i) $f(x)=x^4+1$일 때 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{12}{5}$이다.

(ii) $f(x)=x^4+\frac{4}{3}bx^3+2cx^2+1 \quad (b^2-4c<0)$일 때, $c>\frac{b^2}{4}\ge 0$이므로 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1}\left(x^4+\frac{4}{3}bx^3+2cx^2+1\right)dx \\ &= 2\int_{0}^{1}\left(x^4+2cx^2+1\right)dx \\ &= \frac{12}{5}+\frac{4}{3}c \\ &> \frac{12}{5}\end{aligned}$$

(i)과 (ii)를 종합하면 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$의 최솟값은 $\frac{12}{5}$이다.

정답 : $\frac{12}{5}$

(3-4) (다른 풀이)

(i) $f(x)=x^4+1$일 때 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\dfrac{12}{5}$ 이다.

(ii) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+1$ (단, $9a^2-32b<0$)일 때

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1}\left(x^4+ax^3+bx^2+1\right)dx \\ &= 2\int_{0}^{1}\left(x^4+bx^2+1\right)dx \\ &= \frac{12}{5}+\frac{2}{3}b \\ &> \frac{12}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9a^2}{32} \geq \frac{12}{5}\end{aligned}$$

(i)과 (ii)를 종합하면 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ 의 최솟값은 $\dfrac{12}{5}$ 이다.

정답 : $\dfrac{12}{5}$

29 세종대학교(자연A) 수시[29)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정에서 제시된 여러 단원의 개념에 대한 이해도 및 개념을 융합적으로 사고할 수 있는지 등을 종합적으로 평가	국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(2과목 평균) 중 영어를 포함한 3개 영역 등급의 합이 7 이내 (단, 한국사는 필수로 응시하여야 함)	수학(3문제, 문제별로 세부 3문항)	120분

[문항 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

어떤 버스정류장에서 A대학교로 가는 B버스가 있다. 날씨가 맑을 때, 버스정류장에서 B버스를 기다리는 시간의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다. (단, 시간의 단위는 분이다.)

$$f(x)=\frac{1}{30}(0 \le x \le 30)$$

한편 날씨가 맑지 않을 때, 버스정류장에서 B버스를 기다리는 시간의 확률밀도함수 $g(x)$는 다음과 같다. (단, 시간의 단위는 분이다.)

$$g(x)=\frac{1}{60}(0 \le x \le 60)$$

일기예보에 의하면 날씨가 맑을 확률이 0.8, 맑지 않을 확률이 0.2이다. 수업에 지각하지 않기 위해서는 날씨에 관계없이 늦어도 오전 8시 15분에 버스를 타야 한다.

(1-1) 어떤 학생이 오전 8시에 버스정류장에 도착한다고 가정하자. 이 학생이 지각하지 않을 확률을 구하시오. (60점)

(1-2) 어떤 학생이 오전 8시에 버스정류장에 도착하여 지각하지 않을 때, 날씨가 맑을 확률을 구하시오. (60점)

(1-3) 지각하지 않을 확률이 0.6이상 되기 위해서는 버스정류장에 늦어도 몇 시 몇 분에 도착하여야 하는지 구하시오. (60점)

29) 세종대학교 홈페이지

[문항 2] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

좌표공간에 원점 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$과 점 $\mathrm{A}(1, -1, 2)$가 있다. 점 P는 아래의 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P에서 직선 $x-1=y+1=\dfrac{z-2}{2}$에 내린 수선의 발 H는 $(2, 0, 4)$이다.

(나) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \le 5$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{HP}}| \le 1$이다.

(2-1) A와 P 사이의 거리의 최솟값을 구하시오. (60점)

(2-2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$가 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하시오. (60점)

(2-3) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$가 최대가 되는 점 P의 x좌표의 값을 구하시오. (60점)

[문제 3] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-xe^{x^2}}{x-1} & (x \neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$$

라 정의하자. $F'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(3-1) $f(1)$의 값을 구하시오. (60점)

(3-2) 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(1)$을 a에 관한 식으로 나타내시오. (60점)

(3-3) $g(x)=f'(x)$라 하자. $F'(1)=3$일 때, 미분계수의 정의를 이용하여 $g'(1)$을 구하시오. (60점)

(3-4) 모든 실수 x에 대하여 $xF(1-x)+(1-x)F(x)=0$일 때, $\int_0^1 f(x)dx$를 구하시오. (60점)

• 풀어보기

문제1. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x), \qquad b=\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

일 때, $a+\dfrac{100}{\pi}b$의 값을 구하시오. (2016. 3월)

문제2. 세 학생 A, B, C 가 다음 단계에 따라 최종 승자를 정한다.

[단계 1] 세 학생이 동시에 가위바위보를 한다.
[단계 2] [단계 1]에서 이긴 학생이 1명뿐이면 그 학생이 최종 승자가 되고, 이긴 학생이 2명이면 [단계 3]으로 가고, 이긴 학생이 없으면 [단계 1]로 간다.
[단계 3] [단계 2]에서 이긴 2명 중 이긴 학생이 나올 때까지 가위바위보를 하여 이긴 학생이 최종 승자가 된다.

가위바위보를 2번 한 결과 A 학생이 최종 승자로 정해졌을 때, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명이었을 확률은? (단, 각 학생이 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.)(2014. 10월)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 51

$f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 에서

$$f(\pi-x)=\frac{e^{\cos(\pi-x)}}{1+e^{\cos(\pi-x)}}=\frac{e^{-\cos x}}{1+e^{-\cos x}}=\frac{e^{-\cos x}\times e^{\cos x}}{(1+e^{-\cos x})\times e^{\cos x}}=\frac{1}{e^{\cos x}+1}$$

그러므로 $a=f(\pi-x)+f(x)=\dfrac{1}{e^{\cos x}+1}+\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}=\dfrac{1+e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}=1$

$$b=\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi}\{1-f(\pi-x)\}dx=\int_0^{\pi}1\,dx-\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx$$

$\pi-x=t$ 로 놓으면

$x=\pi-t$ 이므로 $\dfrac{dx}{dt}=-1$

$x=0$ 일 때, $t=\pi$ 이고

$x=\pi$ 일 때, $t=0$ 이므로

$$b=\pi+\int_{\pi}^{0}f(t)dt=\pi-\int_0^{\pi}f(t)dt=\pi-b$$

$b=\pi-b$ 이므로 $b=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $a+\dfrac{100}{\pi}b=1+\dfrac{100}{\pi}\times\dfrac{\pi}{2}=1+50=51$

풀어보기(문제2) 정답 ④

A가 2번 가위바위보를 하여 최종 승자가 되는 사건을 X, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건을 Y라 하자.

ⅰ) 첫 번째에 이긴 학생이 없을 때

세 학생이 첫 번째에 모두 다른 것을 내거나 모두 같은 것을 내고, 2번째에 A가 이길 확률은 $\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\dfrac{3!+3}{3^3}\times\dfrac{3}{3^3}=\dfrac{1}{27}$ 이다.

ⅱ) 첫 번째에 이긴 학생이 2명일 때

첫 번째에 A를 포함한 2명이 이기고, 2번째에 A가 이길 확률은

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{3\times2}{3^3}\times\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{2}{27}$ 이다.

ⅰ), ⅱ)에서 $\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(X\cap Y^C)+\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\dfrac{2}{3}$

[문제1] 대학발표 예시답안

(1−1)

표본공간을 S, 지각하지 않을 사건을 O, 날씨가 맑을 사건을 G라고 하자. 날씨가 맑지 않을 사건은 G의 여사건 G^C이다.

일기예보에 의하면 $\mathrm{P}(G)=0.8$이고 $\mathrm{P}(G^C)=1-\mathrm{P}(G)=0.2$이다.

오전 8시에 버스정류장에 도착하면, 버스를 기다리는 시간이 15분 이하이어야 지각하지 않는다. 따라서 날씨가 맑을 때, 지각하지 않을 확률 $\mathrm{P}(O\,|\,G)$와 날씨가 맑지 않을 때, 지각하지 않을 확률 $\mathrm{P}(O\,|\,G^C)$은 각 확률밀도함수를 적분하여 다음과 같이 계산된다.

$$\mathrm{P}(O|\,G)=\int_0^{15}\frac{1}{30}dx=0.5,\ \mathrm{P}(O\,|\,G^C)=\int_0^{15}\frac{1}{60}dx=0.25$$

한편 표본공간 S는 서로 배반인 사건 G와 G^C의 합집합 $(S=G\cup G^C)$이므로, 사건 O를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$O=O\cap S=O\cap(G\cup G^C)=(O\cap G)\cup(O\cap G^C)$$

사건 G와 G^C이 서로 배반이므로, 사건 $(O\cap G)(\subset G)$와 $(O\cap G^C)(\subset G^C)$는 서로 배반이다. 그러므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(O)=\mathrm{P}((O\cap G)\cup(O\cap G^C))=\mathrm{P}(O\cap G)+\mathrm{P}(O\cap G^C)\text{이다.}$$

확률의 곱셈정리에 의하여 $\mathrm{P}(O\cap G)=\mathrm{P}(G)\mathrm{P}(O\,|\,G)$이고

$P(O\cap G^C)=P(G^C)P(O\,|\,G^C)$이다. 최종적으로 지각하지 않을 확률 $P(O)$은 다음과 같다.

$$P(O)=P(O\cap G)+P(O\cap G^C)=0.8\times0.5+0.2\times0.25=0.45$$

(1-2)

오전 8시에 버스정류장에 도착하여 지각하지 않을 때, 날씨가 맑을 확률

$P(G\,|\,O)=\dfrac{P(G\cap O)}{P(O)}$이다. 확률의 곱셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(G\cap O)=\mathrm{P}(O)\mathrm{P}(G\,|\,O)=0.8\times0.5=0.4$이고 확률 $\mathrm{P}(O)$는 (1-1)에 의해 0.45이므로 확률 $\mathrm{P}(G\,|\,O)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(G\,|\,O)=\frac{\mathrm{P}(G)\mathrm{P}(O\,|\,G)}{\mathrm{P}(O)}=\frac{0.4}{0.45}=\frac{8}{9}$$

(1-3)

버스정류장에 도착한 시간부터 8시 15분까지의 시간을 $y\ (y\geq 0)$라 하자. 버스를 기다리는 시간이 y이하이면 지각하지 않는다. 따라서

$$\mathrm{P}(O|\,G)=\int_0^{y}\frac{1}{30}dx=\frac{y}{30}\text{이고 }\mathrm{P}(O|\,G^C)=\int_0^{y}\frac{1}{60}dx=\frac{y}{60}$$

이다. (1-1)에서 사용한 계산방법을 이용하면, 지각하지 않을 확률 $\mathrm{P}(O)$는 다음과 같다.

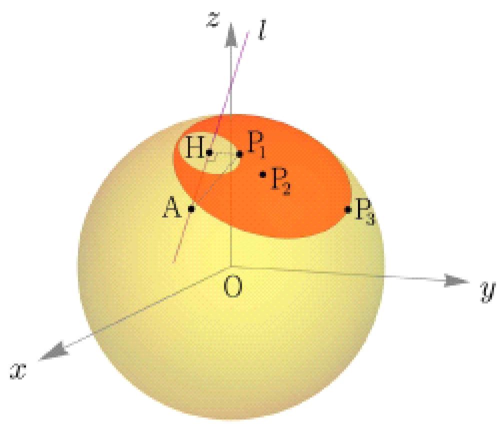
$$\mathrm{P}(O)=\mathrm{P}(O\cap G)+\mathrm{P}(O\cap G^C)=0.8\times\frac{y}{30}+0.2\times\frac{y}{60}=\frac{3}{100}y$$

$P(O) = \dfrac{3}{100}y \geq 0.6$이어야 하므로 $y \geq 20$이다.

따라서 늦어도 오전 8시 15분의 20분 전인 오전 7시 55분에 도착하여야 한다.

[문제2] 대학발표 예시답안

(2-1)



위 그림과 같이 문제에서 주어진 직선을 l이라 하고 문제의 조건으로부터 반지름이 5인 노란색 구를 생각하자. 또한 l에 수직이고 H를 포함하는 평면이 구의 내부와 만나는 부분 중에서 H로부터 거리가 1이상인 영역을 주황색으로 나타내자. 위 그림에서와 같이 주황색 영역 위에 있는 점 중에서 H로부터 거리가 1인 점 P_1을 택하면 $\overline{AP_1}$이 A와 P 사이의 거리의 최솟값이다.

$\overline{AH} = \sqrt{6}$ 이고 $\overline{HP_1} = 1$이므로 피타고라스의 정리에 의하여 답은 $\sqrt{6+1} = \sqrt{7}$ 이다.

(2-2) 위 그림에서와 같이 P_2가 주황색 원의 중심일 때, $\overline{OP_2}$가 $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값이다.

평면의 방정식 $x+y+2z-10=0$이므로 원점과의 거리는 $\dfrac{10}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ 이다.

(1,1,2)가 평면에 수직인 벡터이므로

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}\dfrac{(1,1,2)}{\sqrt{6}} = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$이고 P의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$이다.

(2-3) 위 그림에서와 같이 H와 P_2를 지나는 직선이 주황색 원과 만나는 점을 P_3이라 하자. $P = P_3$일 때, $|\overrightarrow{AP}|$가 최대가 된다.

$\overrightarrow{HP_2} = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$와 $\overrightarrow{P_2P_3}$이 평행하므로 $\overline{OP_2}$ 와 $\overline{OP_3}$ 의 길이를 이용하면

원의 반지름 $\overline{P_2P_3}$이 $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \dfrac{\sqrt{10}}{2}\overrightarrow{\mathrm{HP}_2}$이므로 답은 $\dfrac{5}{3} - \dfrac{\sqrt{10}}{6}\left(= \dfrac{10-\sqrt{10}}{6}\right)$이다.

[문제3] 대학발표 예시답안

(3-1) $F(x)$가 연속함수이므로 $\lim\limits_{x\to 1}F(x) = F(1) = a$이다. 즉 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-xe^{x^2}}{x-1} = a$인데 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$이므로 $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-xe^{x^2}\right) = 0$이다. $f(x)$가 연속함수이므로 $f(1) = e$이다.

[다른 풀이] $x \neq 1$일 때 $f(x) = (x-1)F(x) + xe^{x^2}$이다. $F(x)$와 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(1) = \lim\limits_{x\to 1}f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left\{(x-1)F(x) + xe^{x^2}\right\} = e$이다.

(3-2) $f(x) = (x-1)F(x) + xe^{x^2}$이다.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)F(x)+xe^{x^2}-e}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)F(x)}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}F(x) + \lim_{x\to 1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1} = a + 3e$$

(여기서 $h(x) = xe^{x^2}$이라 두면 $h'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$이 되어

$$\lim_{x\to 1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1) = 3e)$$

[다른 풀이] $a = \lim\limits_{x\to 1}F(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-xe^{x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)+f(1)-xe^{x^2}}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x\to 1}\frac{xe^{x^2}-e}{x-1} = f'(1) - 3e$$

이므로 $f'(1) = a + 3e$이다.

(3-3) $g'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{F(x)+(x-1)F'(x)+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-(a+3e)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{F(x)-F(1)}{x-1} + F'(x) + \frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-3e}{x-1}\right) = F'(1) + F'(1) + 10e = 6 + 10e$$

여기서 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-3e}{x-1}\right)$는 $h(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$라 하면 $h'(x) = 2xe^{x^2} + 4xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2}$이 되어

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-3e}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=10e$$

이다.

(3-4) 주어진 문제의 조건을 이용하면 $\int_0^1(x-1)F(x)dx=\int_0^1 xF(1-x)dx$가 된다.

$u=1-x$로 치환하면

$$\int_0^1 xF(1-x)dx=\int_1^0(1-u)F(u)(-du)=-\int_0^1(u-1)F(u)du$$

를 얻는다. 따라서

$$\int_0^1(x-1)F(x)dx=0$$

이다. 그러므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left\{(x-1)F(x)+xe^{x^2}\right\}dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

이다.

30 세종대학교(자연B) 수시[30)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정에서 제시된 여러 단원의 개념에 대한 이해도 및 개념을 융합적으로 사고할 수 있는지 등을 종합적으로 평가	국어, 수학(가), 영어, 과학탐구(2과목 평균) 중 영어를 포함한 3개 영역 등급의 합이 7 이내 (단, 한국사는 필수로 응시하여야 함)	수학(3문제, 세부 10문항)	120분

[문항 1] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

함수 $f(x)=e^{x+x^2}+e^{x+\sqrt{x}}$ ($x \geq 0$)와 $f(x)$의 역함수 $g(x)$ ($x \geq 2$)에 대하여 정적분에 관한 다음 질문에 답하시오.

(1-1) $\int_0^1 e^{x+x^2}dx = A$일 때, $\int_0^1 2x\,e^{x+x^2}dx$를 A에 관한 식으로 나타내시오. (60점)

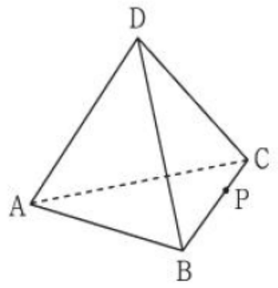
(1-2) 정적분 $\int_0^1 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (60점)

(1-3) 정적분 $\int_2^{2e^2} g(x)dx$ 의 값을 구하시오. (60점)

30) 세종대학교 홈페이지

[문항 2] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사면체 ABCD가 있다. 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 P라 하고 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$라 하자.



(2-1) 세 꼭짓점 A,B,C를 포함하는 평면을 α라 하자. 점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overrightarrow{DH}$를 $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$에 관한 식으로 나타내시오. (60점)

(2-2) 선분 AP의 중점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{DQ}$를 $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$에 관한 식으로 나타내시오. (60점)

(2-3) 점 R가 선분 AP 위를 움직일 때, 점 D와 점 R 사이의 거리를 L이라 하자. L^2의 최솟값을 구하시오. (60점)

[문제 3] 아래 글을 읽고, 각 물음에 답하시오.

실수 전체의 집합에서 정의되는 함수 $f(x)=ae^{x}+x^{2}+bx+c$는 다음 조건을 만족시킨다. (단. a,b,c는 실수이고 $a>0$이다.)

(가) $x(x-1)f(x)\geq 0$

(나) $g(x)=f'(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=(a+4)x-3$은 좌표평면의 $0<x<1$인 영역에서 만난다.

(3-1) 조건 (가)를 이용하여 $f(0)$와 $f(1)$의 값을 각각 구하시오. (60점)

(3-2) b와 c를 a에 관한 식으로 각각 나타내시오. (60점)

(3-3) a값의 범위를 구하시오. (60점)

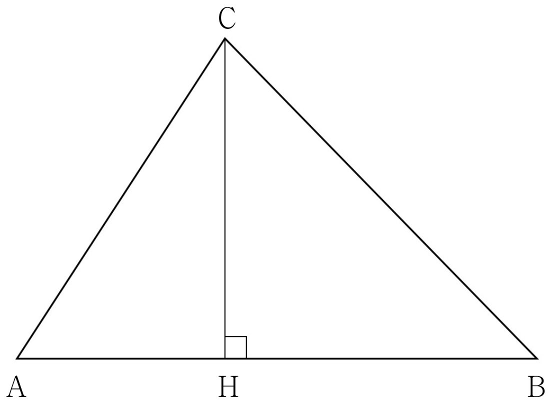
(3-4) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,g(1))$에서의 접선의 y절편을 k라 하자. $\dfrac{4-4e}{k+1}$가 자연수가 되는 실수 a의 값을 모두 구하시오. (단, $2.7<e<2.8$이다.) (60점)

• 풀어보기

문제1. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)=\int_{1}^{n} x^3 e^{x^2} dx$라 할 때, $\dfrac{f(5)}{f(3)}$의 값은? (2015. 4월)

① e^{14} ② $2e^{16}$ ③ $3e^{16}$ ④ $4e^{18}$ ⑤ $5e^{18}$

문제2. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}}$의 값은? (2016. 7월)



(가) 점 H가 선분 AB를 2 : 3으로 내분한다. (나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}=40$ (다) 삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

$x^2 = t$라 하면 $2x = \dfrac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$이므로

$$f(n) = \int_1^n \left(x^2 e^{x^2} \times x\right) dx = \int_1^{n^2} \frac{1}{2} te^t dt = \frac{1}{2}\left[te^t - e^t\right]_1^{n^2} = \frac{1}{2}\left(n^2 e^{n^2} - e^{n^2}\right) = \frac{e^{n^2}}{2}\left(n^2 - 1\right)$$

따라서 $\dfrac{f(5)}{f(3)} = \dfrac{12 \times e^{25}}{4 \times e^9} = 3e^{16}$

풀어보기(문제2) 정답 ①

조건 (가)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = 2k$, $|\overrightarrow{\mathrm{HB}}| = 3k\,(k>0)$라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5k$

조건 (나)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 40$

$2k \times 5k = 40$ 이므로 $k=2$ 이고 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 10$

조건 (다)에서 삼각형 ABC 의 넓이는 30 이므로

$\dfrac{1}{2} \times |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = 30$ 에서 $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}| = 6$

$\angle \mathrm{AHC} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}} = |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = 36$

[문제1] 대학발표 예시답안

(1-1)

$$\int_0^1 2x e^{x+x^2} dx = \int_0^1 e^x \cdot 2x e^{x^2} dx = \left[e^x \cdot e^{x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot e^{x^2} dx = e^2 - 1 - A$$

[다른 풀이] $\displaystyle\int_0^1 2x e^{x+x^2} dx = \int_0^1 (2x+1) e^{x+x^2} dx - \int_0^1 e^{x+x^2} dx = \left[e^{x+x^2}\right]_0^1 - A = e^2 - 1 - A$

(1-2)

$\displaystyle\int_0^1 e^{x+\sqrt{x}} dx$에서 $u = \sqrt{x}$로 치환하면 $u^2 = x$이고 $dx = 2udu$이다.

따라서 $\displaystyle\int_0^1 e^{x+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2u e^{u+u^2} du = e^2 - 1 - A$이다. 그러므로

$\displaystyle\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x \cdot e^{x^2} dx + \int_0^1 e^x \cdot e^{\sqrt{x}} dx = A + e^2 - 1 - A = e^2 - 1$이 된다.

(1-3)

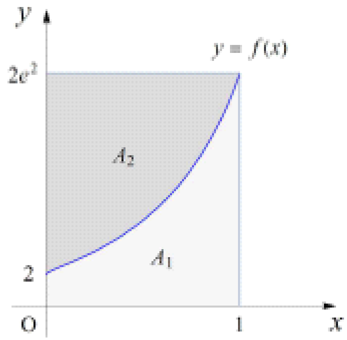
$\int_2^{2e^2} g(x)dx$에서 $y=g(x)$로 치환하자. 그러면 $x=f(y)$가 되고 $dx=f'(y)dy$이다. 따라서

$$\int_2^{2e^2} g(x)dx=\int_0^1 yf'(y)dy=[yf(y)]_0^1-\int_0^1 f(y)dy=2e^2-\int_0^1 f(x)dx=e^2+1$$

이다.

[다른 풀이] $f(0)=0$, $f(1)=2e^2$이고 $f'(x)>0$이므로 오른쪽과 같이 $f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다. 역함수의 성질을 이용하면, 오른쪽 그림에서 $A_1=\int_0^1 f(x)dx$, $A_2=\int_2^{2e^2} g(x)dx$이다. 그러므로 다음을 얻는다.

$$\int_2^{2e^2} g(x)dx=A_2=2e^2-A_1=e^2+1$$



[문제2] 대학발표 예시답안

(2-1) 점 D의 평면 α 위로의 수선의 발 H는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 $\overrightarrow{AH}=\frac{\vec{b}}{3}+\frac{\vec{c}}{3}$이다. 따라서 $\overrightarrow{DH}=\frac{\vec{b}}{3}+\frac{\vec{c}}{3}-\vec{d}$이다.

[다른 풀이] $\overrightarrow{AH}=k(\vec{b}+\vec{c})$이고 $\overrightarrow{DH}=k(\vec{b}+\vec{c})-\vec{d}$이다. $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{DH}$로부터 $\{k(\vec{b}+\vec{c})-\vec{d}\}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0$이다. 따라서 $k=\frac{1}{3}$이다. 그러므로 답은 $\overrightarrow{DH}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{d}$이다.

(2-2) $\overrightarrow{AP}=\frac{\vec{b}}{3}+\frac{2\vec{c}}{3}$이고 $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\frac{\vec{b}}{6}+\frac{\vec{c}}{3}$이다.

따라서 $\overrightarrow{DQ}=\frac{\vec{b}}{6}+\frac{\vec{c}}{3}-\vec{d}$이고

$$|\overrightarrow{DQ}|^2=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+1+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{25}{36}$$

이다. 그러므로 답은 $\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$이다.

(2-3) R가 선분 $\overline{AP}$를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이라 하면 $\overrightarrow{AR}=t\left(\frac{\vec{b}}{3}+\frac{2\vec{c}}{3}\right)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{DR}}=t\left(\dfrac{\vec{b}}{3}+\dfrac{2\vec{c}}{3}\right)-\vec{d}$이다. 그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{DR}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{DR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\dfrac{7}{9}t^2-t+1$이다.

따라서 L^2의 최솟값은 $t=\dfrac{9}{14}$일 때 $\dfrac{19}{28}$이다.

[문제3] 대학발표 예시답안

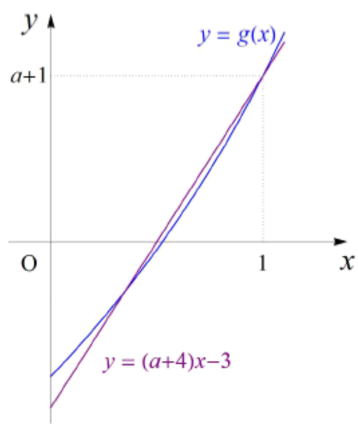
(3-1) $f(x)$는 연속함수이다. $x(x-1)f(x)\geq 0$이므로 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 1$일 때 $f(x)\geq 0$이고, $0\leq x\leq 1$일 때 $f(x)\leq 0$이다. 따라서 $f(0)=0$이고 $f(1)=0$이다.

(3-2) $f(0)=a+c=0$에서 $c=-a$이고, 마찬가지로 $f(1)=ae+1+b+c=0$에서 $b=a-ae-1$이다.

(3-3) $f'(x)=ae^x+2x+a-ae-1$이고 $a>0$이므로 $f''(x)=ae^x+2>0$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 $f(0)=f(1)=0$이다. 결국 다음 함수는 조건 (가)를 만족시킨다.

$$f(x)=ae^x+x^2+(a-ae-1)x-a\ \ (a>0)$$

그런데 $g(x)=f'(x)=ae^x+2x+a-ae-1$이고 $g'(x)=ae^x+2>0$이므로 $g(x)$는 증가함수이고 $g''(x)=ae^x>0$이므로 $g(x)$는 아래로 볼록하다. 또한 직선 $y=(a+4)x-3$은 기울기가 $a+4$이고 $(1,a+1)$을 지나는데 $g(1)=a+1$이므로 곡선 $y=g(x)$는 $x=1$일 때 직선 $y=(a+4)x-3$과 만난다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키도록 직선과 곡선의 위치 관계를 생각하면 $g'(1)>a+4$이고 $g(0)>-3$이어야 한다.(아래 그림 참조)



우선 $g'(1)>a+4$를 계산하면 다음을 얻는다.

$$a>\frac{2}{e-1}$$

또한 $g(0)>-3$을 계산하면 다음을 얻는다.

$$a<\frac{2}{e-2}$$

결국 문제의 모든 조건을 만족시키는 실수 a 값의 범위는 다음과 같다.

$$\frac{2}{e-1} < a < \frac{2}{e-2}$$

(3-4) $g(x) = f'(x) = ae^x + 2x + a - ae - 1$, $g'(x) = ae^x + 2$, $g(1) = a+1$, $g'(1) = ae+2$이므로 $x=1$에서 곡선 $y=g(x)$에 대한 접선의 방정식은 $y=(ae+2)x+a-ae-1$
이다. 따라서

$$k = a - ae - 1\text{이고 } \frac{4-4e}{k+1} = \frac{4(1-e)}{a(1-e)} = \frac{4}{a}$$

이다. 문제 (3-3)의 결과로부터

$$1.4 < 2(e-2) < \frac{4}{a} < 2(e-1) < 3.6$$

이므로 $\frac{4}{a}$의 값으로 가능한 자연수는 2 또는 3이고, 이 때 $a=2$ 또는 $a=\frac{4}{3}$이다.

31 숙명여자대학교 모의[31)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	수능 4개영역 중 3개 영역 등급합 6이내 (탐구 선택 시 1과목 반영/한국사 응시필수)	공통문항(1문항) 계열문항–수학 (1문항, 5문제)	120분

[계열문항]

<가> 0 이상의 정수 c에 대하여 다음과 같은 <게임1>을 생각해보자. 공이 1개 이상씩 들어있는 두 바구니 X, Y에서 두 플레이어 A와 B가 번갈아 공을 꺼낸다. 이때, 각 플레이어는 두 바구니 중 한쪽을 선택하여 공을 꺼내거나, 양쪽 바구니 모두에서 공을 꺼낼 수 있는데, 두 바구니 중 한쪽을 선택하여 공을 꺼낼 경우에는 개수에 제한 없이 한 개 이상의 공을 꺼낼 수 있고, 양쪽 바구니 모두에서 공을 꺼낼 경우에는 두 바구니에서 꺼내는 공의 개수의 차이가 c이하이어야 한다. 예를 들어 $c=0$이면 두 바구니에서 꺼내는 공의 개수는 같다. 이러한 규칙으로 게임을 하여 두 바구니를 동시에 비우는 플레이어가 승자가 된다. 즉, 자기 차례가 왔을 때 두 바구니에서 더 이상 꺼낼 공이 없으면 패자가 된다.

$c=0$인 경우의 예를 들어보자. 두 바구니 X와 Y에 공이 각각 10개와 20개가 들어있고 플레이어 A부터 시작한다고 하면 다음과 같은 가상의 게임 결과를 생각할 수 있다. 여기서 바구니 X, Y에 남아있는 공의 개수를 순서쌍으로 나타내어 표기하기로 하자. 즉, (x, y)는 X에는 x개의 공, Y에는 y개의 공이 남아 있는 상태를 표시한다.

$$\begin{array}{lccccccc} \text{플레이어} = & \text{A} & \text{B} & \text{A} & \text{B} & \text{A} & \text{B} & \text{A} \\ (x,y) & =(10,20) & \to(10,14) & \to(2,6) & \to(2,5) & \to(2,1) & \to(1,1) & \to(0,0) \end{array}$$

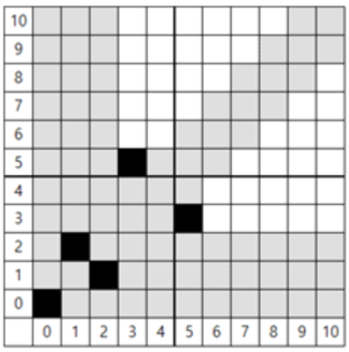
위 도표에서 A가 먼저 Y에서 6개, B가 X, Y 양쪽에서 8개를 꺼내고, 다시 A가 Y에서 1개, B가 Y에서 4개를 꺼내고, 마지막으로 A가 X에서 1개, B가 양쪽에서 1개씩을 꺼내면 두 바구니 모두에 남은 공이 없어 B가 승자가 된다.

이제 <게임1>의 필승전략을 구해 보자. 만일 플레이어 A가 적절한 순서쌍을 만들어서 플레이어 B의 플레이에 관계없이 다음 차례에 $(0, 0)$을 만들 수 있다

31) 숙명여자대학교 홈페이지

면 A 가 승자가 될 것이다. A 가 만든 이러한 순서쌍을 ‘필승전략’이라고 하자. $c=0$ 인 경우에 $(1, 2)$ 는 필승전략이다. 왜냐하면 상대가 바구니 X에서 공을 꺼내어 X가 0 이 되는 경우에는 다음 플레이어는 바구니 Y의 공을 모두 꺼낼 수 있으므로 $(0,0)$ 을 만들 수 있다. 또 상대가 X에서 공을 꺼내지 않는 경우에는 Y에서 한 개 이상의 공을 꺼내야 하므로 남는 공에 대한 순서쌍은 $(1, y)$ (단, y는 0 또는 1)이다. 다음 플레이어는 X와 Y에 남은 공을 모두 꺼낼 수 있으므로 $(0, 0)$ 을 만들 수 있다. 따라서 순서쌍 $(1, 2)$ 를 만든 플레이어는 승자가 된다. 같은 방법으로 생각하면 순서쌍 $(2, 1)$ 도 필승전략이다.

다음은 <게임2 >에 대한 설명이다. <게임2 >는 아래 그림과 같은 체스판에서 두 사람이 번갈아서 퀸(Queen)을 움직여 최종적으로 $(0, 0)$ 의 위치에 퀸을 놓는 플레이어가 이기는 게임이다. 이 게임에서는 퀸을 왼쪽(←), 아래(↓), 또는 대각선으로 왼쪽 아래(↙)로만 움직일 수 있다. 이 게임이 $c=0$ 인 경우의 <게임1 >과 본질적으로 같음을 다음과 같이 설명할 수 있다. 체스판 위의 위치 (x, y) 를 바구니 X에 공이 x 개, 바구니 Y에 공이 y 개 들어있는 상황으로 대응시킨다. 그리고 퀸을 왼쪽으로 a 칸 움직이는 것($(x, y) \to (x-a, y)$)은 바구니 X에서 a 개의 공을 꺼내는 것으로, 퀸을 아래로 b 칸 움직이는 것($(x, y) \to (x, y-b)$)은 바구니 Y에서 b 개의 공을 꺼내는 것으로, 그리고 퀸을 대각선으로 왼쪽 아래로 k 칸 움직이는 것($(x, y) \to (x-k, y-k)$)은 두 바구니 모두에서 k 개의 공을 꺼내는 것으로 대응시킨다. 그러면 결국 <게임2 >는 $c=0$ 인 경우의 <게임1 >과 같아진다. 따라서 <게임2 >에서는 $c=0$ 인 경우의 <게임1 >에서처럼, 위치 $(1, 2)$ 혹은 $(2, 1)$ 에 먼저 퀸을 놓는 플레이어가 승자가 된다. 다음의 필승전략이 되는 위치를 구하기 위해서는 위치 $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ 에서 오른쪽(→), 위(↑), 대각선으로 오른쪽 위(↗)에 있는 모든 위치들을 제외하고 위치 $(0, 0)$ 에서 가장 가까운 곳을 찾으면 된다. 이는 $(3, 5)$ 와 $(5, 3)$ 임을 알 수 있다.



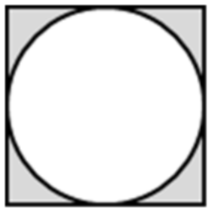
<그림1>

<나> 생산자는 어떤 제품을 만들 때, 생산원가를 가능하면 낮추기를 원한다. 탄산음료를 담는 원기둥 모양의 알루미늄 깡통을 제작한다고 가정하자. 깡통을 만드는 데 사용되는 알루미늄의 비용은 그 깡통의 겉넓이에 비례한다. 여기서, 사용되는 알루미늄의 두께는 모두 일정하다고 가정하여 무시하기로 한다. 즉, 일정한 부피 V를 갖는 원기둥 모양의 깡통을 만드는 데 들어가는 비용을 최소화하기 위해서는 원기둥의 겉넓이 A (두 밑면과 옆면의 넓이의 합)를 최소화해야 한다. 원기둥의 높이를 h, 밑면인 원의 반지름을 r 이라하면

$$V = \pi r^2 h\ ,\ A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

이다. $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ 이므로 겉넓이 A는 변수 r의 함수가 되고, 미분을 이용하면 겉넓이 A를 최소화하기 위한 조건이 $h=2r$임을 보일 수 있다. 즉, 원기둥의 높이가 밑면의 지름과 같을 때 비용이 최소로 든다.

그런데 실제로 원기둥 모양의 탄산음료수 깡통을 보면 일반적으로 깡통의 높이가 뚜껑의 지름보다 크다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 차이가 생기는 이유는 위의 계산과정에서는 깡통의 제작공정에서 버려지는 재료를 무시하고 깡통에 사용되는 재료만을 고려하여 식을 세웠기 때문이다. 예를 들어, 원기둥 모양의 깡통의 밑면을 정사각형 모양의 알루미늄 판으로부터 만든다고 하면 <그림2 >에서의 어두운 부분은 원판을 만들고 버려지므로 최소화해야 할 재료의 넓이 B는 원의 넓이가 아니라 정사각형의 넓이를 이용하여


<그림2>

$$B = 2(2r)^2 + 2\pi rh$$

가 된다. 이때 B가 최소화되는 반지름 r과 높이 h의 관계식은 $h = \dfrac{8}{\pi}r$이다.

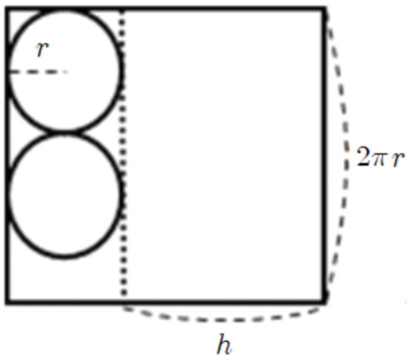
2-1. <가>를 읽고 다음의 질문에 답하시오.

2-1(a). 0 이상의 정수 c에 대한 <게임1 >에서 순서쌍 $(1, c+2)$가 필승전략임을 보이시오.

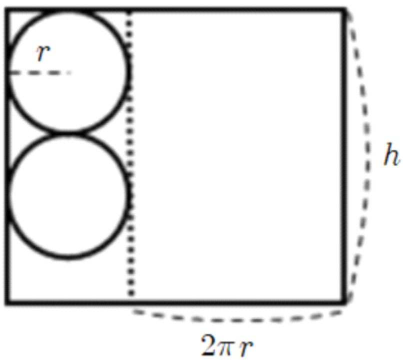
2-1(b). <게임2 >에서 <그림1 >처럼 가로와 세로가 모두 0부터 10까지 있는 체스판 위에서 $(0, 0)$을 제외하고 무작위로 선택한 위치가 필승전략이 될 확률을 구하시오.

2-2. 직사각형 모양의 알루미늄 판을 세로로 잘라 한 조각은 깡통의 옆면으로 사용하고, 다른 한 조각은 다시 두 원 모양으로 잘라 깡통의 두 밑면으로 사용하여 부피가 1 인 깡통을 만들려고 한다. 다음의 질문에 답하시오.

2-2(a). 다음 그림과 같이 알루미늄 판의 가로부분을 깡통의 높이로 사용하는 경우 판의 넓이가 최소가 되는 밑면의 반지름 r 을 구하시오.



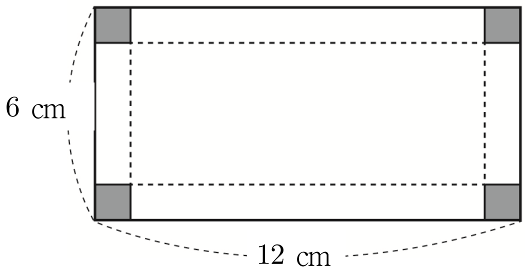
2-2(b). 다음 그림과 같이 알루미늄 판의 세로부분을 깡통의 높이로 사용하는 경우 판의 넓이가 최소가 되는 밑면의 반지름 r 을 구하시오.



2-2(c). 2-2(a)와 2-2(b)에서 밑면의 반지름을 구한 두 방법을 비교할 때, 어떤 방법이 더 적은 비용으로 깡통을 제작할 수 있는지를 설명하시오.

• 풀어보기

문제1. [그림 1]과 같이 가로의 길이가 12 cm, 세로의 길이가 6 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형 모양의 종이를 잘라 낸 후 남는 부분을 접어서 [그림 2]와 같이 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값을 M cm^{3}이라 할 때, $\frac{\sqrt{3}}{3}M$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 무시한다.) (2011. 전국연합)



[그림 1]

[그림 2]

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 24

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하고 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(6-2x)(12-2x)$ (단, $0<x<3$)

$V'(x)=12(x^2-6x+6)=0$이므로

$x=3-\sqrt{3}$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $M=24\sqrt{3}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}M=24$

[계열문항]

2-1(a).

플레이어 A가 순서쌍 $(1, c+2)$를 만들었다고 가정하고, 플레이어 A가 승자가 됨을 보이자.

$c=0$인 경우는 제시문에서 증명되었다.

$c\geq 1$인 경우,

(1) 플레이어 B가 바구니 X에서 공을 꺼내어 X가 0이 되는 경우

플레이어 A는 바구니 Y의 공을 모두 꺼낼 수 있으므로 승리.

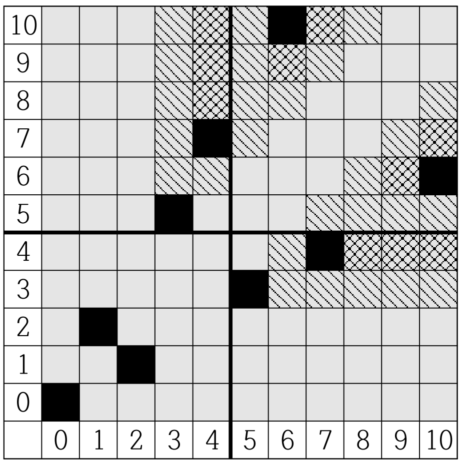
(2) 플레이어 B가 바구니 Y에서 1개 이상의 공을 꺼내는 경우

남는 공에 대한 순서쌍은 $(1, y)$ $(0\leq y\leq c+1)$이 되고 $y-1\leq c$이 되므로 플레이어 A는 X와 Y에 남은 공을 모두 꺼낼 수 있다. 따라서 승리.

2-1(b).

제시문에서 주어진 방법을 사용하여 체스판 위의 필승전략을 모두 구하면

$(1,2)$, $(2,1)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(4,7)$, $(7,4)$, $(6,10)$, $(10,6)$의 8가지이다.



체스판위의 칸의 전체개수는 $(0,0)$을 제외하고 120개이므로, 필승전략이 될 확률은

$\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$이다.

2-2(a).

직사각형 모양의 알루미늄 판의 넓이를 $A(r)$ 이라 하면, $A(r)=2\pi r(2r+h)$

깡통의 부피가 1 이므로 $\pi r^2 h=1$ 이다.

따라서 $A(r)=2\pi r(2r+h)=4\pi r^2+2\pi r\left(\frac{1}{\pi r^2}\right)=4\pi r^2+\frac{2}{r}\ (r>0)$

$A(r)$ 을 r 에 대하여 미분하면

$$A'(r)=8\pi r-\frac{2}{r^2}=\frac{8\pi r^3-2}{r^2}$$

$A'(r)=0$ 에서 $r=\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ 이다.

함수 $A(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$	$\cdots$
$A'(r)$		$-$	0	$+$
$A(r)$		$\searrow$	$3\sqrt[3]{4\pi}$	$\nearrow$

따라서 함수 $A(r)$ 은 $r=\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ 에서 최솟값을 가진다.(최솟값 $3\sqrt[3]{4\pi}$ ⋯①)

2-2(b).

직사각형 모양의 알루미늄 판의 넓이를 $B(r)$ 이라 하면, $B(r)=h(2r+2\pi r)$

깡통의 부피가 1 이므로 $\pi r^2 h=1$ 이다.

주어진 조건에 의하여 $h\geq 4r$ 이고 $h=\frac{1}{\pi r^2}$ 이므로, 대입하여 정리하면 $r\leq\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$

따라서

$$B(r)=h(2r+2\pi r)=\frac{1}{\pi r^2}(2r+2\pi r)=\frac{1}{r}\left(\frac{2}{\pi}+2\right)\left(0<r\leq\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right)$$

이다.

주어진 구간에서 $B(r)$ 은 감소함수이므로, $r=\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ 에서 최솟값을 가진다.(최솟값 $\sqrt[3]{4\pi}\left(\frac{2}{\pi}+2\right)$ ⋯②)

2-3(c).

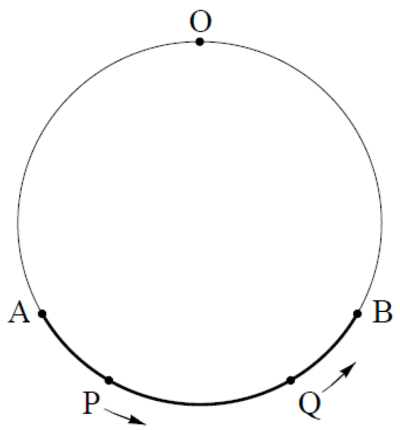
①, ②의 결과를 비교하면, $3\sqrt[3]{4\pi}\geq\sqrt[3]{4\pi}\left(\frac{2}{\pi}+2\right)$ 이므로, 2-2(b)의 방법이 더 적은 비용으로 깡통을 제작할 수 있다.

32 숙명여자대학교 수시[32)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	3개 영역 등급 합 6 (탐구 1과목)	[통합논술형] 공통문항(사회, 도덕) 1문항, 계열문항(수학) 1문항(5문제)	120분

[문항 1] 제시문 (가)~(나)을 읽고 문제에 답하시오.

<가> 둘레의 길이가 1인 원 위의 <그림 1>과 같이 세 점 O, A, B를 원의 둘레의 길이가 3등분이 되도록 정한다. 두 점 P, Q가 점 O를 출발하여 원의 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 일정한 속력으로 계속 움직인다고 하자. 이때, 두 점 P, Q가 모두 호 AB 위에 동시에 있을 수 있을까? (단, 여기서 호 AB는 점 O를 포함하지 않는 호를 의미한다.)



〈그림 1〉

점 P의 속력을 1, 점 Q의 속력을 v라 하자. (단, $v \geq 1$) 이때, 두 점이 호 AB 위에 동시에 있을 수 있다는 사실을 다음과 같이 여러 경우로 나누어 증명할 수 있다.

(ⅰ) $1 \leq v \leq 2$인 경우: 점 P가 점 A에 처음 도착할 때의 시각이 $\frac{1}{3}$이므로 이때, 점 Q는 점 O로부터 움직인 거리가 $\frac{v}{3}$인 점이다. 그런데, $\frac{1}{3} \leq \frac{v}{3} \leq \frac{2}{3}$이므로 점 Q가 호 AB 위에 있게 된다.

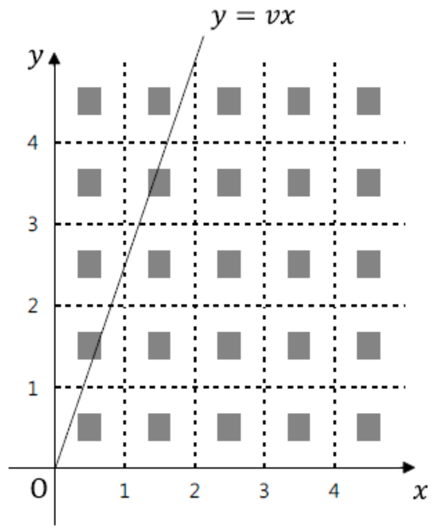
(ⅱ) $2 \leq v \leq \frac{5}{2}$인 경우: 점 P가 점 B에 처음 도착할 때의 시각이 $\frac{2}{3}$이므로 이때, 점 Q는 점 O로부터 움직인 거리가 $\frac{2v}{3}$인 점이다. 그런데 $\frac{4}{3} \leq \frac{2v}{3} \leq \frac{5}{3}$이므로 점 Q는 원의 둘레를 한 바퀴 회전한 후 점 O로부터 움직인 거리가 $\frac{1}{3}$ 이상 $\frac{2}{3}$ 이하가 되어 호 AB 위에 있게 된다.

(ⅲ) $v > \frac{5}{2}$의 경우에도 위와 유사한 방법으로 두 점 P, Q가 호 AB 위에 동시에 있

32) 숙명여자대학교 홈페이지

을 수 있다는 사실을 확인할 수 있다.

이제 위의 사실을 좌표평면에서 설명하여 보자. 점 P의 속력이 1이므로 시각 t일 때, 점 P가 움직인 거리는 t가 된다. 이때, 점 Q가 움직인 거리는 점 Q의 속력이 v이므로 vt가 된다. 따라서 시각이 t일 때 점 P와 점 Q가 움직인 거리를 순서쌍 (t, vt)로 좌표평면에 나타내면 직선 $y=vx$ 위의 한 점이 된다.



<그림 2>

한편, 음이 아닌 정수 m, n에 대하여 연립부등식

$$\begin{cases} m+\dfrac{1}{3} \le x \le m+\dfrac{2}{3} \\ n+\dfrac{1}{3} \le y \le n+\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

의 영역이 있다고 하자. 그러면 점 P와 점 Q가 움직인 거리의 순서쌍이 이 영역에 속한다는 것은 점 P가 <그림 1>의 원의 둘레를 m바퀴 회전한 후에 호 AB 위에 있고 점 Q는 <그림 1>의 원의 둘레를 n바퀴 회전한 후에 호 AB 위에 있다는 뜻이다. 따라서 두 점 P, Q가 호 AB 위에 동시에 있을 수 있음을 보이기 위해서는 직선 $y=vx$가 <그림 2>에서 색칠한 부분의 영역과 만나는지를 확인하면 된다.

<나> $x>0$인 구간에서 정의된 함수 중에서

$$f(xy) \le f(x)+f(y) \quad \cdots \text{①}$$

$$f(x) \le x-1 \quad \cdots \text{②}$$

을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구해보자. 먼저 ①에 의하여 $f(1) \le 2f(1)$이므로 $f(1) \ge 0$이고, ②에 의하여 $f(1) \le 0$이므로 $f(1)=0$이다. 이제 $x>0$이라고 하자. 그러면 $x+h>0$인 실수 h에 대하여 부등식 ①과 ②에 의해

$$f(x+h) \le f(x)+f\left(\frac{x+h}{x}\right) \le f(x)+\frac{x+h}{x}-1=f(x)+\frac{h}{x} \cdots \text{③}$$

가 성립한다. 또한

$$f(x)=f\left((x+h)\cdot\frac{x}{x+h}\right) \le f(x+h)+f\left(\frac{x}{x+h}\right) \le f(x+h)-\frac{h}{x+h} \cdots \text{④}$$

이다. 따라서 ③과 ④]에 의하여 $h>0$이면

$$\frac{1}{x+h} \le \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \frac{1}{x} \cdots \text{⑤}$$

이고, $h<0$이면

$$\frac{1}{x+h} \ge \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge \frac{1}{x} \cdots \text{⑥}$$

이다. 부등식 ⑤, ⑥과 함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x},\ \lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}$$

이다. 즉,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}$$

이다. 그러므로 $f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$이고, $f(1)=0$이므로 $C=0$이다. 따라서 $f(x)=\ln x$이다. 한편 $f(x)=\ln x$는 부등식 ①과 ②를 만족시킨다.

논제 1. <가>에서 점 Q의 속력 v가 $7\le v\le 8$일 때, 두 점 P, Q가 호 AB 위에 동시에 있을 수 있음을 보이시오. 또한 점 Q의 속력 v가 9일 때, 두 점 P, Q가 호 AB 위에 동시에 있게 되는 최초의 시각을 구하시오.

논제 2. <가>에서 점 Q가 원의 둘레를 두 바퀴 회전하기 전에 두 점 P, Q가 호 AB 위에 동시에 있을 수 있게 하는 속력 v의 범위를 <그림 2>를 이용하여 구하시오. (단, $v\ge 1$)

논제 3. 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 중에서

$$f(x+y)\ge f(x)+f(y)+4xy$$
$$f(x)\ge 0$$

을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대한 다음의 질문에 답하시오.

3-(a). $f(0)$을 구하시오.

3-(b) $f(x)$를 <나>의 방법을 이용하여 구하시오.

• 풀어보기

문제1. 최고차항의 계수가 1 인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? (2014년 9월 모평)

(가) $f(0) = -3$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $6x - 6 \le f(x) \le 2x^3 - 2$ 이다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ①

$y=6x-6$ 과 $y=2x^3-2$ 는 모두 $(1, 0)$을 지나고 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기가 6이다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \leq f(x) \leq 2x^3-2$ 이므로

$y=f(x)$는 $x=1$에서 $y=6x-6$과 접해야 한다

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-(6x-6)=(x-1)^2 \cdot Q(x)$이다.

$x\to\infty$ 일 때, $f(x) \leq 2x^3-2$이므로 $f(x)$는 3차 이하이다.

(ㄱ) $f(x)$가 1차인 경우

$y=6x-6$와 접하면서 $f(0)=-3$인 함수는 없다.

(ㄴ) $f(x)$가 2차인 경우

$f(x)=(x-1)^2+(6x-6)$

$f(0)=1-6=-5\neq-3$이므로 조건(가)를 만족하지 않는다.

(ㄷ) $f(x)$가 3차인 경우

$f(x)=(x-1)^2(x+a)+(6x-6)$

$f(0)=a-6=-3$에서 $a=3$

$f(x)=(x-1)^2(x+3)+(6x-6)$

$\therefore f(3)=4\times6+6\times3-6=36$

[문항1] 대학발표 예시답안

논제 1.

점 P가 점 A에 처음 도착할 때의 시각이 $\frac{1}{3}$이므로 이때 점 Q는 점 O로부터 움직인 거리가 $\frac{v}{3}$인 점이다. 그런데 $\frac{7}{3}\leq\frac{v}{3}\leq\frac{8}{3}$이므로 점 Q는 원의 둘레를 두 바퀴 회전한 후 점 O로부터 움직인 거리가 $\frac{1}{3}$이상 $\frac{2}{3}$이하가 되어 호 AB 위에 있게 된다.

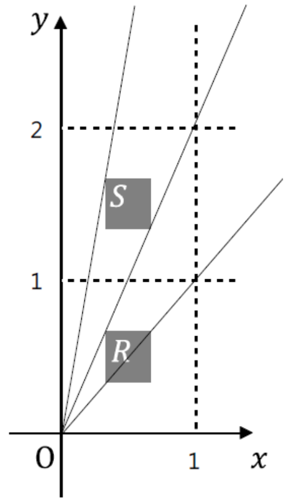
이제 점 Q의 속력 v를 9라 하자. 점 P가 점 A에 처음 도착할 때의 시각이 $\frac{1}{3}$이므로 이때 점 Q가 점 O로부터 움직인 거리는 $9\times\frac{1}{3}=3$이다. 따라서 점 Q가 세 바퀴를 회전한 후에 점 A에 처음 도착하는 시각을 구하면 된다. 방정식 $9t=3+\frac{1}{3}$을 만족시키는 t를 구하면 $t=\frac{10}{27}$이다. 한편 $\frac{1}{3}<\frac{10}{27}<\frac{2}{3}$이므로 $t=\frac{10}{27}$일 때 점 P도 호 AB 위에 있다. 따라서 답은 $\frac{10}{27}$이다.

논제 2.

점 Q가 원의 둘레를 두 바퀴 회전하기 전에 두 점 P, Q가 호 AB 위에 동시에 있기 위해서는 <그림 3>과 같이 직선 $y=vx$가 연립부등식

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \le y \le \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ 1+\frac{1}{3} \le y \le 1+\frac{2}{3} \end{cases}$$

의 영역과 만나야한다.



<그림 3>

첫 번째 연립부등식의 영역을 R, 두 번째 연립부등식의 영역을 S라 하자. <그림 3>에서 직선 $y=vx$가 R와 만나기 위한 v의 최댓값은 직선이 점 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$를 지날 때임을 알 수 있다. 따라서 $1 \le v \le 2$일 때 직선 $y=vx$가 R와 만난다. 또한, 직선 $y=vx$가 S와 만나기 위한 v의 최댓값은 직선이 점 $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$를 지날 때이고, 최솟값은 직선이 점 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$를 지날 때이다. 따라서 $2 \le v \le 5$일 때, 직선 $y=vx$가 S와 만난다. 따라서 구하고자 하는 속력 v의 범위는 $1 \le v \le 5$이다.

논제 3-(a).

첫 번째 부등식에 의하여 $f(0) \ge 2f(0)$이므로 $f(0) \le 0$이고, 두 번째 부등식에 의하여 $f(0) \ge 0$이므로 $f(0)=0$이다.

논제 3-(b).

정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 중에서

$f(x+y) \ge f(x)+f(y)+4xy \ \cdots$ ①

$f(x) \ge 0 \ \cdots$ ②

을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구해보자. 실수 h에 대하여 부등식 ①과 ②에 의해

$f(x+h)-f(x) \ge f(x)+f(h)+4xh-f(x)=f(h)+4xh \ge 4xh \ \cdots$ ③

가 성립한다. 또한

$f(x)=f(x+h-h) \ge f(x+h)+f(-h)-4h(x+h) \ge f(x+h)-4h(x+h) \ \cdots$ ④

이다. 따라서 ③과 ④에 의하여 $h>0$이면

$$4x \le \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le 4(x+h) \ \cdots \ ⑤$$

이고, $h<0$이면

$$4x \ge \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 4(x+h) \ \cdots \ ⑥$$

이다. 부등식 ⑤, ⑥과 함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x,\ \lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x$$

이다. 즉,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x$$

이다. 그러므로 $f(x)=\int 4x dx = 2x^2+C$이고, $f(0)=0$ 이므로 $C=0$ 이다. 따라서 $f(x)=2x^2$ 이다. 한편 $f(x)=2x^2$ 은 부등식 ①과 ②를 만족시킨다.

33 숭실대학교 모의[33)]

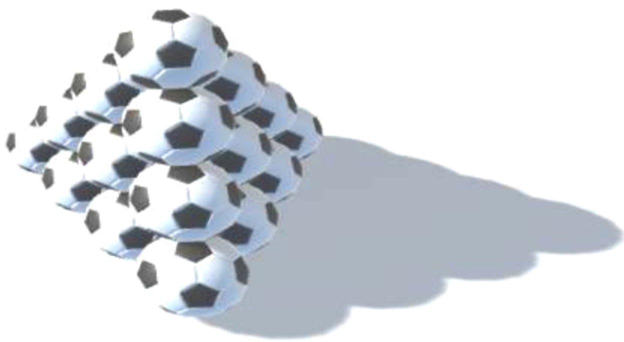
출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학 가형, 과탐(2과목) 2개 영역 등급 합 7등급 이내	수학(1문항, 2문제) 과학(1문항, 3문제)	120분

[문제 1] 아래 논제에 답하시오. (50점)

(1) 변수 $t>1$ 에 대해 $x=1$, $x=t$, $y=0$, $y=2x$ 로 둘러싸인 평면도형의 넓이를 $f(t)$ 라 하고, $x=1$, $x=t$, $y=0$, $y=\dfrac{1}{x}$ 로 둘러싸인 평면도형의 넓이를 $g(t)$ 라 하자. $h(t)$ 를 아래와 같이 정의할 때, $h(t)$ 의 최댓값과 이때의 t 값을 구하시오.

$$h(t)=\frac{g(t)}{f(t)+1}$$

(2) 공을 [그림1]처럼 쌓아 n 개의 층으로 이루어진 정사면체를 만들었다. 맨 아래층의 공의 개수와 전체 공의 개수를 n 으로 표현하시오.



[그림4] $n=4$ 인 경우

33) 숭실대학교 홈페이지

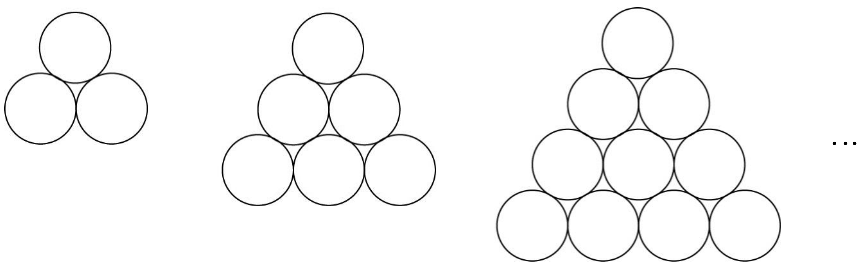
• 풀어보기

문제1. 곡선 $y=\tan\dfrac{x}{2}$ 와 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (2017. 사관학교)

① $\dfrac{1}{4}\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}\ln 2$ ③ $\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $4\ln 2$

문제2. 다음 [단계]에 따라 반지름의 길이가 같은 원들을 외접하도록 그린다.

[단계 1] 3개의 원을 외접하게 그려서 <그림 1>을 얻는다. [단계 2] <그림 1>의 아래에 3개의 원을 외접하게 그려서 <그림 2>를 얻는다. [단계 3] <그림 2>의 아래에 4개의 원을 외접하게 그려서 <그림 3>을 얻는다. ⋮ [단계 m] <그림 $m-1$>의 아래에 $(m+1)$개의 원을 외접하게 그려서 <그림 m>을 얻는다. $(m\geq 2)$



<그림 1> <그림 2> <그림 3> …

<그림 n>에 그려진 원의 모든 접점의 개수를 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. 예를 들어, $a_1=3$, $a_2=9$이다. a_{10}의 값을 구하시오. (2015. 전국연합)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx = -2\left[\ln\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2$$

풀어보기(문제2) 정답 165

$a_1 = 3 = 3\cdot 1,\ a_2 = 9 = 3+6 = 3(1+2),\ a_3 = 3(1+2+3),\ \cdots$

이므로, $a_{10} = 3(1+2+\cdots+10) = 3\cdot\dfrac{10(1+10)}{2} = 165$

따라서 $a_{10} = 165$

[문제1]

(1).

주어진 조건에 의하여 $f(t) = \int_1^t 2x\,dx = t^2 - 1,\ g(t) = \int_1^t \frac{1}{x}dx = \ln t$

따라서 $h(t) = \dfrac{g(t)}{f(t)+1} = \dfrac{\ln t}{t^2}\ (t > 1)$

$h(t)$ 를 t 에 대하여 미분하면

$h'(t) = \dfrac{1-2\ln t}{t^3}$

$h'(t) = 0$ 에서 $t = \sqrt{e}$

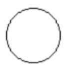
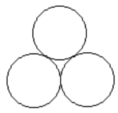
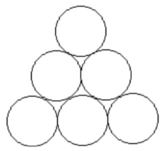
함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(1)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$A'(r)$		$+$	0	$-$
$A(r)$		↗	$\frac{1}{2e}$	↘

따라서 함수 $h(t)$ 는 $t = \sqrt{e}$ 에서 최댓값 $\dfrac{1}{2e}$ 를 가진다.

(2).

n 개의 층으로 이루어진 정사면체의 맨 아래층의 공의 개수를 a_n, 전체 공의 개수를 S_n 이라 하자.

n	1	2	3	$\cdots$	n
맨 아래층				$\cdots$	
a_n	1	$3=1+2$	$6=1+2+3$	$\cdots$	$1+2+3+\cdots+n$

따라서 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

전체 공의 개수 S_n 은 위에서부터 1단, 2단, $\cdots$, n단의 공의 개수의 합과 같으므로,

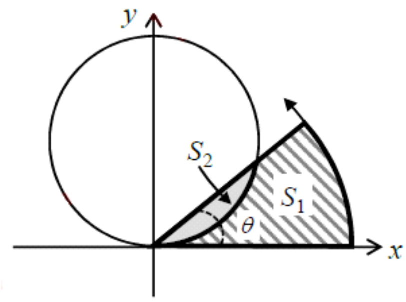
$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 이다.

34 숭실대학교 수시[34)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
수학의 기본개념을 이해하고 이를 수리적 의사결정에 활용하는 문제. 과학지식의 이해 및 과학적 사고능력을 평가하는 문제	2개 영역 합 7등급 이내	수학 1문항 (2문제), 과학 1문항 (4문제)	120분

[문제 1] 다음 논제에 답하시오. (50점)

(1) <그림1>과 같이 중심이 $(0, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원과 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 부채꼴을 겹쳐 놓았다. 부채꼴의 한 변이 x축 위에 있고 중심각의 크기가 θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right)$일 때, 부채꼴에서 원과 겹치지 않는 영역의 넓이를 $S_1(\theta)$, 부채꼴과 원이 겹치는 영역의 넓이를 $s_2(\theta)$라 하자. $S_1(\theta)-S_2(\theta)$가 최대가 될 때의 θ에 대해 $\cos 2\theta$의 값을 구하시오.



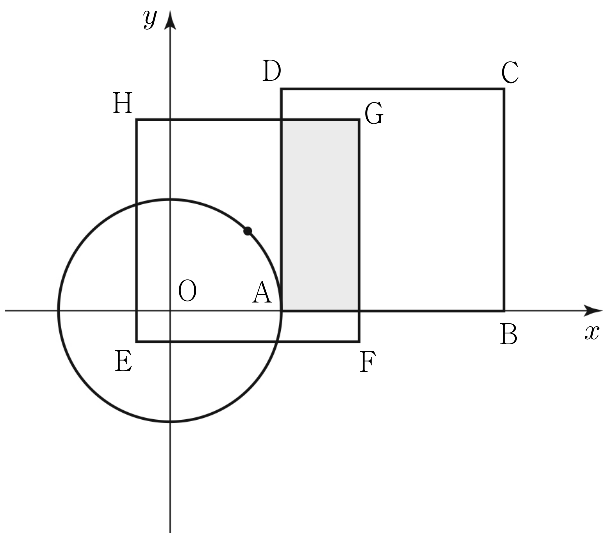
<그림 1>

(2) 공격에 성공하는 승자가 나올 때까지 두 사람이 번갈아 가며 공격하는 게임이 있다. 이 게임에서 한 번의 공격이 성공할 확률은 $\frac{1}{3}$, 실패할 확률은 $\frac{2}{3}$이다. A와 B가 이 게임을 두 번 시행하면서 첫 번째 게임은 A의 공격으로 시작하고, 두 번째 게임은 첫 번째 게임에서 진 사람의 공격으로 시작하기로 하였다. A가 승자가 되는 횟수의 기댓값을 구하시오.

34) 숭실대학교 홈페이지

• 풀어보기

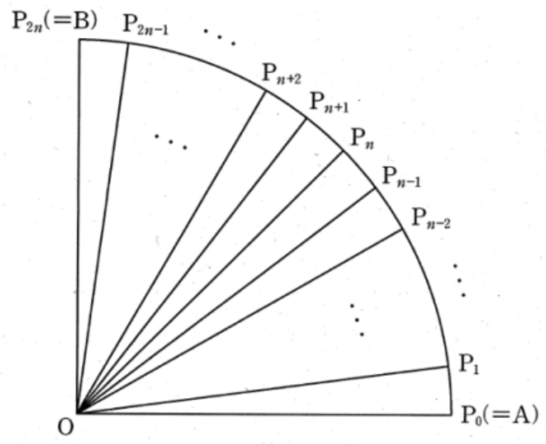
문제1. 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 A(1, 0), B(3, 0), C(3, 2), D(1, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 한 변의 길이가 2인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있을 때, 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 수직이다.) (2014년 전국연합)



① $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

④ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

문제2. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A)$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $P_{2n}(=B)$라 하자.



$n=3$일 때, 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 중에서 임의로 선택한 한 개의 점을 P라 하자. 부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차를 확률변수 X라 할 때, $E(X)$의 값은?

(2014 대수능)

① $\frac{\pi}{11}$ ② $\frac{\pi}{10}$ ③ $\frac{\pi}{9}$ ④ $\frac{\pi}{8}$ ⑤ $\frac{\pi}{7}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점을 P라 하자. 동경 OP가 나타내는 각을 θ라 하면 공통부분이 생기는 θ의 범위는 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이다. 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$, 점 $\mathrm{G}(\cos\theta+1, \sin\theta+1)$이므로 공통부분의 넓이 $S(\theta)=\cos\theta(\sin\theta+1)$이다. 따라서

$$S'(\theta)=\cos2\theta-\sin\theta=-(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$$

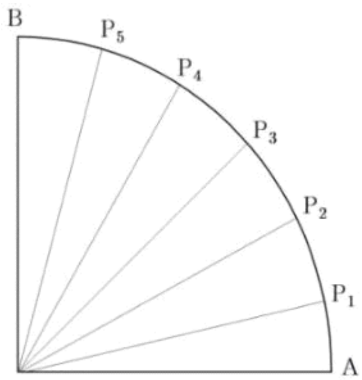
$\sin\theta=-1$ 또는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}\left(\because\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

$S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{6}$에서 극대이고 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

풀어보기(문제2) 정답 ②



부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차가 확률변수 X이므로

P_3를 선택할 때 넓이의 차는 0

P_1또는 P_5를 선택할 때 넓이의 차는 $\frac{\pi}{6}$

P_2또는 P_4를 선택할 때 넓이의 차는 $\frac{\pi}{12}$

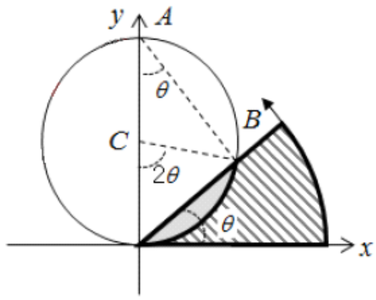
확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+\frac{\pi}{12}\times\frac{2}{5}+\frac{\pi}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{\pi}{10}$ 이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

(1)



원과 y축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A, 원과 부채꼴의 외곽선이 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 B, 원의 중심을 C라고 하자. 이때, 원과 직선의 성질에 의해 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$가 되고, 따라서 $\angle\mathrm{BCO}=2\theta$가 된다.

모든 각이 호도법으로 표기된다면, 주어진 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\theta$이다. 또한 부채꼴 BCO의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2^2\times 2\theta=4\theta$이다. S_2는 부채꼴 BCO의 넓이에서 삼각형 BCO의 넓이를 뺀 값이므로

$$S_2(\theta)=4\theta-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin 2\theta=4\theta-2\sin 2\theta$$

이다. 따라서

$$S_1(\theta)=6\theta-S_2(\theta)=2\theta+2\sin 2\theta$$

이고

$$T(\theta)=S_1(\theta)-S_2(\theta)=4\sin 2\theta-2\theta$$

이다. 이 함수의 도함수는

$$\frac{dT}{d\theta}=8\cos 2\theta-2$$

이다. 이 도함수는 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$에서 감소함수이고, $\theta=0$에서 6, $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 -6이므로, $T(\theta)=S_1-S_2$는 $\cos 2\theta=\frac{1}{4}$인 θ를 기준으로 증가에서 감소로 바뀌므로, 이 값에서 최대가 된다.

(2) 처음 공격한 사람이 승리할 확률은

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{3}+\cdots=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}$$

이고, 나중에 공격한 사람이 승리할 확률은

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{3}+\cdots=\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}=\frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}$$

이다. 두 번의 게임에서 A가 승자가 되는 횟수의 경우는 다음과 같다.

첫 번째 게임 \ 두 번째 게임	A가 승리	B가 승리
A가 승리	2	1
B가 승리	1	0

첫 번째 게임에서 A가 승리하는 사건을 A_1, 첫 번째 게임에서 B가 승리하는 사건을 B_1, 두 번째 게임에서 A가 승리하는 사건을 A_2, 두 번째 게임에서 B가 승리하는 사건을 B_2라고 하면, 위 표의 각 경우의 확률은

1) $\mathrm{P}(A_1\cap A_2)=\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2|A_1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

2) $\mathrm{P}(B_1\cap A_2)=\mathrm{P}(B_1)\cdot\mathrm{P}(A_2|B_1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$

3) $\mathrm{P}(A_1\cap B_2)=\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B_2|A_1)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

4) $\mathrm{P}(B_1\cap B_2)=\mathrm{P}(B_1)\cdot\mathrm{P}(B_2|B_1)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

이다. 따라서 확률변수 X를 플레이어 A가 승자가 되는 횟수라고 할 때, 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{6}{25}$

이때 기댓값은 다음과 같다.

$$2\times\frac{6}{25}+1\times\frac{15}{25}+0\times\frac{4}{25}=\frac{27}{25}$$

35 아주대학교(자연계) 모의[35)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생인 경우 해결할 수 있는 수준의 다양한 수학적 주제를 다룸.	없음 (의학과 제외)	수학(2문항, 문항별 세부문제 3문제 내외 출제)	120분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

완전제곱을 이용하여 최솟값을 찾는 다음의 두 가지를 생각해보자.

(가) 공간상의 두 점 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$과 임의의 실수 k, l으로 다음과 같이 점 $\mathrm{P}(u,v,w)$들을 생각한다.

$$(u,v,w)=k(1,0,0)+l(0,1,0) \qquad (1)$$

이때 임의의 점 $\mathrm{Q}(x,y,z)$와 $\mathrm{P}(u,v,w)$사이의 거리는 $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}$ 이며 $(x-k)^2+(y-l)^2+(z-w)^2$이 최소가 되도록 k, l을 선택할 때 그 거리는 가장 작은 값을 가지게 된다.

(나) 닫힌구간 $[-2,2]$에 정의된 함수 $f(x)$를 네 개의 작은 구간 $[-2,-1)$, $[-1,0)$, $[0,1)$, $[1,2]$ 위에서 적분한 값들을 각각 p,q,r,s라고 하자. 이 때 다음의 A를 최소로 만드는 실수 a,b를 구할 수 있다.

$$A=(p-(-a-b))^2+(q-(a-b))^2+(r-(a+b))^2+(s-(-a+b))^2$$

[문제1-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 공간상의 두 점 $\mathrm{A}(1,-2,3)$, $\mathrm{B}(1,-1,-1)$을 생각하자. 점 $\mathrm{Q}(2,1,2)$와 벡터 $(u,v,w)=k(1,-2,3)+l(1,-1,-1)$을 이용하여 만든 점 $\mathrm{P}(u,v,w)$사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k, l을 찾고 그 논거를 제시하시오.

35) 아주대학교 홈페이지

(2) (10점) 공간상의 두 점 A$(1,\ -2,\ 3)$, B$(1,\ -1,\ -1)$을 생각하자. 임의의 점 Q$(x,\ y,\ z)$가 주어진 경우, 이 점과 벡터 $(u,\ v,\ w) = k(1,\ -2,\ 3) + l(1,\ -1,\ -1)$을 이용하여 만든 점 P$(u,\ v,\ w)$사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k, l을 찾고 그 논거를 제시하시오.

[문제1-2] 제시문 (나)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에 정의된 임의의 함수 $f(x)$에 대하여 A값이 최소가 되는 실수 a, b를 p, q, r, s를 이용하여 표현하고 그 논거를 제시하시오.

(2) (10점) (1)에서 구한 a, b가 각각 $\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx$, $\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)h(x)dx$로 표현되도록 하는 함수 $g(x), h(x)$를 찾고 $\int_{-2}^{2}(g(x))^2dx$, $\int_{-2}^{2}(h(x))^2dx$, $\int_{-2}^{2}g(x)h(x)dx$의 적분값들을 구하시오.

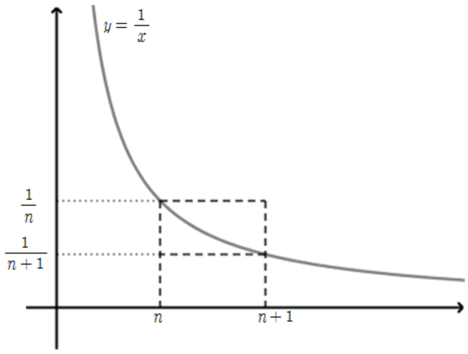
(3) (10점) $0 \le p \le 1$를 만족하는 p에 대하여 함수 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$를 생각하자. 이 함수의 A값이 최소가 되는 a, b를 $p\ (0 \le p \le 1)$에 관한 함수로 표현하시오.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 합 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 에 대하여 극한 $\lim_{n \to \infty} H_n = \infty$ 을 증명하는 방법은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots\right) + \cdots$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots\right) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

(나) 다음과 같은 그림을 참고하면 다양한 부등식을 구할 수 있다.



(다) 수학적 귀납법을 이용하면 부등식 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+j} > \frac{2j+2}{j+2k}$ 이 성립함을 알 수 있다. 단, k와 j는 자연수이다.

[문제2-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (4점) 모든 자연수 k에 대하여, $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ 임을 보이시오.

(2) (6점) 모든 자연수 k, m에 대하여, $H_{m^k} \geq 1 + k\left(\frac{m-1}{m}\right)$ 임을 보이시오.

[문제2-2] 제시문 (나)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 모든 자연수 n에 대하여, 부등식 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n < \ln 2$ 임을 보이시오.

(2) (10점) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} < H_n$ 임을 보이시오.
(힌트: 그림에서 사다리꼴을 생각한다.)

[문제2-3] 제시문 (다)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 합 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+j}$ 가 1보다 크거나 같도록 하는 자연수 j를 자연수 k를 이용하여 나타내시오.

(2) (10점) (1)을 이용하여 자연수 n에 대하여, $H_{\frac{3^n-1}{2}} \geq n$ 임을 보이시오.

• 풀어보기

문제1. 좌표공간에서 두 점 A$(0,\ 0,\ 2)$, B$(2,\ 4,\ -2)$에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0,\ \lvert \overrightarrow{\mathrm{OP}} \rvert = 3$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = 0,\ \lvert \overrightarrow{\mathrm{BQ}} \rvert = 2$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{5}$일 때, 두 유리수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) (2016. 10월 전국연합)

문제2. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx = 2$

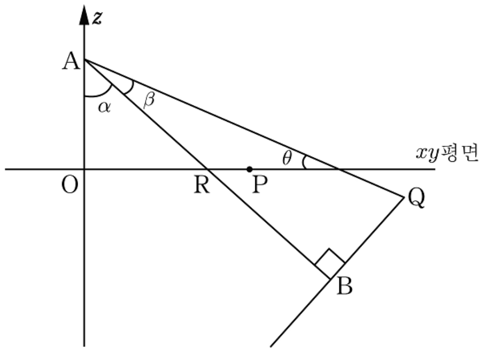
$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2014. 9월 모평)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 24

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{AQ}$의 크기가 일정하므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$는 두 벡터가 이루는 각이 최소일 때 최댓값을 갖는다. 다섯 개의 점 O, A, B, P, Q가 한 평면에 있도록 그림으로 나타내면 다음과 같고 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$는 $|\overrightarrow{OP}|$와 선분 AQ의 xy평면으로의 정사영의 길이의 곱과 같다.



그림에서 $\angle BAO=\alpha$, $\angle QAB=\beta$, xy평면과 직선 AQ가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\sin(\alpha+\beta)$$

이므로 선분 AQ의 xy평면으로의 정사영의 길이는 $|\overrightarrow{AQ}|\sin(\alpha+\beta)$이다.

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}=6$, $\overline{BQ}=2$이므로 $\overline{AQ}=2\sqrt{10}$ 이다

그러므로 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ 이다.

방향벡터가 $(2,\ 4,\ -4)$이고 점 $A(0,\ 0,\ 2)$를 지나는 직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-2}{-4}$이다.

이 직선과 xy평면과의 교점을 R라 하면 직선 AB의 방정식에서 $z=0$일 때이므로 점 R의 좌표는 $(1,\ 2,\ 0)$이다.

$\overline{AR}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$, $\overline{AO}=2$이므로 $\overline{OR}=\sqrt{5}$ 이다.

그러므로 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AQ}|\sin(\alpha+\beta)&=2\sqrt{10}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\\&=\frac{6\sqrt{5}+4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta\\&=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AQ}|\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

$$=3\times\frac{6\sqrt{5}+4}{3}$$

$$=6\sqrt{5}+4$$

따라서 $a=4$, $b=6$이므로 $ab=4\times6=24$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 127

$(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\,|\,tf(t+1)-(t+1)f(t)\,|=\frac{t+1}{t}$$

양변을 $t(t+1)$ 로 나누면

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}\right|=\frac{1}{t^2}$$

$f(t)$ 는 감소함수이고 $f(t)>0$ 이므로 $\dfrac{f(t)}{t}>\dfrac{f(t+1)}{t+1}$

$$\therefore \frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$$

$$\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}=-\frac{2}{t^2}\quad\cdots\ (ㄱ)$$

(ㄱ) 은 $\displaystyle\int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{2}{t}+c$ 를 양변 미분한 것이다

$t=1$일 때, $\displaystyle\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=2+c=2$에서 $c=0$

$$\therefore \int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{2}{t}$$

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{f(x)}{x}\,dx+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}\,dx$$

$$=\frac{4}{7}+\frac{4}{9}=\frac{64}{63}$$

$\therefore\ p+q=127$

[문항 1] 대학발표 예시답안

[문제 1-1]

(1) 점 Q와 점 P사이의 거리의 제곱은 $(2-k-l)^2+(1+2k+l)^2+(2-3k+l)^2$이다.

이를 전개하면 $14k^2-12k+3l^2+2l+9$이며 이를 완전제곱식으로 표현하면

$$14\left(k-\frac{3}{7}\right)^2+3\left(l+\frac{1}{3}\right)^2-14\times\frac{9}{49}-3\times\frac{1}{9}+9$$

이 된다. 그러므로 $k=\frac{3}{7}, l=-\frac{1}{3}$이 거리제곱을, 따라서 거리를 최소가 되게 한다.

(2) 점 Q와 점 P사이의 거리의 제곱은 $(x-k-l)^2+(y+2k+l)^2+(z-3k+l)^2$이다.

이를 전개하면 $14k^2+(-2x+4y-6z)k+3l^2+(-2x+2y+2z)l+x^2+y^2+z^2$이며 이를 완전제곱식으로 표현하면

$$14\left(k+\frac{-x+2y-3z}{14}\right)^2+3\left(l+\frac{-x+y+z}{3}\right)^2-14\times\left(\frac{-x+2y-3z}{14}\right)^2-3\times\left(\frac{-x+y+z}{3}\right)^2$$
$$+x^2+y^2+z^2$$

이 된다. 그러므로 $k=\frac{x-2y+3z}{14}$, $l=\frac{x-y-z}{3}$이 거리제곱을, 따라서 거리를 최소가 되게 한다.

[문제 1-2]

(1) 제시문 (나)의 A식을 전개하면

$$4a^2+4b^2-2(-p+q+r-s)a-2(-p-q+r+s)b+p^2+q^2+r^2+s^2$$

이 되며 이를 완전제곱식으로 표현하면

$$4\left(a-\frac{-p+q+r-s}{4}\right)^2+4\left(b-\frac{-p-q+r+s}{4}\right)^2-4\times\left(\frac{-p+q+r-s}{4}\right)^2-4\times\left(\frac{-p-q+r+s}{4}\right)^2$$
$$+p^2+q^2+r^2+s^2$$

이 된다. 그러므로 $a=\frac{-p+q+r-s}{4}, b=\frac{-p-q+r+s}{4}$가 A를 최소를 만들어 준다.

(2) 제시문 (나)에 주어진 것처럼 p, q, r, s는 함수 $f(x)$를 네 개의 작은 구간 $[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2]$위에서 적분한 값들이기 때문에 (1)에서 구한 a, b는 다음과 같이

표현된다.

$$a=\frac{-p+q+r-s}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}f(x)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}f(x)dx-\frac{1}{4}\int_{1}^{2}f(x)dx,$$

$$b=\frac{-p-q+r+s}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{-1}f(x)dx-\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}f(x)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}f(x)dx+\frac{1}{4}\int_{1}^{2}f(x)dx$$

그러므로 함수 $g(x), h(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<1\\ 1, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x<1\\ -1, & 1\le x\le 2\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<1\\ -1, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

과 같이 정의하면 $a=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)g(x)dx,\ b=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)h(x)dx$

이 때 적분 $\int_{-2}^{2}(g(x))^2dx$, $\int_{-2}^{2}(h(x))^2dx$, $\int_{-2}^{2}g(x)h(x)dx$ 들의 값들은 각각 $4, 4, 0$ 이다.

(3) $\cos\left\{\frac{\pi}{2}(x-p)\right\}$는

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2}(x-p)\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right) \qquad (*)$$

와 같이 표현이 되기 때문에, 우선 함수들 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$에 대하여 A값이 최소가 되는 a, b를 구하자.

$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$인 경우 (2)에서 구한 함수 $g(x), h(x)$와 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)$가 우함수이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)$가 기함수라는 사실을 이용하면

$$a=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx - \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = \frac{2}{\pi}$$

과

$$b = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx = 0$$

를 얻는다.

또한 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$인 경우, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)$가 기함수이고, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)$가 우함수라는 사실 때문에

$$a = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx = 0$$

과

$$b = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0 + \cos\left(\frac{\pi}{2}2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi}$$ 를 얻는다.

그러므로 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$의 경우, 식 (*)과 적분의 성질을 이용하여 우리는

$$a = \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right),\ b = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)$$

를 얻게 된다.

[문항 2] 대학발표 예시답안

[문제 2-1]

(1) $H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k}$$

$$= 1 + \frac{k}{2}$$

(2) (1)과 마찬가지로

$$H_{m^k}=1+\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{m^k}\right)$$

$$\geq 1+\left(\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{m^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m^k}+\cdots+\frac{1}{m^k}\right)$$

$$=1+\left(\frac{m-1}{m}\right)+\left(\frac{m^2-m}{m^2}\right)+\left(\frac{m^3-m^2}{m^3}\right)+\cdots+\left(\frac{m^k-m^{k-1}}{m^k}\right)$$

$$=1+k\times\left(\frac{m-1}{m}\right)$$

[문제 2-2]

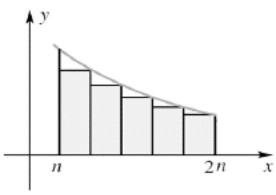
(1) 먼저 [그림1]로부터 $\int_n^{2n}\frac{dx}{x}>H_{2n}-H_n$ 이므로,

$\int_n^{2n}\frac{dx}{x}=[\ln x]_n^{2n}=\ln(2n)-\ln n=\ln(2n/n)=\ln 2$ 이다.

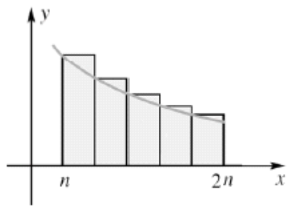
한편, [그림2]에서

$H_{2n}-H_n+\frac{1}{2n}=H_{2n-1}-H_{n-1}>\int_n^{2n}\frac{dx}{x}=\ln(2n)-\ln n=\ln 2$이므로,

$\ln 2-\frac{1}{2n}<H_{2n}-H_n$을 얻는다.



[그림 1]



[그림 2]

두 번째 부등식은 다음과 같이 해결할 수도 있다.

먼저, $H_{2n}-H_n>\int_{n+1}^{2n+1}\frac{dx}{x}=\ln(2n+1)-\ln(n+1)=\ln\frac{2n+1}{n+1}$

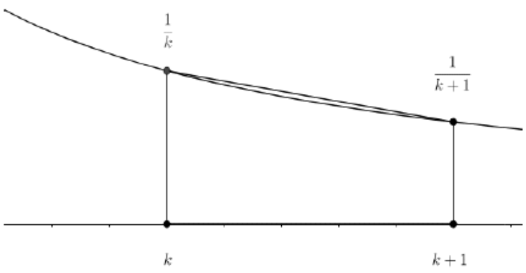
이제 $\ln 2-\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n+1}{n+1}$를 증명하면 된다, 이 부등식은 $\frac{2n+2}{2n+1}<e^{\frac{1}{2n}}$과 동치이며

양변제곱하면 $\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2<e^{\frac{1}{n}}$이 된다. 우리는 $e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}$임을 알고 있으므로

$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2<1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}$을 증명하면 된다. 이는 다항식으로 비교하여 성립을 확인할 수 있다.

(2) 각 자연수 k에 대해 [그림3]처럼 사다리꼴을 생각하면

$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)/2$ 이다.



[그림 3]

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)/2=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-1+\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{-n}{2(n+1)}$$

이제 $\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{n}{2(n+1)}$ 이므로 $\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}<H_n$ 이 성립한다.

[문제 2-3]

(1) $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{k+j}>\frac{2j+2}{j+2k}$ 에서 $\frac{2j+2}{j+2k}\geq 1$인 j를 k로 나타내면

$2j+2\geq j+2k$에서 $j\geq 2k-2$이다.

(2) 앞의 (1)에서 $j=2k-2$이 되도록 j를 잡아 나가면 항들의 그룹은 항상 1보다 크거나 같게 된다.

항들의 그룹 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{k+(2k-2)}$ 에 속하는 항의 개수는 $2k-1$임을 참조하면

항의 개수를 $1, 2\times2-1=3, 2\times5-1=3^2, 2\times14-1=3^3, \cdots$로 잡아나가

$1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$까지 더하면 그 합은 n보다 크게 된다. 즉,

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\cdots+\frac{1}{\frac{3^n-1}{2}}\right)=H_{\frac{3^n-1}{2}}\geq n$$

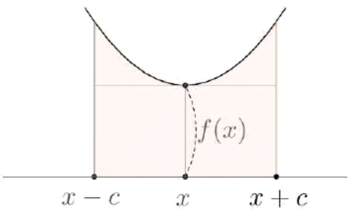
가 성립한다.

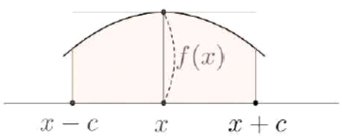
36 아주대학교 수시(오전)[36)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생인 경우 해결할 수 있는 수준의 다양한 수학적 주제를 다룸.	없음 (의학과 제외)	수학(2문항, 문항별 세부문제 3문제 내외 출제)	120분

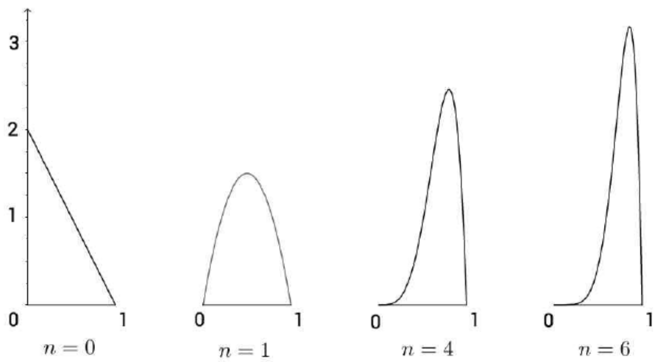
[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 열린구간 (a, b)에서 정의되고 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$를 생각하자. 각각의 x에서 함수 그래프의 볼록 또는 오목은 이계도함수 $f''(x)$의 부호에 따른다. 예를 들어 아래 두 그래프를 보면 $f''(x)$와 $\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-c}^{x+c} f(t)\,dt - f(x)$의 부호가 같음을 알 수 있다.





(나) 각각의 $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대하여 닫힌구간 $[0, 1]$에 정의된 함수 $f(x) = (n+1)(n+2)x^n(1-x)$를 생각하자. 모든 n에 대하여 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$의 값은 같으며, n이 커짐에 따라 그래프가 점점 오른쪽으로 치우쳐 간다. 예를 들어 $n = 0, 1, 4, 6$일 때, $f(x)$의 그래프는 각각 아래와 같다.



36) 아주대학교 홈페이지

$n=0$인 경우 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)=0$이므로 $\int_0^1 |f''(x)|\,dx=0$이다. 그리고 n이 증가할수록 $\int_0^1 |f''(x)|\,dx$의 값이 점점 증가한다.

(다) (평균값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(라) 오일러의 수 e는 수열 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한으로 정의된다. 이를 이용하면 다음을 알 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

[문제1-1] 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하시오.

(1) (5점) 모든 n에 대하여 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$임을 보이시오.

(2) (10점) 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\int_0^1 |f''(x)|\,dx=(n+1)(n+2)a_n$이라고 할 때, a_n을 구하고, 제시문 (라)를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

(3) (10점) 각각의 $r\in(0, 1)$에 대하여, n이 한없이 커질 때 $\int_r^1 f(x)\,dx$의 값이 1에 수렴함을 보이시오. (단, 1보다 큰 상수 b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0$이다.)

[문제1-2] 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하시오. 모든 실수에서 정의되고 모든 x에 대하여 $f''(x) > 0$인 함수 $f(x)$를 생각하자.

(1) (5점) 음이 아닌 실수에서 정의된 함수 $h(x)$가

$$h(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt - 2f(0)x$$

이다. $x > 0$일 때 $h'(x)$를 구하시오.

(2) (10점) $x > 0$일 때 $h'(x) > 0$임을 보이시오.

(3) (10점) (1), (2)와 제시문 (다)를 이용하여, 모든 $x > 0$에 대하여

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt > f(0)$$

이 성립함을 보이시오.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 같은 길이의 막대자석 여러 개를 일렬로 빈틈없이 나열하자. 세 개의 자석이 [그림 1]과 같이 나열되어 있다면 두 곳에서 같은 극이 만나고, [그림 2]에서는 한 곳에서만 같은 극이 만난다.

[그림 1]

[그림 2]

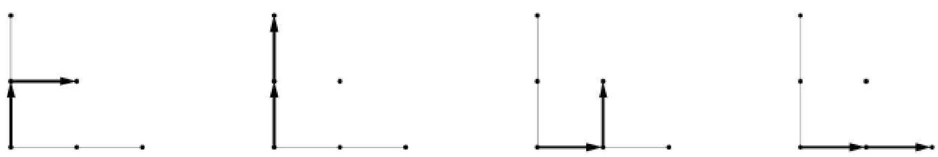
두 극이 같은 곳의 개수를 E로 표시한다면 [그림 1]은 E가 2, [그림 2]는 E가 1이 된다. 왼쪽이 S극, 오른쪽이 N극인 자석을 **타입1**으로, 그 반대인 경우 **타입0**으로 표시한다면, [그림 1]의 나열방식은 $(1, 0, 1)$, [그림 2]는 $(1, 1, 0)$으로 나타낼 수 있다. 세 개의 자석들을 나열하는 방식은 모두 $2^3 = 8$가지인

$(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$

들이며 이들을 E의 값에 따라 분류하면 다음의 표와 같다.

E	0	1	2
나열 방식의 개수 $w(E)$	2	4	2
나열방식	$(1, 1, 1)$	$(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$

제일 왼쪽 자석이 **타입1**인 경우, 세 개의 자석을 나열하는 각각의 방식마다 아래 그림처럼 이차원 격자 위의 경로를 대응시키자. 즉 $(1, a, b)$ (단, a, b는 0 또는 1)를 왼쪽에서 오른쪽으로 읽어가면서 같은 값이 나올 때 오른쪽으로, 다른 값이 나올 때 위쪽으로 길이 1만큼 이동한다면 아래와 같이 길이 2인 경로와 대응시킬 수 있다.



$(1, 0, 0)$ $E = 1$ $(1, 0, 1)$ $E = 2$ $(1, 1, 0)$ $E = 1$ $(1, 1, 1)$ $E = 0$

제일 왼쪽 자석이 타입0인 경우도 같은 규칙을 적용하면 비슷한 논의가 가능하다.

(나) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(m, p)$ (단, $p \in (0, 1)$)을 따를 때, m이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(mp, mp(1-p))$를 따른다.

아래 문제들에서 n은 3 이상의 자연수라고 하자.

[문제 2-1] (5점) n개의 자석들을 나열할 때, 타입1의 개수가 j개인 나열방식의 개수를 구하시오.

[문제 2-2] (10점) n개의 자석들을 나열할 때, E의 값에 따른 나열방식의 개수 $w(E)$를 구하고 그 이유를 설명하시오.

[문제 2-3] n개의 자석들을 나열할 때, 각 자석을 **타입1**으로 선택할 확률이 p (단, $p \in (0,1)$), **타입0**으로 선택할 확률이 $q = 1 - p$라고 하자. 자석의 타입을 선택하는 사건들은 서로 독립이라고 하자.

(1) (10점) $p = q = \frac{1}{2}$인 경우 E의 값이 k일 확률을 **[문제 2-2]**를 이용하여 구하고 이유를 설명하시오.

(2) (10점) 제시문 (나)에 따르면 (1)에서 구한 E의 확률분포는 n이 커지면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다. 이 때 m, σ를 구하고 이유를 설명하시오.

(3) (15점) $p \neq q$일 경우 E의 값이 1일 확률은 $\frac{2pq}{q-p} \cdot r$로 나타낼 수 있다. r을 p와 q에 관한 식으로 나타내시오.

• 풀어보기

문제1. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] (2017년 수능)

[보 기]

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제2. 함수 $f(x)=e^x-1$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[4점] (2012년 4월 전국연합)

〈 보 기 〉

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx=e-2$

ㄴ. $x>0$에서 $f(x)>x$이다.

ㄷ. $\dfrac{5(e^5-1)}{2}<\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx<\dfrac{(e^5-1)^2}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제3. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때 $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점] (2014학년도 예비평가)

〈보 기〉

ㄱ. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4\int_{0}^{1} f(x)dx$

ㄴ. $1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이다.

ㄷ. $\int_{1}^{3} x|f'(x)|\,dx = 4$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제4. 3개의 검은 공과 k개의 흰 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 45회 반복할 때, 검은 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $E(X) = 15$일 때, $E(X^2) + E(kX)$의 값을 구하시오.

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ⑤

ㄱ. $0<x<\sqrt{\pi}$에서 $e^{-x}>0$, $\sin(x^2)>0$이고 $\sin 0=\sin\pi=0$이므로

$$f(\sqrt{\pi})=e^{-\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt>0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $f'(x)=-e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt+e^{-x}\sin(x^2)$

$$f'(0)=-e^{-0}\int_0^0 \sin(t^2)dt+e^{-0}\sin 0^2=0$$

$$f'(\sqrt{\pi})=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt+e^{-\sqrt{\pi}}\sin(\sqrt{\pi}^2)=-f(\sqrt{\pi})<0$$

함수 $f(x)$가 구간 $[0,\sqrt{\pi}]$에서 연속이고 구간 $(0,\sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $f'(a)=\dfrac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}>0$를 만족시키는 a가 열린구간 $(0,\sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. ㄴ을 만족시키는 $a(0<a<\sqrt{\pi})$에 대하여 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\sqrt{\pi}]$에서 연속이고 $f'(a)>0$, $f'(\sqrt{\pi})<0$이므로 사이값 정리에 의해 $f'(b)=0$이 되는 b가 열린구간 $(0,\sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx=\left[e^x-x\right]_0^1=e-2$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-x$라 하자.

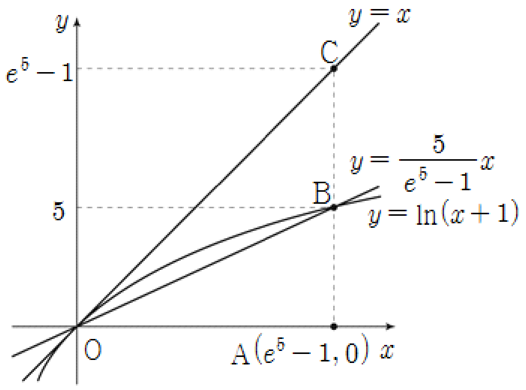
$x>0$에서 $g'(x)=e^x-1>0$이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다.

따라서 $g(0)=0$이므로 $x>0$에서 $f(x)>x$이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$이므로

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{5(e^5-1)}{2}<\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx,$$

$$\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx<\frac{(e^5-1)^2}{2}=\triangle \mathrm{OAC} \text{ (참)}$$



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

풀어보기(문제3) 정답 ⑤

ㄱ. (참) $f(x)=f(-x)$ 이고, $f(x+2)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \qquad \left(\because\ \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right) \\ &= 4\int_{0}^{1} f(x)\,dx\end{aligned}$$

ㄴ. (참) $f(x+2)=f(x)$ 이므로 $1<x<2$ 에서 $f(x)$ 의 도함수는 $-1<x<0$ 에서와 같다. 따라서 $-1<x<0$ 에서 $f'(x)=\dfrac{4x(x^4-1)}{(x^4+1)^2}>0$ 이다.

ㄷ. (참)

$$\begin{aligned}\int_{1}^{3} x|f'(x)|\,dx &= \int_{1}^{2} xf'(x)\,dx - \int_{2}^{3} xf'(x)\,dx \\ &= [xf(x)]_1^2 - \int_{1}^{2} f(x)\,dx - [xf(x)]_2^3 + \int_{2}^{3} f(x)\,dx \\ &= 2f(2)-f(1)-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx - 3f(3)+2f(2)+\int_{0}^{1} f(x)\,dx \\ &= 4f(0)-4f(-1)=4f(0)=4\end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

풀어보기(문제4) 정답 325

한 번의 시행에서 검은 공이 나올 확률은 $\dfrac{3}{k+3}$ 이다.

확률변수 X가 이항분포 $B\left(45,\ \dfrac{3}{k+3}\right)$을 따르므로 $E(X)=15$ 에서

$$45\times\frac{3}{k+3}=15 \quad \therefore k=6$$

따라서 X는 이항분포 $B\left(45,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$V(X)=45\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=10$$

$$\therefore E(X^2)+E(6X)=\{E(X)\}^2+V(X)+6E(X)$$
$$=15^2+10+90=325$$

[문항 1] 대학발표 예시답안

[문제 1-1]

(1) $$\int_0^1 f(x)\,dx=(n+1)(n+2)\int_0^1 (x^n-x^{n+1})\,dx$$
$$=(n+1)(n+2)\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1=1$$

(2) $$f''(x)=(n+1)(n+2)(x^n-x^{n+1})''$$
$$=(n+1)(n+2)\{n(n-1)x^{n-2}-(n+1)nx^{n-1}\}$$
$$=(n+1)(n+2)nx^{n-2}\{n-1-(n+1)x\}=0$$

이 되는 $x\in(0,\,1)$는 $\frac{n-1}{n+1}$이고, $x<\frac{n-1}{n+1}$일 때 $f''(x)>0$, $x>\frac{n-1}{n+1}$일 때 $f''(x)<0$이 된다. 따라서

$$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 |f''(x)|\,dx$$
$$=\left\{-\int_{\frac{n-1}{n+1}}^1 f''(x)\,dx+\int_0^{\frac{n-1}{n+1}} f''(x)\,dx\right\}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\left\{-\left[f'(x)\right]_{\frac{n-1}{n+1}}^1+\left[f'(x)\right]_0^{\frac{n-1}{n+1}}\right\}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=-\left[nx^{n-1}-(n+1)x^n\right]_{\frac{n-1}{n+1}}^1+\left[nx^{n-1}-(n+1)x^n\right]_0^{\frac{n-1}{n+1}}$$
$$=-(n-(n+1))+2\left\{n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}-(n+1)\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\right\}-0$$
$$=1+2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}$$

이 된다. 이제 제시문 (라)를 $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{n+1}{n}$에 적용하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\frac{2}{e^2}$를 얻게 된다. 따라서 $(n+1)(n+2)a_n$은 n이 커짐에 따라 무한히 커지게 된다.

(3) 각 $r \in (0, 1)$에 대하여

$$\begin{aligned}\int_r^1 f(x)\,dx &= (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_r^1 \\ &= (n+1)(n+2)\left\{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}r^{n+1} - \frac{1}{n+2}r^{n+2}\right)\right\} \\ &= 1-(n+2)r^{n+1}+(n+1)r^{n+2} \\ &= 1-(nr^n)r-2r^{n+1}+(nr^n)r^2+r^{n+2}\end{aligned}$$

이다. r은 1보다 작은 양수이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이고, $r = \frac{1}{b}$로 나타내면 $b>1$이기 때문에 $\lim_{n\to\infty} nr^n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n} = 0$이 된다. (따라서 n이 커질수록 $\int_r^1 f(x)\,dx$는 1로 수렴하게 된다.)

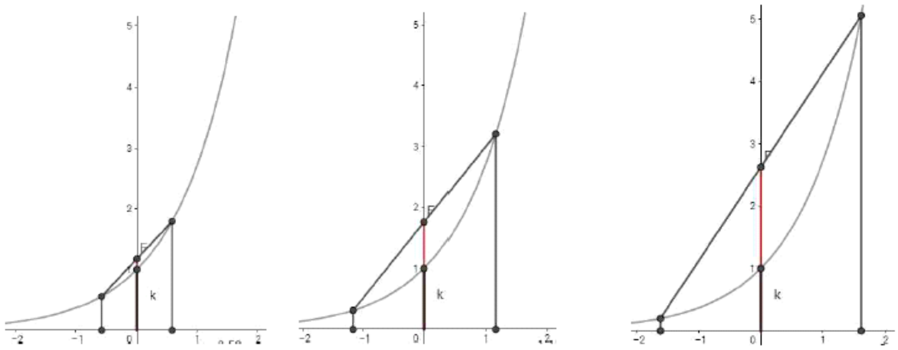
[문제 1-2]

(1) 임의의 $x>0$에 대하여 $h(x)$를

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_{-x}^0 f(t)\,dt - 2f(0)x = \int_0^x f(t)\,dt - 2f(0)x$$

로 볼 수 있기 때문에 $h'(x) = f(x) - f(-x)(-1) - 2f(0) = f(x)+f(-x)-2f(0)$이 된다.

(2) **[풀이1]** 제시문 (가)와 문제의 조건을 이용하면 $x=0$ 주위에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다고 할 수 있다. 따라서 그림을 이용하면 임의의 $x>0$에 대하여 $\frac{f(x)+f(-x)}{2} > f(0)$을 얻게 된다.



이는 (1)의 풀이에 따라 $h'(x)>0$을 의미한다.

[풀이2] 제시문 (다)를 이용하면 좀 더 엄밀하게 $h'(x)>0$을 보일 수 있다. 임의의 $x>0$에 대하여 $h'(x) = (f(x)-f(0)) - (f(0)-f(-x))$로 표현하면, 제시문 (다)에 의하여 $-x<c_1<0<c_2<x$를 만족하는 c_1, c_2가 존재하며

$$h'(x) = f'(c_2)(x-0) - f'(c_1)(0-(-x)) = (f'(c_2)-f'(c_1))x$$

가 된다. 다시 한 번 제시문(다)를 이용하면 $h'(x) = f''(x)(c_2 - c_1)x$이 되는 c가 열린구간 (c_1, c_2)안에 존재한다. 이때 $f''(c)>0$, $c_2>c_1$, $x>0$이므로 $h'(x)>0$이 된다.

[풀이3] $h'(x)=f(x)+f(-x)-2f(0)$을 이용하면 모든 $x>0$에 대하여 $h''(x)=f'(x)-f'(-x)$이고, 모든 $x>0$에 대하여 $f''(x)>0$이란 조건은 $f'(x)$가 증가함수임을 의미하기 때문에, 모든 $x>0$에 대하여 $f'(x)>f'(-x)$ 또는 $h''(x)>0$이다. 즉 $h'(x)$는 증가함수이며 모든 $0\le x_1<x_2$에 대하여 $h'(x_1)<h'(x_2)$이다. 이제 $h'(0)=0$라는 관찰을 이용하면 $x>0$일 때 $h'(x)>0$을 알 수 있다.

(3) (1)에 의하면 $h(0)=0$이다.
그리고 모든 $x>0$에 대하여 $h(x)=h(x)-h(0)=h'(c)(x-0)$을 만족하는 c가 제시문 (다)에 의하여 열린구간 $(0, x)$ 안에 존재하게 된다. 따라서 (2)의 결과에 의하여 $h(x)>0$을 알 수 있고 이는 위의 부등식을 의미한다.

[문항 2] 대학발표 예시답안

[문제 2-1] n개의 자석들의 타입 선택을 고려하면 모든 가능한 나열방식 수는 2^n개다. 그 중 **타입1**인 자석이 j개 $(j=0, 1, \cdots, n)$, **타입0**인 자석이 $n-j$개인 경우들은 n개의 나열된 방 중에서 j개의 방을 선택하는 방법 수와 일치하며 그 수는 ${}_n\mathrm{C}_j=\dfrac{n!}{j!\,(n-j)!}$이 된다.

[문제 2-2] 우선 E가 가질 수 있는 값은 $0, 1, \cdots, n-1$ 중 하나이다. 왼쪽 첫 자석이 **타입1**을 가질 경우, 주어진 E의 값에 대하여 같은 E값을 가지는 나열방식의 개수는 제시문 (가)의 마지막 설명에 의하면 총 $n-1$개의 오른쪽 또는 위쪽의 이동 중에서 위쪽으로 정확히 E번 이동하는 경우들의 수이며 그 수는 $n-1$개의 나열된 방에서 E개의 방을 선택하는 방법 수와 일치하게 되어

$${}_{n-1}\mathrm{C}_E=\frac{(n-1)!}{E!\,(n-1-E)!}$$

과 같다. 또한 왼쪽 첫 자석이 **타입0**인 경우도 같은 결과가 됨을 관찰할 수 있기 때문에 $w(E)=2\times{}_{n-1}\mathrm{C}_E$가 된다.

[문제 2-3] n개의 자석들을 나열할 때, 각 자석을 **타입1**으로 선택할 확률이 p(단, $p\in(0,1)$), **타입0**으로 선택할 확률이 $q=1-p$라고 하자. 자석의 타입을 선택하는 사건들은 서로 독립이라고 하자.

(1) k는 $0, 1, \cdots, n-1$인 경우들만 생각하면 된다. $p=q=\dfrac{1}{2}$인 경우 n개의 자석들을 나열하는 방식 수 2^n개 모두 동일한 확률 $\dfrac{1}{2^n}$을 가지게 된다. 따라서 E의 값이 k가 될 확률은 $\dfrac{w(E)}{2^n}=\dfrac{2\times{}_{n-1}\mathrm{C}_k}{2^n}=\dfrac{{}_{n-1}\mathrm{C}_k}{2^{n-1}}$이다.

(2) (1)의 결과에 의하면 E의 값이 k가 될 확률이 ${}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$이기 때문에 확률변수 E는 이항분포 $\mathrm{B}(n-1,\ 0.5)$를 따름을 알 수 있다. 따라서 제시문 (나)에 의하여 n이 클수록 E의 분포는 $N(0.5(n-1),\ 0.25(n-1))$의 분포에 근사해간다. 그러므로 $m=0.5(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)$, $\sigma=\sqrt{0.25(n-1)}=\frac{\sqrt{n-1}}{2}$이다.

(3) 왼쪽 첫 자석이 **타입1**이면서 E가 1인 경우의 나열방식들은

$(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0),\ \cdots,\ (1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 0)$

의 $n-1$가지이며 각각의 확률은 pq^{n-1}, p^2q^{n-2}, $\cdots$, $p^{n-1}q$가 된다. 그러므로 그 합을 다음과 같이 등비수열의 합의 공식을 이용하여 정리할 수 있다.

$$q^n\left(\left(\frac{p}{q}\right)+\cdots+\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right)=q^n\,\frac{\frac{p}{q}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{p}{q}}=\frac{pq(q^{n-1}-p^{n-1})}{q-p}$$

비슷하게 왼쪽 첫 자석이 **타입0**이면서 E가 1인 경우, 위의 경우에서 0과 1들의 역할이 바뀐

$(0,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 1),\ \cdots,\ (0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$

들이며 각각의 확률은 qp^{n-1}, q^2p^{n-2}, $\cdots$, $q^{n-1}p$가 되어 그 합은 위에서 계산한 합과 같게 된다. 따라서 $r=q^{n-1}-p^{n-1}$이다.

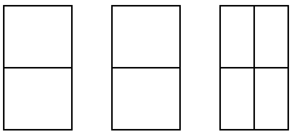
37 아주대학교 수시(오후)[37]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생인 경우 해결할 수 있는 수준의 다양한 수학적 주제를 다룸.	없음 (의학과 제외)	수학(2문항, 문항별 세부문제 3문제 내외 출제)	120분

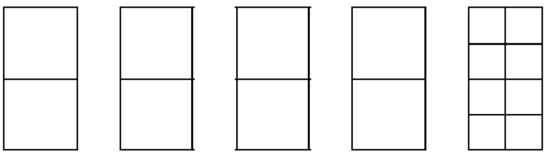
[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

이집트분수는 분수를 서로 다른 단위분수(분자가 1이고 분모가 자연수인 분수)의 합으로 나타낸 것이다. 이런 이집트분수를 어떻게 사용했는지 역사적으로 분명하지는 않으나 다음과 같은 분배 문제와 관련 있다고 볼 수 있다.

(가) 4명에게 3개의 빵을 나누어 주는 방법을 생각해 보자. 아래 그림과 같이 빵 2개는 2등분하고, 빵 1개는 4등분하여 공평하게 나눠주면 모든 사람은 $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$(개)의 빵을 가지게 된다.



8명에게 5개의 빵을 나누어줄 때는 아래 그림과 같이 빵 4개는 2등분하고, 빵 1개는 8등분하면 공평하게 나눌 수 있다. 이 때 모든 사람은 $\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$(개)의 빵을 가지게 된다.



(나) 자연수도 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있는 경우가 있다. 예를 들어,

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

이다.

37) 아주대학교 홈페이지

[문제1-1] (4점) 이집트분수 $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ 을 이용하여 (　) 안에 알맞은 수를 써 넣으시오.

(　)명에게 (　)개의 빵을 나누어 줄 때 빵 (　)개는 (　)등분, 빵 (　)개는 (　)등분, 빵 (　)개는 (　)등분하면 공평하게 나눌 수 있다.

[문제1-2] 등식 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ (단, n은 2 이상의 자연수)를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) (7점) n이 짝수일 때, $\frac{3}{n}$을 3개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.

(2) (7점) n이 3 이상의 홀수일 때, $\frac{3}{n}$을 3개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.

[문제1-3] (10점) [문제1](1)과 제시문 (나)를 이용하여 n이 짝수이고 k가 2 이상의 자연수일 때, $\frac{3}{n}$을 k개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.

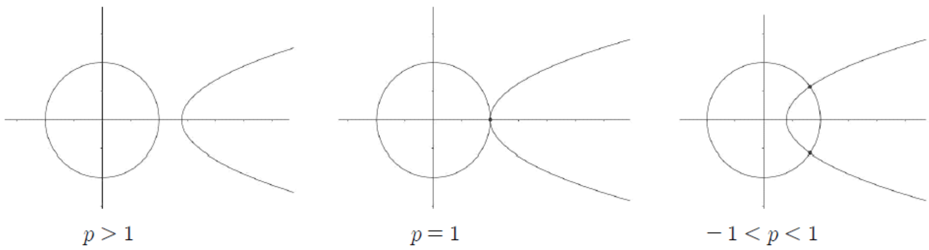
[문제1-4] (1) (14점) 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{n}$을 두 단위분수의 합 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 으로 나타낼 수 있다고 하자. 이때 $x=n+a$, $y=n+b$이고 $ab=n^2$을 만족시키는 자연수 a, b가 존재함을 보이시오.

(2) (8점) $\frac{1}{6}$을 서로 다른 두 개의 단위분수의 합 $\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (단, $x<y$)으로 나타낼 수 있는 모든 경우를 구하시오.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

이차곡선은 원, 타원, 쌍곡선, 포물선 등으로 원뿔을 평면으로 잘랐을 때의 단면에 나오는 곡선으로 원뿔곡선이라고도 한다. 이런 이차곡선들이 만나거나 접하는 장면을 알아보는 것은 흥미로운 일이다. 우리는 원과 포물선이 만나는 장면을 다음과 같이 정형화하여 알아보고자 한다.

다음 그림과 같이 단위원 $x^2+y^2=1$과 포물선 $x-p=4cy^2$ $(c>0)$의 교점의 개수는 $p>1$, $p=1$, $-1<p<1$의 세 경우에는 어떤 $c>0$에 대해서도 각각 0, 1, 2이다.



그러나 $p\le -1$인 경우는 p와 c의 관계에 따라 교점의 개수가 달라진다.

[문제 2-1] (10점) 단위원 $x^2+y^2=1$과 포물선 $x+1=4cy^2$ $(c>0)$이 점 $(-1, 0)$이 아닌 교점을 가질 c의 범위를 구하고 이때 교점의 좌표를 구하시오.

[문제 2-2] $p<-1$일 때, 단위원 $x^2+y^2=1$과 포물선 $x-p=4cy^2$ $(c>0)$이 접할 때 그 접점과 접점이 존재할 c, p에 관한 조건을 다음 과정을 통해 구해보자.

(1) (6점) $x=a$에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같도록 하는 a의 값을 구하시오.

(2) (7점) (1)에서 구한 a에 대하여 $|a|\le 1$이 될 c의 조건을 구하시오.

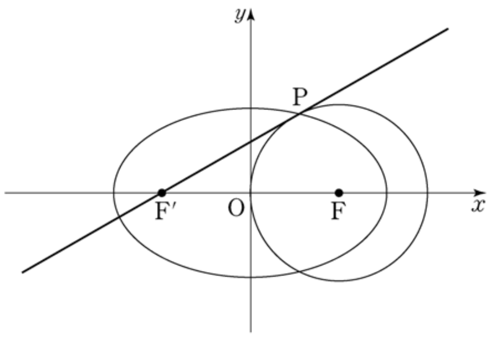
(3) (7점) $\left(a, \pm\sqrt{1-a^2}\right)$이 포물선 위의 점이 되도록 하는 p를 c에 관한 식으로 나타내시오.

[문제 2-3] (20점) $p\le -1$이라 하자. 단위원 $x^2+y^2=1$과 포물선 $x-p=4cy^2$ $(c>0)$의 교점의 개수를 c와 p에 따라 구하시오.

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이 있다. 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c인 원이 타원과 점 P에서 만난다. 점 P에서 원에 접하는 직선의 점 F′을 지날 때, c의 값은? [3점]

(2014년 6월 평가원)



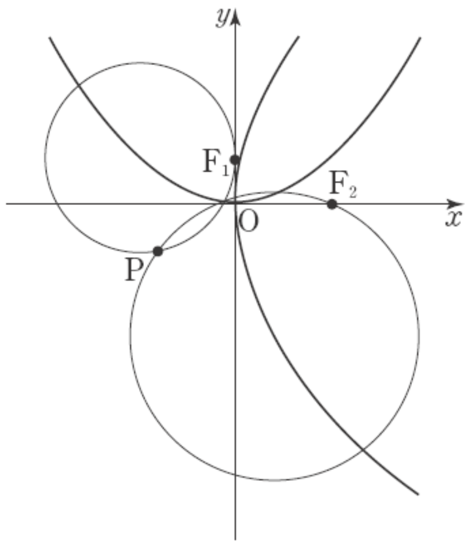
① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}-\sqrt{3}$　③ $\sqrt{6}-1$
④ $2\sqrt{3}-2$　⑤ $\sqrt{14}-\sqrt{5}$

문제2. 이차곡선 $x^2-4x+9y^2-5=0$과 중심이 $(2,0)$이고 반지름의 길이가 a인 원이 서로 다른 네 점에서 만날 때, a의 범위는? [3점] (00학년도 수능)

① $0<a\leq 2$　② $1<a<3$　③ $2\leq a<4$
④ $0<a<4$　⑤ $a\geq 2$

문제3. 좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$의 초점을 F_1, 포물선 $C_2 : y^2 = 8x$의 초점을 F_2라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

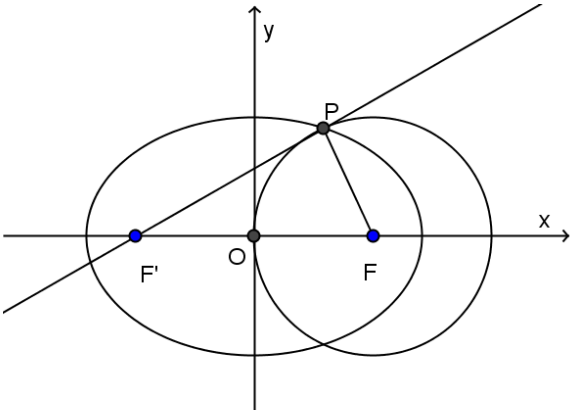
> ㈎ 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원의 교점이다.
> ㈏ 제3사분면에 있는 점이다.



원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점] (2014년 6월 평가원)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④



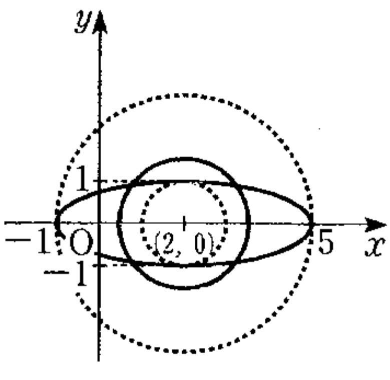
타원의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=4$ 이고, $\overline{\mathrm{PF}}=c$이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}=4-c$. 한편 원의 접선의 성질에 의해 $\triangle \mathrm{F}'\mathrm{PF}$는 $\angle \mathrm{P}$가 직각인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{FF}'}=2c$ 이므로 $(4-c)^2+c^2=(2c)^2$ 이다. 정리하면 $c^2+4c-8=0$ 이고 따라서 방정식을 만족하는 양수 c는 $2\sqrt{3}-2$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 ②

주어진 이차곡선을 변형하면 $(x-2)^2+9y^2=9$ 이므로

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}+y^2=1$$

$\frac{x^2}{3^2}+y^2=1$ 을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로 그래프는 그림과 같다.

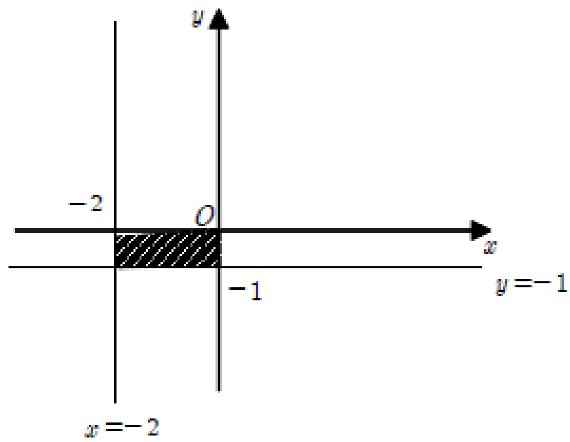


따라서 중심이 $(2, 0)$인 원과 서로 다른 네 점에서 만나려면 타원과 원이 $(2, 1)$, $(2, -1)$에서 내접하는 경우의 반지름의 길이가 1이고 $(5, 0)$, $(-1, 0)$에서 외접하는 경우의 반지름의 길이가 3이므로 $1<a<3$

풀어보기(문제3) 정답 5

포물선 C_1 : $x^2=4y$의 준선의 방정식은 $y=-1$이고 중심이 C_1 위에 있고 초점 F_1을 지나는 원은 준선 $y=-1$과 접하므로 원 C_1은 $y\geq-1$인 영역에 존재한다.

포물선 C_2 : $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이고 중심이 C_2 위에 있고 초점 F_2를 지나는 원은 준선 $x=-2$에 접하므로 원 C_2는 $x\geq-2$인 영역에 존재한다. 따라서, 두 원 C_1, C_2의 교점 P가 제3사분면에서 존재해야 하므로 점 P가 존재하는 영역은 그림의 경계를 포함하는 빗금친 부분이다. (단, 축은 제외한다)



따라서 점 P의 좌표가 $(-2,\ -1)$일 때 $\overline{\mathrm{OP}}^2$이 최대가 되므로 구하고자 하는 최댓값은 $(-2)^2+(-1)^2=5$이다.

[문항 1] 대학발표 예시답안

[문제 1-1] $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{10}{20}+\frac{4}{20}+\frac{1}{20}=\frac{10+4+1}{20}=\frac{15}{20}$ 이므로 (20)명에게 (15)개의 빵을 나누어 줄 때 빵 (10)개는 (2)등분, 빵 (4)개는 (5)등분, 빵 (1)개는 (20)등분하면 공평하게 나눌 수 있다.

[문제 1-2]

(1) $\frac{3}{n}=\frac{2}{n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$

여기에서 $\frac{n}{2}<n+1<n(n+1)$이고 n이 짝수이므로 $\frac{n}{2}$는 자연수, 따라서 3개의 서로 다른 단위분수의 합이다.

(2) 등식 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$의 양변에 2를 곱하면 $\frac{2}{n}=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}$를 얻고

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

여기에서 $\frac{n+1}{2}<n<\frac{n(n+1)}{2}$ 이고 n이 홀수이므로 $\frac{n+1}{2}$는 자연수, 따라서 3개의 서로 다른 단위분수의 합이다.

[문제 1-3]

(a) k가 짝수이면 제시문 (나)를 사용하여

$$\begin{aligned}\frac{3}{n}&=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}\\&=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{12n}+\frac{1}{18n}+\frac{1}{36n}\end{aligned}$$

가장 큰 단위분수에 제시문 (나)의 등식 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$을 곱하는 식으로 하면 k개(k는 짝수)의 서로 다른 단위분수의 합을 얻을 수 있다.

(b) k가 홀수이면 [문제1-2]에서

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

제시문 (나)를 사용하여

$$\begin{aligned}\frac{3}{n}&=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{\frac{n}{2}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n(n+1)}+\frac{1}{3n(n+1)}+\frac{1}{6n(n+1)}\end{aligned}$$

가장 큰 단위분수에 제시문 (나)의 등식 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$을 곱하는 식으로 하면 k개(k는 홀수)의 서로 다른 단위부수의 합을 얻을 수 있다.

[문제 1-4]

(1) $\frac{1}{y}=\frac{1}{n}-\frac{1}{x}=\frac{x-n}{nx}$ 이므로 $y=\frac{nx}{x-n}=\frac{n(x-n)+n^2}{x-n}=n+\frac{n^2}{x-n}$.

y와 n은 정수이므로 $\frac{n^2}{x-n}$은 정수가 된다.

$a=x-n$ 이라 하면 a 는 n^2 의 약수이고 $b=\dfrac{n^2}{a}$ 라 두면 b 는 자연수이며 $x=n+a$, $y=n+b$ 이다.

$$\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{2n+a+b}{(n+a)(n+b)}=\frac{2n+a+b}{n^2+(a+b)n+ab}=\frac{2n+a+b}{n^2+(a+b)n+n^2}=\frac{1}{n}$$

(2) $6^2=36$ 은 1×36, 2×18, 3×12, 4×9 로 표현되므로

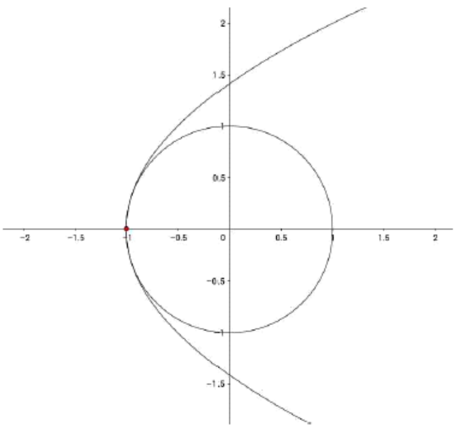
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6+36}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+2}+\frac{1}{6+18}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+3}+\frac{1}{6+12}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+4}+\frac{1}{6+9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$$

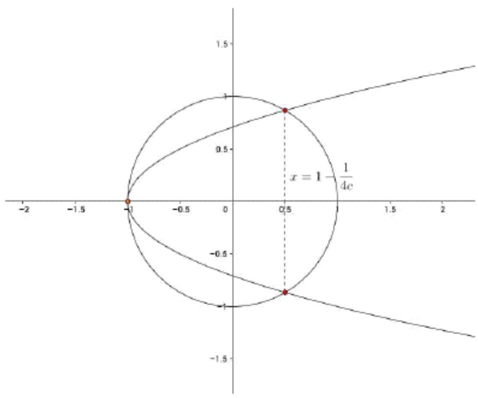
[문항 2] 대학발표 예시답안

[문제 2-1]

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+1=4cy^2 \end{cases}$$

를 연립하면 $x^2+\dfrac{x+1}{4c}=1$, 정리하면 $x^2+\dfrac{x}{4c}+\dfrac{1}{4c}-1=0$ 이고 $(x+1)\left(x-1+\dfrac{1}{4c}\right)=0$. 따라서 $x=1-\dfrac{1}{4c}$ 가 교점이 될 가능성이 있다. 교점이 되려면 $|x|\le1$ 이어야 하므로 $c>\dfrac{1}{8}$ 을 얻는다. 이제 교점은 $\left(1-\dfrac{1}{4c},\ \pm\dfrac{\sqrt{8c-1}}{4c}\right)$ 이다.





[문제 2-2]

(1) $x^2+y^2=1$에서 $y'=-\dfrac{x}{y}$, $x-p=4cy^2$에서 $y'=\dfrac{1}{8cy}$ 두 기울기가 같으려면

$-\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{8cy}$. 이제 $y\neq 0$이므로 $a=-\dfrac{1}{8c}$이다.

(2) $a^2=\dfrac{1}{64c^2}\leq 1$에서 $c\geq\dfrac{1}{8}$

$c=\dfrac{1}{8}$이면 $a^2=1$이므로 $x^2+y^2=1$에서 $y=\pm\sqrt{1-a^2}=\pm\sqrt{1-1}=0$

그러나 $a-p=4cy^2=4c\times 0^2=0$이므로 $a=p<-1$

이는 모순이므로 $c>\dfrac{1}{8}$이다.

(3) $y^2=1-a^2=1-\dfrac{1}{64c^2}=\dfrac{64c^2-1}{64c^2}>0$에서 $y=\pm\dfrac{\sqrt{64c^2-1}}{8c}$이므로 접점의 좌표는

$\left(-\dfrac{1}{8c},\ \pm\dfrac{\sqrt{64c^2-1}}{8c}\right)$이고 이 좌표를 $x-p=4cy^2$에 대입하면

$$-\frac{1}{8c}-p=4c\times\frac{64c^2-1}{64c^2}=\frac{64c^2-1}{16c}=4c-\frac{1}{16c}$$

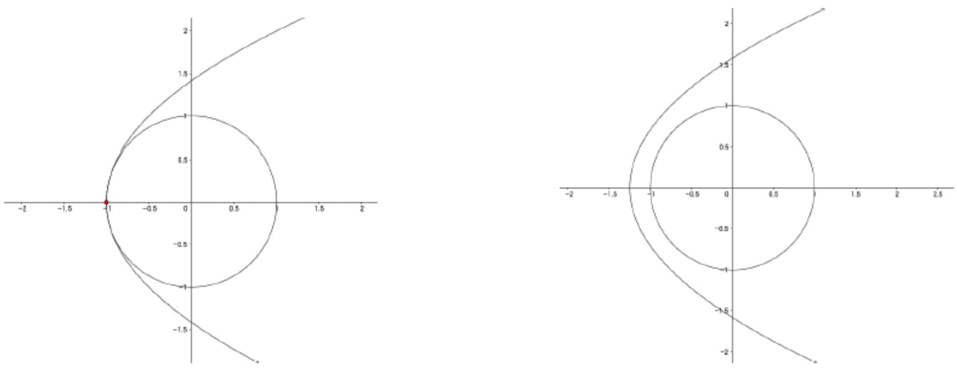
따라서 $p=-4c-\dfrac{1}{8c}+\dfrac{1}{16c}=-4c-\dfrac{1}{16c}$

이제 (1), (2), (3)의 결과를 종합하면 접점이 존재하려면 $c>\dfrac{1}{8}$이고 $p=-4c-\dfrac{1}{16c}$

[문제 2-3]

(a) $c\leq\dfrac{1}{8}$인 경우 : [문제2-2]에서 두 점에서 접하지 않으므로

$p=-1$일 때는 [문제2-1]에서 교점은 $(-1,0)$ 하나뿐이고, $p<-1$일 때 만나지 않는다.



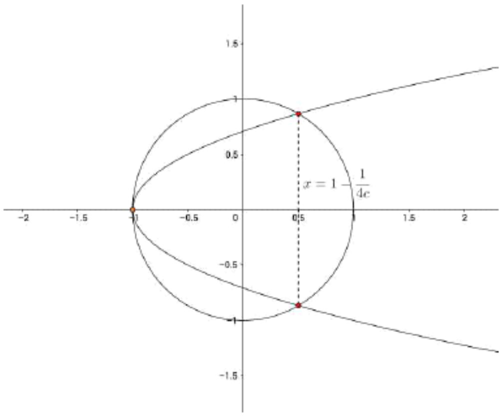
(b) $c>\dfrac{1}{8}$인 경우 : [문제2-2]에서 접점이 존재하려면 $c>\dfrac{1}{8}$이고 $p=-4c-\dfrac{1}{16c}$이다.

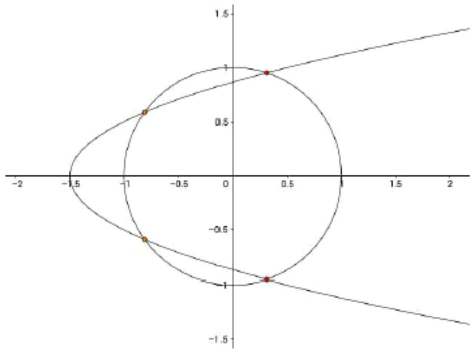
$p=-1$일 때 3개의 교점(접점 1개, 교점 2개)

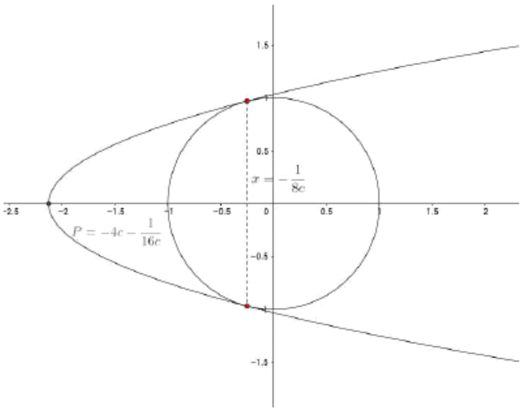
$-4c-\dfrac{1}{16c} < p < -1$ 일 때 4개의 교점

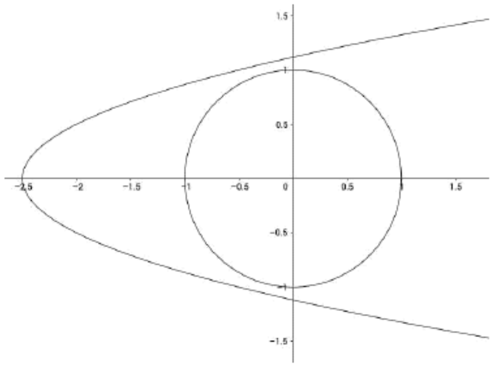
$p = -4c-\dfrac{1}{16c}$ 일 때 2개의 교점(접점)

$p < -4c-\dfrac{1}{16c}$ 일 때 만나지 않는다.









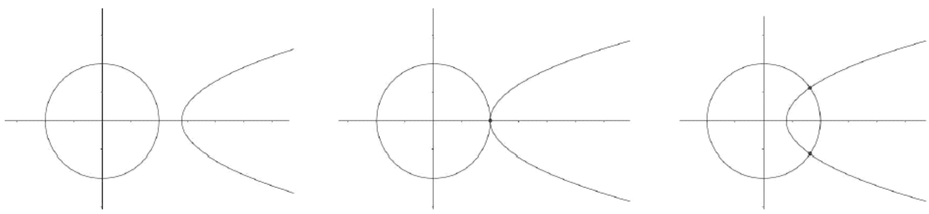
38 아주대학교(의학계) 수시[38)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생인 경우 해결할 수 있는 수준의 다양한 수학적 주제를 다룸.	국어, 수학가, 영어, 탐구(과탐) 등급합 5이내	수학(1문항, 문항별 세부문제 4문제) +생명과학	120분 중 60분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

이차곡선은 원, 타원, 쌍곡선, 포물선 등으로 원뿔을 평면으로 잘랐을 때의 단면에 나오는 곡선으로 원뿔곡선이라고도 한다. 이런 이차곡선들이 만나거나 접하는 장면을 알아보는 것은 흥미로운 일이다. 우리는 원과 포물선이 만나는 장면을 다음과 같이 정형화하여 알아보고자 한다.

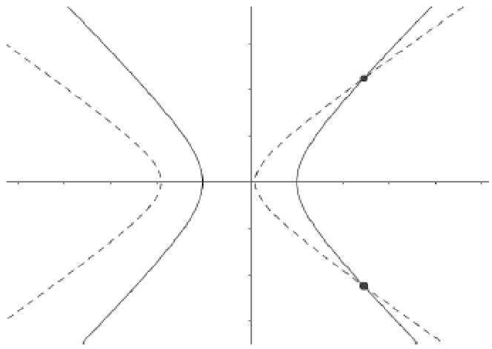
(가) 다음 그림과 같이 단위원 $x^2+y^2=1$과 포물선 $x-p=4cy^2$ $(c>0)$의 교점의 개수는 $p>1$, $p=1$, $-1<p<1$의 세 경우에는 어떤 $c>0$에 대해서도 각각 0, 1, 2이다.



$p>1$ $p=1$ $-1<p<1$

그러나 $p\le -1$인 경우는 p와 c의 관계에 따라 교점의 개수가 달라진다.

(나) 다음 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$과 쌍곡선 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$의 교점의 개수는 a, b, p에 따라 달라진다.



38) 아주대학교 홈페이지

[문제 1-1] (5점) 단위원 $x^2+y^2=1$과 포물선 $x+1=4cy^2$ $(c>0)$이 점 $(-1,0)$이 아닌 교점을 가질 c의 범위를 구하고 이때 교점의 좌표를 구하시오.

[문제 1-2] $p<-1$일 때, 단위원 $x^2+y^2=1$과 포물선 $x-p=4cy^2$ $(c>0)$이 접할 때 그 접점과 접점이 존재할 c, p에 관한 조건을 다음 과정을 통해 구해보자.

(1) (5점) $x=a$에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같도록 하는 a의 값을 구하시오.

(2) (5점) (1)에서 구한 a에 대하여 $|a|\le 1$이 될 c의 조건을 구하시오.

(3) (5점) $\left(a,\ \pm\sqrt{1-a^2}\right)$이 포물선 위의 점이 되도록 하는 p를 c에 관한 식으로 나타내시오.

[문제 1-3] (10점) $p\le -1$이라 하자. 단위원 $x^2+y^2=1$과 포물선 $x-p=4cy^2$ $(c>0)$의 교점의 개수를 c와 p에 따라 구하시오.

[문제 1-4] (20점) 쌍곡선 $x^2-y^2=1$과 쌍곡선 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이 접할 조건을 구하고, 이때 접점을 포함한 모든 교점의 개수를 구하시오.

• 풀어보기

문제1. 점 $(0, 3)$을 지나고 기울기가 m인 직선이 쌍곡선 $3x^2-y^2+6y=0$과 만나지 않는 m의 범위는? [3점] (2003년 12월 예비평가)

① $m \le -3$ 또는 $m \ge 3$ ② $m \le -3$ 또는 $m \ge \sqrt{3}$
③ $m \le -\sqrt{3}$ 또는 $m \ge \sqrt{3}$ ④ $-\sqrt{3} \le m \le \sqrt{3}$
⑤ $-3 \le m \le 3$

문제2. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{18}=1$과 직선 $y=ax+b$ (a, b는 상수)의 교점의 개수에 대한 설명 중 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? [3점] (2006년 10월 전국연합)

< 보 기 >

ㄱ. $a=-4$이고 $b=0$일 때 교점은 없다.
ㄴ. $a=3$이고 $b>0$일 때 교점은 1개이다.
ㄷ. $a=\dfrac{1}{3}$이고 $b<0$일 때 교점은 2개이다.

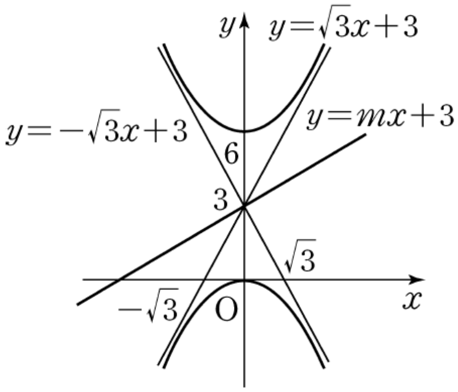
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④

쌍곡선 $3x^2-y^2+6y=0$을 표준형으로 고치면 $\frac{x^2}{3}-\frac{(y-3)^2}{9}=-1$이다.

이 쌍곡선의 점근선은 $\frac{x^2}{3}-\frac{(y-3)^2}{9}=0$에서 $y=\pm\sqrt{3}x+3$이다.



따라서 점 $(0,3)$을 지나고 기울기가 m인 직선이 쌍곡선과 만나지 않기 위해서는 위의 그림과 같아야 하므로

$$-\sqrt{3}\le m\le\sqrt{3}$$

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{18}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm 3x$이다.

ㄱ. $a=-4,\ b=0$이면 교점 0개

ㄴ. $a=3,\ b>0$이면 점근선과 평행이므로 교점 1개

ㄷ. $a=\frac{1}{3},\ b<0$이면 교점이 2개이다.

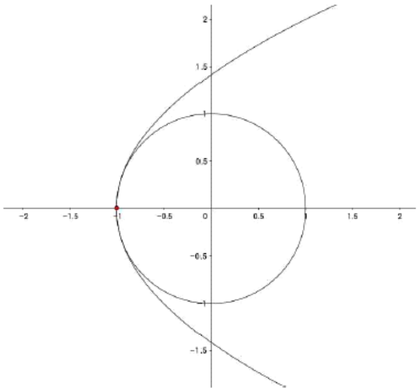
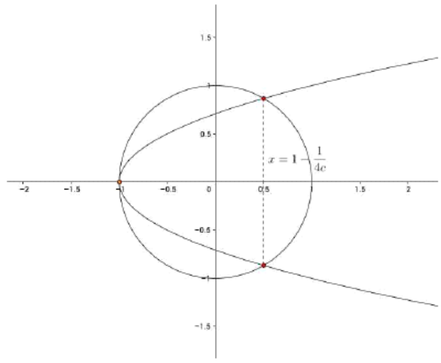
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[문항 1] 대학발표 예시답안 참고

[문제 1-1]

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+1=4cy^2 \end{cases}$$

를 연립하면 $x^2+\dfrac{x+1}{4c}=1$, 정리하면 $x^2+\dfrac{x}{4c}+\dfrac{1}{4c}-1=0$ 이고 $(x+1)\left(x-1+\dfrac{1}{4c}\right)=0$. 따라서 $x=1-\dfrac{1}{4c}$ 가 교점이 될 가능성이 있다. 교점이 되려면 $|x|\le 1$ 이어야 하므로 $c>\dfrac{1}{8}$ 을 얻는다. 이제 교점은 $\left(1-\dfrac{1}{4c},\ \pm\dfrac{\sqrt{8c-1}}{4c}\right)$

[문제 1-2]

(1) $x^2+y^2=1$ 에서 $y'=-\dfrac{x}{y}$, $x-p=4cy^2$ 에서 $y'=\dfrac{1}{8cy}$ 이다. 두 기울기가 같으려면 $-\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{8cy}$. 이제 $y\neq 0$ 이므로 $a=-\dfrac{1}{8c}$

(2) $a^2=\dfrac{1}{64c^2}\le 1$ 에서 $c\ge\dfrac{1}{8}$

$c=\dfrac{1}{8}$ 이면 $a^2=1$ 이므로 $x^2+y^2=1$ 에서 $y=\pm\sqrt{1-a^2}=\pm\sqrt{1-1}=0$

그러나 $a-p=4cy^2=4c\times 0^2=0$ 이므로 $a=p<-1$

이는 모순이므로 $c>\dfrac{1}{8}$ 이다.

(3) $y^2=1-a^2=1-\dfrac{1}{64c^2}=\dfrac{64c^2-1}{64c^2}>0$ 에서 $y=\pm\dfrac{\sqrt{64c^2-1}}{8c}$ 이므로 접점의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{8c},\ \pm\dfrac{\sqrt{64c^2-1}}{8c}\right)$ 이고 이 좌표를 $x-p=4cy^2$ 에 대입하면

$$-\frac{1}{8c}-p=4c\times\frac{64c^2-1}{64c^2}=\frac{64c^2-1}{16c}=4c-\frac{1}{16c}$$

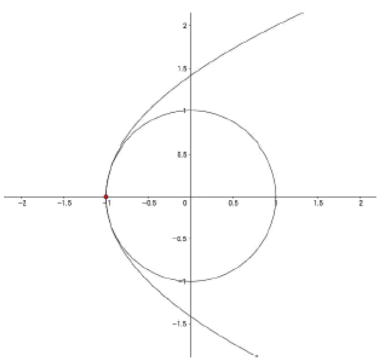
따라서 $p=-4c-\dfrac{1}{8c}+\dfrac{1}{16c}=-4c-\dfrac{1}{16c}$

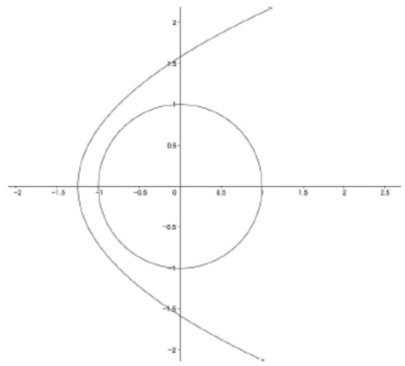
이제 (1), (2), (3)의 결과를 종합하면 접점이 존재하려면 $c>\dfrac{1}{8}$ 이고 $p=-4c-\dfrac{1}{16c}$ 이다.

[문제 1-3]

(a) $c \le \frac{1}{8}$ 인 경우 : [문제2-2]에서 두 점에서 접하지 않으므로

$p = -1$일 때는 [문제2-1]에서 교점은 $(-1, 0)$ 하나뿐이고, $p < -1$일 때 만나지 않는다.





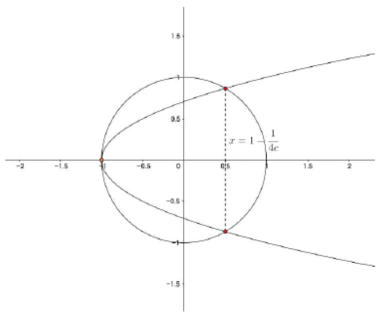
(b) $c > \frac{1}{8}$ 인 경우 : [문제2-2]에서 접점이 존재하려면 $c > \frac{1}{8}$ 이고 $p = -4c - \frac{1}{16c}$ 이다.

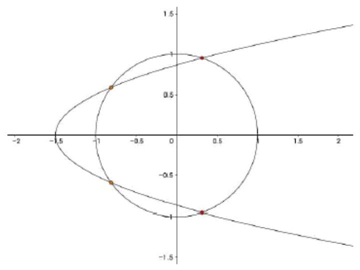
$p = -1$일 때 3개의 교점(접점 1개, 교점 2개)

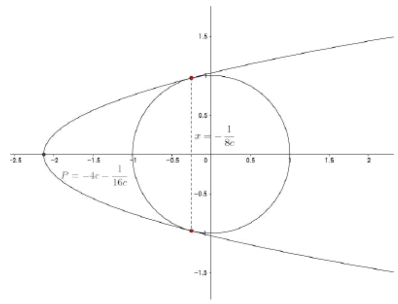
$-4c - \frac{1}{16c} < p < -1$일 때 4개의 교점

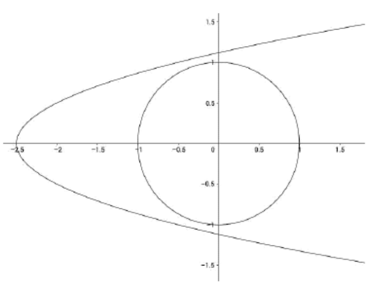
$p = -4c - \frac{1}{16c}$ 일 때 2개의 교점(접점)

$p < -4c - \frac{1}{16c}$ 일 때 만나지 않는다.









[문제 1-4]

[풀이1] 두 쌍곡선은 주축이 같으므로 $x=\pm1$, $y=0$에서 접하는 경우를 생각한다.

$\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하면 $(\pm1-p)^2=a^2$. 따라서 다음의 네 가지 경우에만 접하게 된다.

$$p=1+a,\ p=1-a,\ p=-1+a,\ p=-1-a$$

$x^2-y^2=1$의 점근선은 $y=\pm x$이고, $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 점근선은 $y=\pm\dfrac{b}{a}(x-p)$임을 참고하면서 다음과 같이 경우를 나눈다.

[경우1] $p=-1+a$

(ⅰ) $\dfrac{b}{a}<1$일 때, $p+a<1$이면 3개 , $p+a=1$이면 2개, $p+a>1$이면 1개

(ⅱ) $\dfrac{b}{a}=1$일 때, $a\neq1$이면 1개, $a=1$이면 무한개

(ⅲ) $\dfrac{b}{a}>1$일 때, $p+a<1$이면 1개*, $p+a=1$이면 2개, $p+a>1$이면 3개

(*는 $b^2<a<b$이면 3개, $a\leq b^2$이면 1개, [풀이2] 참조)

[경우2] $p=1-a$

(ⅰ) $\dfrac{b}{a}<1$일 때, $p-a<-1$이면 3개 , $p-a=-1$이면 2개, $p-a>-1$이면 1개

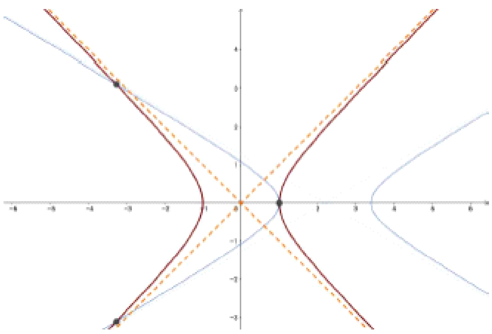
(ⅱ) $\dfrac{b}{a}=1$일 때, $a\neq1$이면 1개, $a=1$이면 무한개

(ⅲ) $\dfrac{b}{a}>1$일 때, $p-a>-1$이면 1개*, $p-a=-1$이면 2개, $p-a>-1$이면 3개

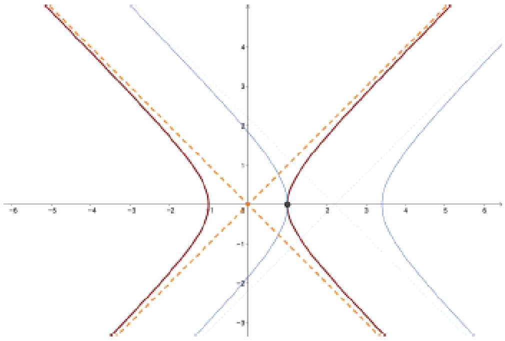
(*는 $b^2<a<b$이면 3개, $a\leq b^2$이면 1개, [풀이2] 참조)

[경우3] $p=1+a$

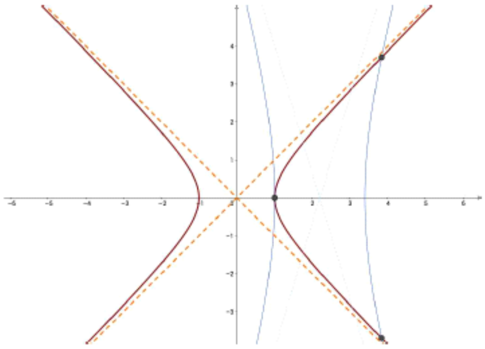
(ⅰ) $\dfrac{b}{a}<1$일 때, 3개



(ii) $\frac{b}{a}=1$일 때, 1개



(iii) $\frac{b}{a}>1$일 때, 3개



[경우4] $p=-1-a$

(i) $-\frac{b}{a}>-1$일 때, 3개

(ii) $-\frac{b}{a}=-1$일 때, 1개

(iii) $-\frac{b}{a}<-1$일 때, 3개

위의 결과를 정리하면 다음과 같다.

		$b<a$	$a=b$	$a<b$
$p=a-1$ 또는 $p=1-a$	$a<1$	3	1	1 또는 3
	$a=1$	2	무한개	2
	$a>1$	1 또는 3	1	3
$p=a+1$ 또는 $p=-1-a$		3	1	3

[풀이2] 두 쌍곡선은 주축이 같으므로 $x=\pm1$, $y=0$에서 접하는 경우를 생각한다.

$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하면 $(\pm1-p)^2=a^2$. 따라서 다음의 네 가지 경우에만 접하게 된다.

$$p=1+a,\ p=1-a,\ p=-1+a,\ p=-1-a$$

[경우1] $p=-1+a$

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ \dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

를 연립하기 위해($|x|\geq 1$임에 유의) $p=-1+a$를 대입 정리하면

$$\frac{(x+1-a)^2}{a^2}-\frac{x^2-1}{b^2}=1$$

여기에서 $(b^2-a^2)x^2+2b^2(1-a)x+a^2+b^2-2ab^2=0$.

$(x+1)((b^2-a^2)x+(a^2+b^2-2ab^2))=0$. 이제 $x=-1$, $x=\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{a^2-b^2}$

(i) $\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{a^2-b^2}>1$이면 교점의 개수는 3 (이때 $1<a<b$이거나 $b<a<1$)

(ii) $\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{a^2-b^2}=1$이면 교점의 개수는 2 (이때 $a=1$)

(iii) $-1\leq\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{a^2-b^2}<1$이면 교점의 개수는 1 (이때 $a>b, a>1, a\geq b^2$ 또는 $a<b, a<1, a\leq b^2$)

(iv) $\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{a^2-b^2}<-1$이면 교점의 개수는 3 (이때 $b<a<b^2$ 또는 $b^2<a<b$)

[경우2] $p=1-a$

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ \dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

를 연립하기 위해($|x|\geq 1$임에 유의) $p=1-a$를 대입 정리하면 $\dfrac{(x-1+a)^2}{a^2}-\dfrac{x^2-1}{b^2}=1$.

여기에서 $(b^2-a^2)x^2+2b^2(a-1)x+a^2+b^2-2ab^2=0$.

$(x+1)((b^2-a^2)x-(a^2+b^2-2ab^2))=0$. 이제 $x=-1$, $x=\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{b^2-a^2}$

(i) $\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{b^2-a^2}>1$이면 교점의 개수는 3 (이때 $b^2<a<b$이거나 $b<a<b^2$)

(ii) $\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{b^2-a^2}=1$이면 교점의 개수는 1 (이때 $a=b^2$)

(iii) $-1<\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{b^2-a^2}<1$이면 교점의 개수는 1 (이때 $a>b, a>1, a>b^2$ 또는 $a<b$, $a<1$, $a<b^2$)

(iv) $\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{b^2-a^2}=-1$ 이면 교점의 개수는 2 (이때 $a=1$)

(v) $\dfrac{a^2+b^2-2ab^2}{b^2-a^2}<-1$ 이면 교점의 개수는 3 (이때 $1<a<b$ 또는 $b<a<1$)

[경우3] $p=1+a$

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ \dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

를 연립하기 위해($|x|\geq 1$ 임에 유의) $p=1+a$를 대입 정리하면 $\dfrac{(x-1-a)^2}{a^2}-\dfrac{x^2-1}{b^2}=1$.

여기에서 $(b^2-a^2)x^2-2b^2(1+a)x+a^2+b^2+2ab^2=0$.

$(x-1)((b^2-a^2)x-(a^2+b^2+2ab^2))=0$. 이제 $x=1$, $x=\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}$

$b>a$ 이면 $\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}=\dfrac{b^2-a^2+2a^2+2ab^2}{b^2-a^2}=1+\dfrac{2a^2+2ab^2}{b^2-a^2}>1$

$b<a$ 이면 $\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}=\dfrac{-b^2+a^2+2b^2+2ab^2}{b^2-a^2}=-1+\dfrac{2b^2+2ab^2}{b^2-a^2}<-1$

(i) $\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}>1$ 이면 교점의 개수는 3 (이때 $b>a$)

(ii) $a=b$ 이면 교점의 개수는 1

(iii) $\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}<-1$ 이면 교점의 개수는 3 (이때 $b<a$)

[경우4] $p=-1-a$

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ \dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

를 연립하기 위해($|x|\geq 1$ 임에 유의) $p=-1-a$를 대입 정리하면

$$\frac{(x+1+a)^2}{a^2}-\frac{x^2-1}{b^2}=1$$

여기에서 $(b^2-a^2)x^2+2b^2(1+a)x+a^2+b^2+2ab^2=0$.

$(x+1)((b^2-a^2)x-(a^2+b^2+2ab^2))=0$. 이제 $x=-1$, $x=\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}$

$b>a$ 이면 $\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}=\dfrac{b^2-a^2+2a^2+2ab^2}{b^2-a^2}=1+\dfrac{2a^2+2ab^2}{b^2-a^2}>1$

$b<a$ 이면 $\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}=\dfrac{-b^2+a^2+2b^2+2ab^2}{b^2-a^2}=-1+\dfrac{2b^2+2ab^2}{b^2-a^2}<-1$

(i) $\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}>1$ 이면 교점의 개수는 3 (이때 $b>a$)

(ii) $a=b$ 이면 교점의 개수는 1

(iii) $\dfrac{a^2+b^2+2ab^2}{b^2-a^2}<-1$ 이면 교점의 개수는 3 (이때 $b<a$)

위의 결과를 정리하면 다음과 같다.

		$b<a$	$a=b$	$a<b$
$p=a-1$ 또는 $p=1-a$	$a<1$	3	1	1 또는 3
	$a=1$	2	무한개	2
	$a>1$	1 또는 3	1	3
$p=a+1$ 또는 $p=-1-a$		3	1	3

[풀이3] (나침반 풀이)

두 쌍곡선은 주축이 같으므로 $x=\pm1$, $y=0$에서 접하는 경우를 생각한다.

$\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하면 $(\pm1-p)^2=a^2$. 따라서 다음의 네 가지 경우에만 접하게 된다.

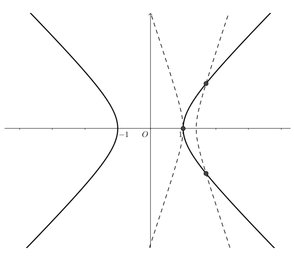
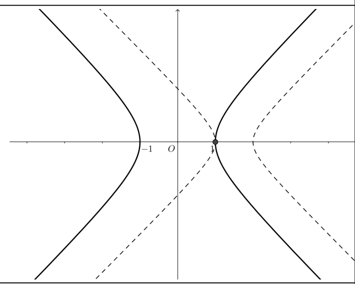
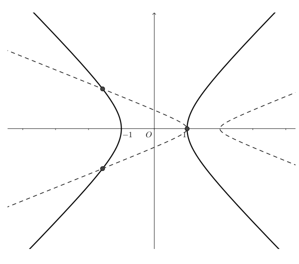
$$p=1+a,\ p=1-a,\ p=-1+a,\ p=-1-a \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

쌍곡선 $x^2-y^2=1$과 쌍곡선 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$의 점근선의 방정식은 각각

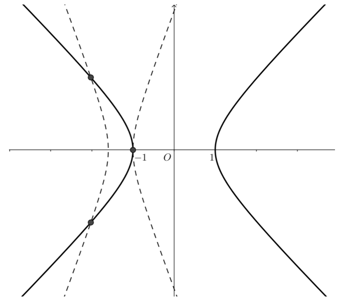
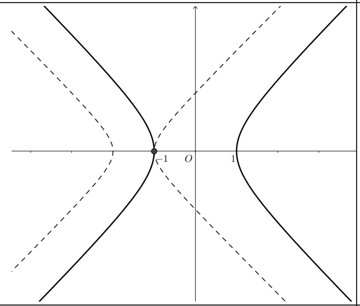
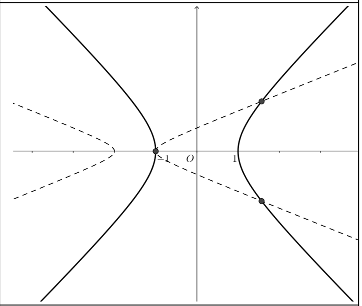
$$y=\pm x, \quad y=\pm\frac{b}{a}x$$

이므로 $(*)$의 각 경우에 대해 그래프와 교점의 수를 생각해 보면 다음과 같다.

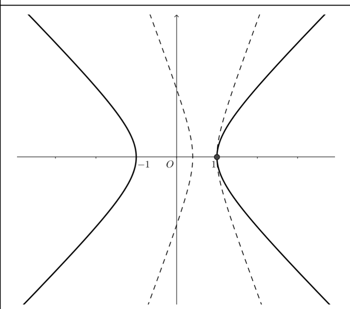
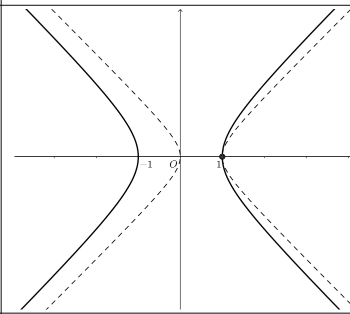
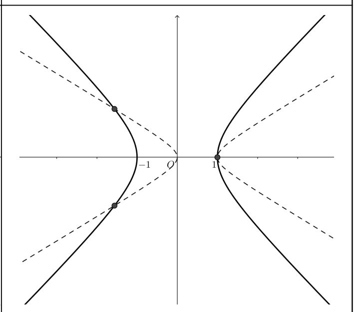
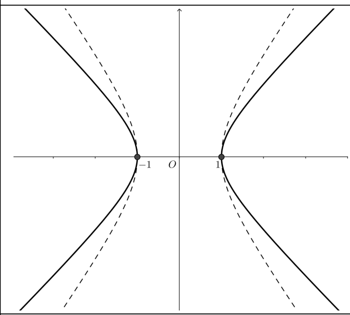
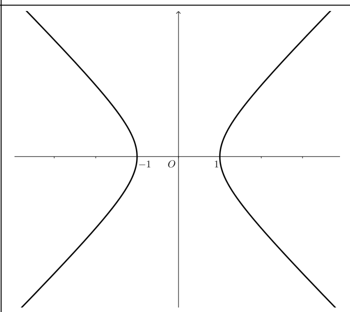
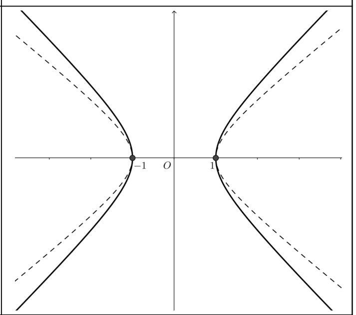
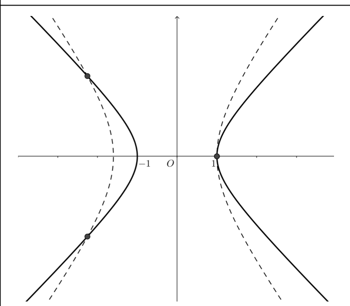
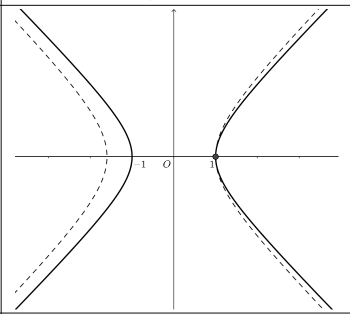
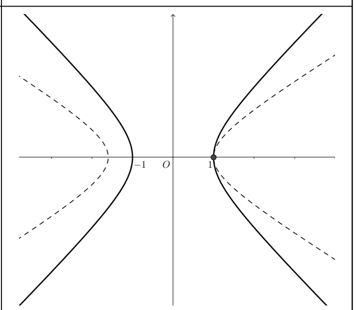
(i) $p=1+a$

a,b 관계	$\dfrac{b}{a}>1$ 즉, $b>a$	$\dfrac{b}{a}=1$ 즉, $b=a$	$\dfrac{b}{a}<1$ 즉, $b<a$
그래프개형			
교점의 개수	3	1	3

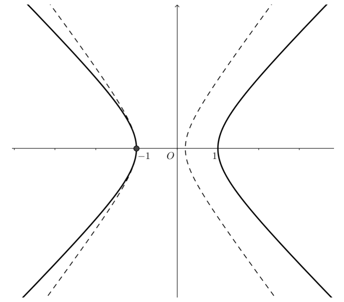
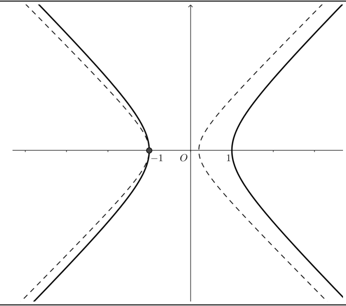
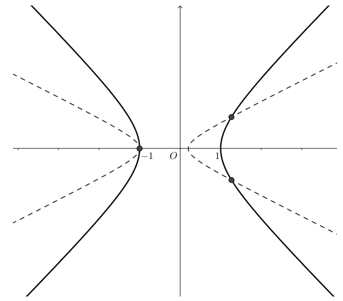
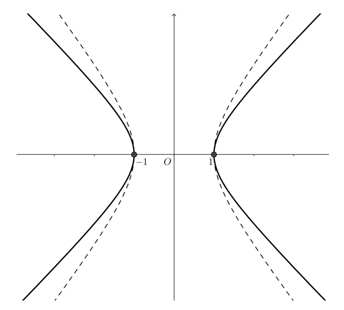
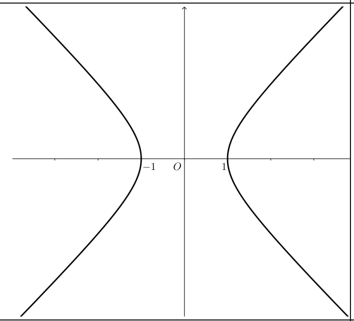
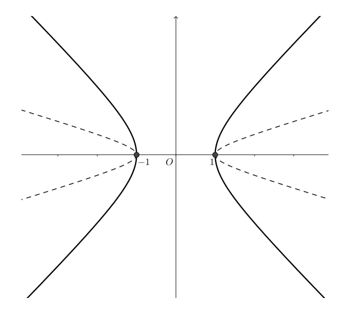
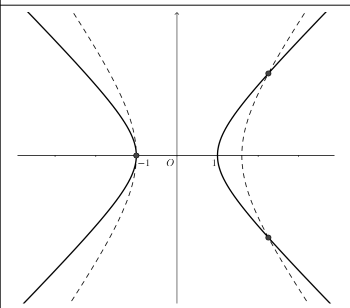
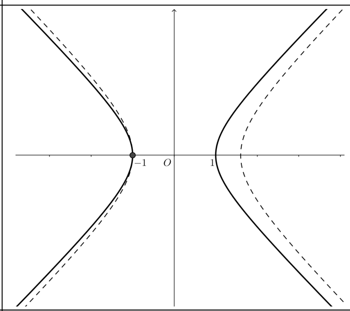
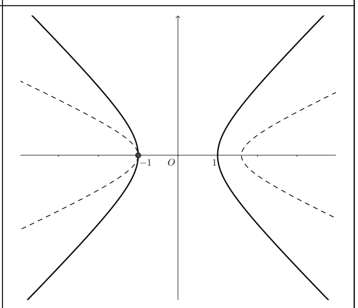
(ⅱ) $p=-1-a$

a,b 관계	$\frac{b}{a}>1$ 즉, $b>a$	$\frac{b}{a}=1$ 즉, $b=a$	$\frac{b}{a}<1$ 즉, $b<a$
그래프 개형			
교점의 개수	3	1	3

(ⅲ) $p=1-a$

a,b 관계	$\frac{b}{a}>1$ 즉, $b>a$	$\frac{b}{a}=1$ 즉, $b=a$	$\frac{b}{a}<1$ 즉, $b<a$
그래프개형 $a<1$			
교점의 개수	1	1	3
그래프개형 $a=1$			
교점의 개수	2	무한개	2
그래프개형 $a>1$			
교점의 개수	3	1	1

(ⅳ) $p= -1+a$

a,b 관계	$\dfrac{b}{a}>1$ 즉, $b>a$	$\dfrac{b}{a}=1$ 즉, $b=a$	$\dfrac{b}{a}<1$ 즉, $b<a$
그래프개형 $a<1$			
교점의 개수	1	1	3
그래프개형 $a=1$			
교점의 개수	2	무한개	2
그래프개형 $a>1$			
교점의 개수	3	1	1

39 연세대학교 수시[39)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
타원의 방정식, 직선의 방정식, 함수의 최대 최소, 정적분의 계산, 경우의 수, 중복조합	국어, 수학(가), 과학(2개 과목) 4개 영역 등급 합 8 이내 & 영어 2등급, 한국사 4등급 이내(의예·치의예 별도)	수학 (3문항, 9문제)	120분

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

좌표평면 위의 세 점 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 주어져 있다 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=1$은 주어진 삼각형에 내접해 있다. 이 타원의 넓이는 πab이다.

[1-1] 제시문의 조건을 만족하는 a와 b의 관계식과 범위를 구하시오. [5점]

[1-2] 타원의 넓이가 최대가 되도록 하는 b의 값을 구하시오. [5점]

[1-3] 타원의 넓이가 $\dfrac{3}{16}\pi$가 되도록 하는 a의 값을 모두 구하시오. [5점]

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} k(x-m)^2(x-3m)^2 & (|x-2m|\le m) \\ 0 & (|x-2m|>m) \end{cases}$$

(단, k와 m은 양의 실수이다.)

39) 연세대학교 홈페이지

[2-1] 정적분 $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구하시오. [7점]

[2-2] 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)$의 최댓값을 구하시오. [7점]

[2-3] $0 < m \le \frac{1}{4}$일 때, $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2018}$이고 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)$의 최댓값이 2018이 되도록 하는 k와 m의 값을 구하시오. [7점]

[문항 3] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

김연세는 정육면체 모양의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수에 따라 1층부터 10층 사이를 이동하는 놀이를 한다.
첫 번째 시행에서는 주사위를 던져서 나온 눈의 수와 같은 층으로 간다.
두 번째부터는 다음 규칙에 따라서 놀이가 끝날 때까지 주사위 던지기를 반복 시행한다.
[규칙] 김연세가 n층에 있을 때, 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 m이라고 하자.

1. $n+m < 10$이면 $n+m$층으로 간다.
2. $n+m > 10$이면 $10-(n+m-10)$층으로 간다.
3. $n+m = 10$이면 놀이가 끝난다.

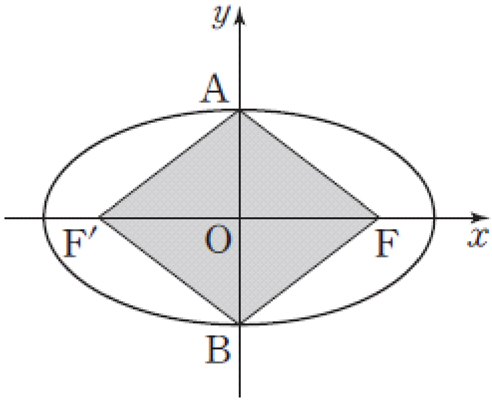
[3-1] 주사위를 세 번 이하로 던져서 놀이가 끝나는 경우의 수를 구하시오. [7점]

[3-2] 주사위를 네 번 던져서 놀이가 끝났다고 하자. 놀이가 끝나기 전까지 규칙 1만 적용된 경우의 수를 구하시오. [7점]

[3-3] 주사위를 네 번 던져서 놀이가 끝나는 경우의 수를 구하시오. [10점]

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 10인 타원이 y축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 사각형 $\mathrm{AF'BF}$의 넓이의 최댓값은? (단, $c>0$)



① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

문제2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1 xf(x^2+1)dx=3,\quad \int_0^1 f(2x+1)dx=5$$

일 때, $\int_2^3 f(x)dx$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

문제3. 숫자 1이 적혀 있는 4개의 같은 모양의 구슬과 숫자 0이 적혀 있는 3개의 같은 모양의 구슬이 있다. 그림과 같이 번호가 적혀 있는 7개의 칸에 7개의 구슬을 한 칸에 한 개씩 넣으려고 한다. 자연수 n $(n=1, 2, 3, \cdots, 6)$에 대하여 n번 칸에 넣은 구슬에 적혀 있는 수와 $n+1$번 칸에 넣은 구슬에 적혀 있는 수의 곱을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{6} a_n=2$를 만족시키도록 7개의 칸에 7개의 구슬을 넣는 경우의 수는?
(단, 같은 숫자가 적혀 있는 구슬끼리는 구별하지 않는다.)

1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하자.

타원의 장축의 길이가 10이므로 $2a=10$, $a=5$이다.

사각형 $\mathrm{AF'BF}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2c\times 2b=2bc$이다.

초점의 좌표가 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$이므로

$$a^2-b^2=c^2,\ b^2+c^2=25$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$b^2+c^2\geq 2\sqrt{b^2c^2}\ \text{(단, 등호는 } b=c\text{일 때 성립)}$$

$$25\geq 2bc$$

따라서 사각형 $\mathrm{AF'BF}$의 넓이의 최댓값은 25이다.

{참고} 사각형 $\mathrm{AF'BF}$는 둘레의 길이가 일정하고 마름모이므로 정사각형일 때 넓이가 최대이다.

풀어보기(문제2) 정답 ⑤

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 xf(x^2+1)dx=\int_1^2\frac{1}{2}f(t)dt=3$$

즉, $\int_1^2 f(t)dt=\int_1^2 f(x)dx=6$

한편, $2x+1=s$로 놓으면 $2=\frac{ds}{dx}$이고 $x=0$일 때 $s=1$, $x=1$일 때 $s=3$이므로

$$\int_0^1 f(2x+1)dx=\int_1^3\frac{1}{2}f(s)ds=5$$

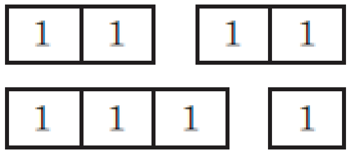
즉, $\int_1^3 f(s)ds=\int_1^3 f(x)dx=10$

따라서

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(x)dx&=\int_1^3 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx\\&=10-6\\&=4\end{aligned}$$

풀어보기(문제3) 정답 ②

$\sum_{n=1}^{6} a_n = 2$를 만족시키기 위해서는 6개의 a_n $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots 6)$의 값 중 2개가 1이어야 한다. 즉, 숫자 1이 적혀 있는 구슬이 들어 있는 칸과 숫자 1이 적혀 있는 구슬이 들어 있는 칸이 이웃한 곳이 두 번 나타나야한다. 이와 같은 경우는 그림과 같이 숫자 1이 적혀 있는 구슬이 들어있는 칸 4개를 2개의 칸씩 묶은 2묶음으로 나누어 서로 이웃하지 않게 하거나 3개의 칸, 1개의 칸으로 나눈 2묶음이 서로 이웃하지 않게 하는 2가지 경우가 있다.



(i) 2개의 칸씩 묶은 2묶음이 서로 이웃하지 않게 하는 경우

먼저 숫자 0이 적혀 있는 3개의 구슬이 들어 있는 칸을 배열하고, 맨 앞쪽과 맨 뒤쪽, 숫자 0이 적혀 있는 구슬이 들어 있는 칸과 숫자 0이 적혀 있는 구슬이 들어 있는 칸 사이의 4곳 중 서로 다른 2곳에 2묶음으로 된 숫자 1이 적혀 있는 구슬이 들어 있는 2개의 칸을 각각 배열하면 되므로

$${}_4\mathrm{C}_2 = 6$$

(ii) 3개의 칸, 1개의 칸으로 나눈 2묶음이 서로 이웃하지 않게 하는 경우

먼저 숫자 0이 적혀 있는 3개의 구슬이 들어 있는 칸을 배열하고, 맨 앞쪽과 맨 뒤쪽, 숫자 0이 적혀 있는 구슬이 들어 있는 칸과 숫자 0이 적혀 있는 구슬이 들어 있는 칸 사이의 4곳 중 서로 다른 2곳에 2묶음으로 된 숫자 1이 적혀 있는 구슬이 들어 있는 3개, 1개의 칸을 각각 배열하면 되므로

$${}_4\mathrm{P}_2 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6+12=18$$

나침반 예시답안

[문항1]

[1-1] 주어진 삼각형에 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=1$이 내접해 있고 타원의 중심의 y좌표가 b이므로 $0<b<1$이다. 또한 타원의 넓이가 πab이므로 $a>0$이다.

주어진 삼각형과 타원을 모두 y축 방향으로 $-b$만큼 평행이동하면 $y=x+1-b$와 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 접해야 한다. 기울기가 1이고 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선의 방정식은 $y=x\pm\sqrt{a^2+b^2}$ 이므로

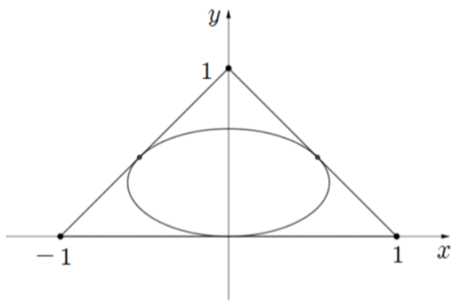
$$1-b=\sqrt{a^2+b^2}\,,\ a^2=1-2b$$

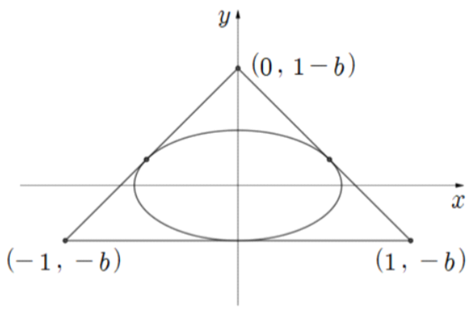
이다. 여기서 $a^2>0$이므로 $b<\dfrac{1}{2}$이다. 한편 $0<b<1$이므로 $0<b<\dfrac{1}{2}$이다. 또한 $a^2=1-2b$이고 $a>0$이므로

$$0<b<\frac{1}{2},\ 0<\frac{1-a^2}{2}<\frac{1}{2},\ 0<a^2<1,\ 0<a<1$$

이다.

한편 주어진 삼각형과 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=1$ 모두 y축 대칭인 도형이고 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=1$이 x축에 접한다. 그러므로 $a^2=1-2b$, $0<a<1$, $0<b<\dfrac{1}{2}$이면 제시문의 조건을 만족한다.





[1-2] 제시문에 의해서 타원의 넓이는

$$\pi ab=\pi a\left(\frac{1-a^2}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(a-a^3)$$

이다. $f(a)=\dfrac{\pi}{2}(a-a^3)$이라 하면 $f'(a)=\dfrac{\pi}{2}(1-3a^2)$이고 $0<a<1$이므로 $a=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$에서 $f(a)=\dfrac{\pi}{2}(a-a^3)$는 최댓값을 가진다. 한편 $a=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$이면 $a^2=1-2b$에서 $b=\dfrac{1}{3}$이다. 따라서 타원의 넓이가 최대가 되도록 하는 b의 값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

[1-3] 타원의 넓이가 $\frac{3}{16}\pi$가 되려면

$$\pi ab = \pi a\left(\frac{1-a^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(a-a^3) = \frac{3}{16}\pi,\ 8(a-a^3)=3,$$

$$8a^3-8a+3=0,\ (2a-1)(4a^2+2a-3)=0$$

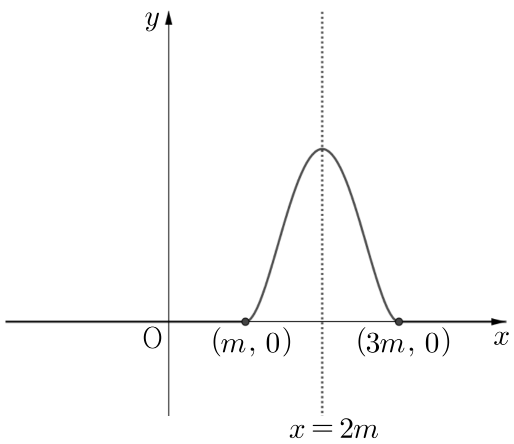
이어야 한다. 그러므로 $a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$ 이다. 그런데 $0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$ 이다.

[문항2]

[2-1] $k(x-m)^2(x-3m)^2=k\{(x-m)(x-3m)\}^2$ 이므로 함수

$$f(x)=\begin{cases} k(x-m)^2(x-3m)^2 & (|x-2m|\le m) \\ 0 & (|x-2m|>m) \end{cases}$$

에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



그러므로 $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구해보면

ⅰ) $0<m\le\frac{1}{3}$ 일 때

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_m^{3m} k(x-m)^2(x-3m)^2dx = \int_{-m}^{m} k(t+m)^2(t-m)^2dt \qquad (t=x-2m)$$

$$=k\int_{-m}^{m}(t^4-2m^2t^2+m^4)dt = 2k\int_0^m(t^4-2m^2t^2+m^4)dt$$

$$=2k\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}m^2t^3+m^4t\right]_0^m = 2k\left(\frac{1}{5}m^5-\frac{2}{3}m^5+m^5\right)$$

$$=\frac{16}{15}km^5$$

ii) $\frac{1}{3}<m<1$일 때

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_m^1 k(x-m)^2(x-3m)^2dx=\int_0^{1-m} kt^2(t-2m)^2dt \qquad (t=x-m)$$

$$=k\int_0^{1-m}(t^4-4mt^3+4m^2t^2)dt$$

$$=k\left[\frac{1}{5}t^5-mt^4+\frac{4}{3}m^2t^3\right]_0^{1-m}$$

$$=k\left\{\frac{1}{5}(1-m)^5-m(1-m)^4+\frac{4}{3}m^2(1-m)^3\right\}$$

iii) $m\geq 1$일 때

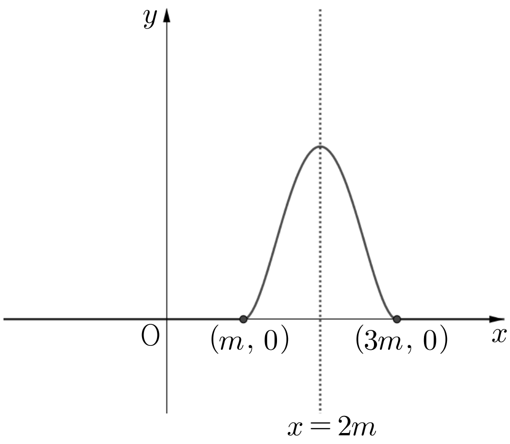
$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 0\,dx=0$$

이다.

[2-2] $k(x-m)^2(x-3m)^2=k\{(x-m)(x-3m)\}^2$ 이므로 함수

$$f(x)=\begin{cases} k(x-m)^2(x-3m)^2 & (|x-2m|\leq m) \\ 0 & (|x-2m|>m) \end{cases}$$

는 $x=2m$에서 최댓값 $f(2m)=km^4$을 가지며 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이제 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)$의 최댓값을 구해보자.

i) $0<m\leq\frac{1}{2}$ $(0<2m\leq 1)$ 일 때 $f(2m)=km^4$이 최댓값이 된다.

ii) $\frac{1}{2}<m\leq 1$ $(1<2m\leq 2)$ 일 때 $f(1)=k(1-m)^2(1-3m)^2$이 최댓값이 된다.

iii) $m>1$일 때 $(2m>2)$ 일 때 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=0$이므로 최댓값이 0이다.

[2-3] 위 [2-1]에 의해서 $0<m\le\frac{1}{4}$ 일 때, $\int_0^1 f(x)dx=\frac{16}{15}km^5$ 이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2018},\ \frac{16}{15}km^5=\frac{1}{2018}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

[2-2]에 의해서 $0<m\le\frac{1}{4}$ 일 때, $f(x)$의 최댓값이 km^4 이므로

$$km^4=2018\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

두 방정식 (1), (2)를 이용해서 k, m의 값을 구해보면

$$\frac{16}{15}\times 2018m=\frac{1}{2018},\ m=\frac{15}{1009^2\times 2^6},\ k\left(\frac{15}{1009^2\times 2^6}\right)^4=2018,\ k=\frac{1009^9\times 2^{25}}{15^4}$$

이다. 따라서 $k=\frac{1009^9\times 2^{24}}{15^4}$, $m=\frac{15}{1009^2\times 2^6}$ 이다.

[문항3]

[3-1] 주사위의 눈이 1부터 6까지 있으므로 주사위를 한 번 던져서 놀이가 끝나는 경우는 없다.
첫 번째와 두 번째 눈의 수의 합이 10인 경우는 주사위를 두 번 던져서 놀이가 끝나고 그 경우는 $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$의 3가지이다.
첫 번째와 두 번째 눈의 수의 합이 11 또는 12일 때 세 번째에서 놀이가 끝나는 경우는 $(5, 6, 1)$, $(6, 5, 1)$, $(6, 6, 2)$의 3가지이다.
첫 번째와 두 번째 눈의 수의 합이 3이하인 경우는 세 번째에서 놀이가 끝날 수 없다.
첫 번째와 두 번째 눈의 수의 합이 4이상 9이하인 경우는 두 주사위를 던져서 나오는 36가지 경우 중 10이상이 나오는 경우 $(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$의 6가지와 3이하가 나오는 경우 $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ 3가지를 제외한 27가지이다. 이 경우는 세 번째 눈의 수와 먼저 나온 두 눈의 수의 합이 10이 되는 세 번째 눈의 수가 꼭 한 가지씩 있다. 그러므로 이 경우의 수는 27이다.
따라서 주사위를 세 번 이하로 던져서 놀이가 끝나는 경우의 수는 33이다.

[3-2] 첫 번째 부터 네 번째까지의 주사위의 눈의 수를 각각 x, y, z, w라고 하자. 이때 규칙 1만 적용되어 네 번 만에 놀이가 끝나려면 $x+y+z+w=10$이 되면 된다. x, y, z, w 모두 1이상 10이하의 자연수이어야 하므로 구하는 경우의 수는 $x'+y'+z'+w'=6$인 0이상 5이하인 정수 x', y', z', w'의 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수와 같다. 그러므로 구하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_6-4={}_9\mathrm{C}_6-4={}_9\mathrm{C}_3-4=80$이다.

[3-3] 첫 번째부터 네 번째까지의 주사위의 눈의 수를 각각 x, y, z, w라고 하자. 주사위를 네 번 던져서 놀이가 끝나는 경우는 규칙 1만 적용되어 끝나는 경우, 규칙 2가 한 번 적용되어 끝나는 경우, 규칙 2가 두 번 적용되어 끝나는 경우로 분류할 수 있다.
규칙 1만 적용되어 끝나는 경우의 수는 [3-2]에 의해서 80이다. 규칙 2가 한 번 적용되

어 끝나는 경우는 ⅰ) $x+y>10$이고 $10-(x+y-10)+z+w=10$인 경우와 ⅱ) $x+y<10$, $x+y+z>10$, $10-(x+y+z-10)+w=10$인 경우로 다시 분류할 수 있다. 또한 규칙 2가 두 번 적용되어 끝나는 경우는 ⅲ) $x+y>10$, $10-(x+y-10)+z>10$, $10-\{10-(x+y-10)+z-10\}+w=10$인 경우이다.

ⅰ) $x+y>10$이고 $10-(x+y-10)+z+w=10$인 경우
$(6,6,1,1)$ 한 가지 밖에 없다.
ⅱ) $x+y<10$, $x+y+z>10$, $10-(x+y+z-10)+w=10$인 경우
(이것은 $x+y<10$, $x+y+z=10+w$인 경우와 같다)

$x+y<10$	경우의 수	$x+y<10$, $x+y+z=10+w$인 경우의 수
9	4	$4\times5=20$
8	5	$5\times4=20$
7	6	$6\times3=18$
6	5	$5\times2=10$
5	4	$4\times1=4$

그러므로 그 경우의 수는 72이다.
ⅲ) $x+y>10$, $10-(x+y-10)+z>10$, $10-\{10-(x+y-10)+z-10\}+w=10$인 경우
(이것은 $x+y>10$, $x+y+w=10+z$인 경우와 같다.)

$x+y>10$	경우의 수	$x+y>10$, $x+y+w=10+z$인 경우의 수
11	2	$2\times5=10$
12	1	$1\times4=4$

그러므로 그 경우의 수는 14이다.

따라서 [3-2]와 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 구하는 경우의 수는 $80+1+72+14=167$이다.

40 이화여자대학교(자연계) 모의[40)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	있음 (국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 2개 영역 등급 합 4 이내)	수학(3문항)	100분

[문항 1]

자연수 m을 2018 이하의 짝수 중에서 선택하고, 자연수 n은 2018 이하의 3의 배수 중에서 선택할 때, 각 m, n에 대하여 삼차함수가 아래와 같이 주어져 있다.

$$f(x) = 2x^3 - 3(m+n)x^2 + 6(m^2+n^2-mn)x + 1$$

이때, $f'(x) = 0$이 실근을 갖도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [20점]

40) 이화여자대학교 홈페이지

[문항 2]

정적분의 정의에 의해 임의의 양의 실수 x에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$$

다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 위의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

(2) 문제 (1)의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$$

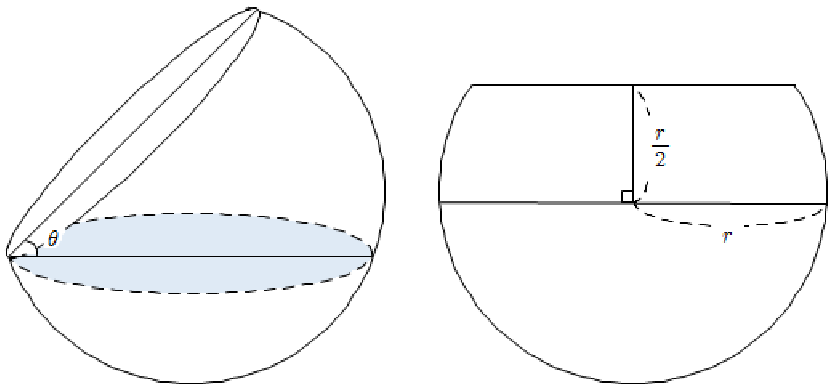
(3) 문제 (1)과 문제 (2)의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

(4) 문제 (3)의 부등식을 이용하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$임을 보이시오.

[문항 3]

아래 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구에서 윗부분이 $\frac{r}{2}$인 위치가 잘린 모양의 그릇에 물이 가득 담겨 있다. 아래 왼쪽 그림과 같이 그릇을 θ의 각도로 기울였을 때, 그릇에 남아 있는 물의 부피를 $V(\theta)$라고 하자. 다음 물음에 답하시오. [40점]



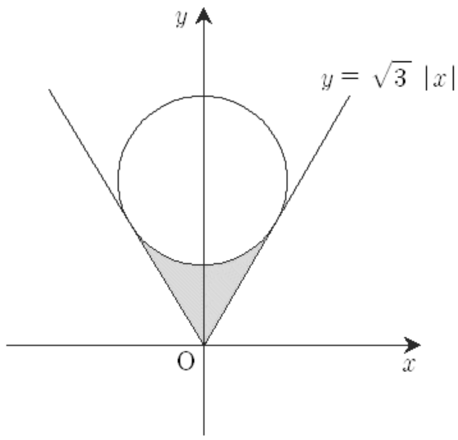
(1) 그릇에 남아 있는 물의 부피 $V(\theta)$를 r과 θ의 식으로 나타내시오.

(2) 그릇에서 쏟아진 물의 부피 $W(\theta)$의 변화율 $\frac{dW}{d\theta}$가 최대가 되는 θ를 구하고, 이때까지 쏟아진 물의 부피를 구하시오.

• 풀어보기

문제1. 곡선 $y=-2x^2+3x$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2018 대수능 나형)

문제2. 함수 $y=\sqrt{3}\,|x|$의 그래프와 원 $x^2+(y-a)^2=1\ (a>0)$이 서로 접하고 있다. 아래 그림에서 어두운 영역을 y축 둘레로 회전시켰을 때 얻어지는 입체의 부피는 $\dfrac{q}{p}\pi$이다. 이 때, $p+q$의 값은? (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) (2007. 10월 학평)



① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 14

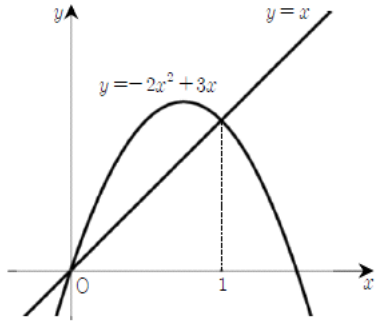
• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 4

$-2x^2+3x=x$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 곡선 $y=-2^2+3x$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는 0, 1이고 곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$는 그림과 같다.

구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S&=\int_0^1\{(-2x^2+3x)-x\}dx \\ &=\int_0^1(-2x^2+2x)dx \\ &=-\frac{2}{3}+1 \\ &=\frac{1}{3} \end{aligned}$$



따라서 $p+q=3+1=4$

풀어보기(문제2) 정답 ①

원의 중심 $(0,\ a)$에서 직선 $y=\sqrt{3}\,|\,x\,|$ 까지의 거리가 1이기 때문에 $a=2$이다.

원 $x^2+(y-2)^2=1$ 과 직선 $y=\sqrt{3}x$을 연립하여 구한 교점의 y좌표는 $\frac{3}{2}$이다.

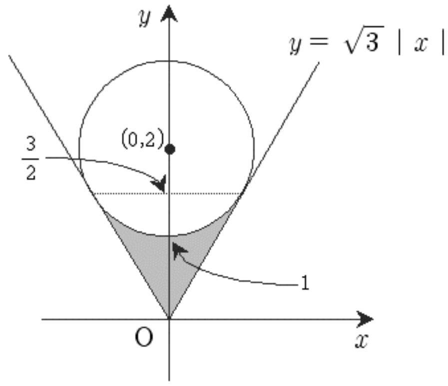
직선 $y=\sqrt{3}x$과 y축 및 직선 $y=\frac{3}{2}$으로 둘러싸인 영역을 y축을 둘레로 회전하여 얻은 도형의 부피를 V_1이라 두면,

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{y^2}{3}dy=\frac{3}{8}\pi$$

원 $x^2+(y-2)^2=1$ 과 직선 $y=\frac{3}{2}$로 둘러싸인 영역 중 작은 부분을 y축을 둘레로 회전하여 얻은 도형의 부피를 V_2라 두면,

$$V_2=\pi\int_1^{\frac{3}{2}}(1-(y-2)^2\ )dy=\pi\left[-3y+2y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_1^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{24}\pi$$

그러므로 어두운 영역을 y축을 둘레로 회전하여 얻은 입체의 부피 V는 $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}$이고, $p+q=7$이다.



[문항1] 대학발표 예시답안

이차방정식 $f'(x)=6x^2-6(m+n)x+6(m^2+n^2-mn)=0$이 실근을 갖기 위해서 판별식 D는 $D\geq 0$을 만족해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} D &= (m+n)^2-4(m^2+n^2-mn) \\ &= -3m^2+6mn-3n^2 \\ &= -3(m-n)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $m=n$일 때 실근이 존재한다. m은 2의 배수, n은 3의 배수이므로 2018 이하의 6의 배수들을 찾으면 된다.

$(6,6), (12,12), (18,18), \cdots, (2016,2016)$으로 $\left[\frac{2018}{6}\right]=336$개다.

[문항2] 대학발표 예시답안

(1) 주어진 부등식 $\frac{1}{x+1}<\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{x}$에서 $\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt$을 적분하면,

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt &= \ln(x+1)-\ln x \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

이다. 그러므로 부등식 $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$ 이 성립한다.

(2) (1)의 부등식 $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$ 에서 각 항에 x를 곱하여

부등식 $\frac{x}{x+1}<x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{x}{x}=1$을 얻을 수 있다. 이를 정리하면,

$\frac{x}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\frac{x}{x}=1$이다.

$e^{\frac{x}{x+1}} < e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} < e^1$ 에서 $e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\ln e} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 이므로

부등식 $e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$은 성립한다.

(3) (2)의 부등식에서 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 이므로, 임의의 양수 x에 대하여 $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 성립함을 보이면 된다.

(2)의 부등식 $e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 의 양변에 $e^{\frac{1}{x+1}}$ 을 곱하여 $e^{\frac{1}{x+1}} \times e^{\frac{x}{x+1}} < e^{\frac{1}{x+1}} \times \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 을 얻는다.

(1)의 부등식 $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 에서 $e^{\frac{1}{x+1}} < e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1+\frac{1}{x}$ 을 얻는다. 이 부등식의 양변에 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 를 곱하여 정리하면, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \times e^{\frac{1}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \times \left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 성립한다. 즉, $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이다.

그러므로 부등식 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 성립한다.

[다른 풀이]

(2)의 부등식에서 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ 이므로, 임의의 양수 x에 대하여 $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 성립함을 보이면 된다.

(1) 의 부등식 $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ 에서 각 항에 $x+1$를 곱하여

부등식 $\frac{x+1}{x+1} = 1 < (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x+1}{x}$ 을 얻을 수 있다. 이를 정리하면,

$1 < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} < \frac{x+1}{x}$ 이다.

$e^1 < e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}} < e^{\frac{x+1}{x}}$ 에서 $e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}} = \left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\right\}^{\ln e} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이므로

부등식 $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} < e^{\frac{x+1}{x}}$ 은 성립한다.

즉, $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이다.

그러므로 부등식 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 성립한다.

(4) (2)와 (3)의 부등식에서 $e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$을 얻는다. 이 부등식의 극한을 취하면,

$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{x+1}} \le \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le e$ 이다. $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$ 이므로 함수의 극한의 대소관계에 의해

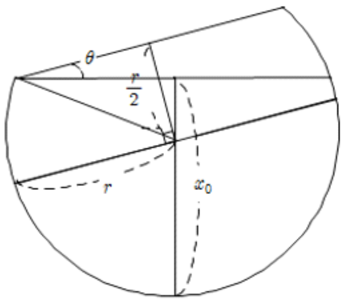
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$가 성립함을 알 수 있다.

[문항3] 대학발표 예시답안

(1)

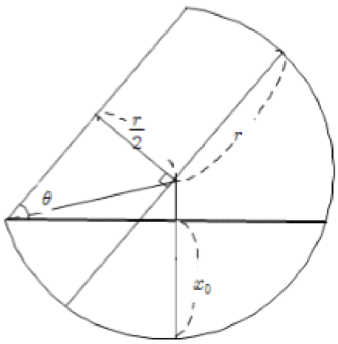
ⅰ) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ 인 경우, 그릇에 담긴 물의 깊이는 $x_0 = r + r\sin\varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{6} - \theta$ 이다. 이때, 그릇에 담긴 물의 부피 $V(\theta)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
V(\theta) &= \int_{-r\sin\varphi}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\
&= \pi\left\{r^2(r + r\sin\varphi) - \frac{1}{3}\left(r^3 - (-r\sin\varphi)^3\right)\right\} \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\{3(1+\sin\varphi) - (1+\sin^3\varphi)\} \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\{2 + 3\sin\varphi - \sin^3\varphi\} \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\left\{2 + 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right\}
\end{aligned}
$$



ⅱ) $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$ 인 경우, 그릇에 담긴 물의 깊이는 $x_0 = r - r\sin\omega$, $\omega = \theta - \frac{\pi}{6}$ 가 된다. 이때, 그릇에 담긴 물의 부피 $V(\theta)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
V(\theta) &= \int_{r\sin\omega}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\
&= \pi\left\{r^2(r - r\sin\omega) - \frac{1}{3}\left(r^3 - r^3\sin^3\omega\right)\right\} \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\{3(1-\sin\omega) - (1-\sin^3\omega)\} \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\{2 - 3\sin\omega + \sin^3\omega\} \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\left\{2 - 3\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\}
\end{aligned}
$$



따라서 그릇에 담긴 물의 부피는

$V(\theta) = \frac{\pi}{3}r^3\left\{2 - 3\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\}$, $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$ 가 된다.

(2) 그릇의 기울어진 각도가 θ일 때, 그릇에서 쏟아진 물의 양 $W(\theta)=\frac{9\pi}{8}r^3-V(\theta)$이 된다. 따라서 각도 θ에 대한 쏟아진 물의 양의 변화율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}W(\theta) &= -\frac{d}{d\theta}\frac{\pi}{3}r^3\left\{2-3\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^3\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= -\pi r^3\left\{-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= \pi r^3\cos^3\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$0\le\cos(\theta-\frac{\pi}{6})\le 1$이므로, 이 구간에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, $\frac{d}{d\theta}W(\theta)=\pi r^3$으로 최대이다. 한편, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때까지 쏟아진 물의 부피는 $W\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{9\pi}{8}r^3-V\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{9\pi}{8}r^3-\frac{2\pi}{3}r^3=\frac{11\pi}{24}r^3$이다.

41 이화여자대학교(자연Ⅰ) 수시[41)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정	2개영역 등급 합 4이내	수학(3문항, 6문제)	100분

[1] 함수 $f(\theta)=-\frac{2}{3}(\cos^3\theta-\sin^3\theta)+3(\cos\theta-\sin\theta)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.[30점]

(1) 실수 θ에 대하여 $t=\cos\theta+\sin\theta$라 할 때, $f'(\theta)$를 t에 관한 다항식으로 나타내시오.

(2) 함수 $f(\theta)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

[2] 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 각각

$$f(x)=x^3+6nx+2n,\ g(x)=3nx^2+3x+n^2+4$$

이다. 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 서로 다른 교점의 개수가 2이상인 자연수 n을 모두 구하시오. [30점]

[3] 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)a_n$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) $a_4=\dfrac{1}{2^3\sin\frac{\pi}{2^4}}$ 임을 보이시오.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

41) 이화여자대학교 홈페이지

• 풀어보기

문제1. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(2018 대입 평가원)

> ㄱ. $f(x)=x^3$이면, 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
> ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
> ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

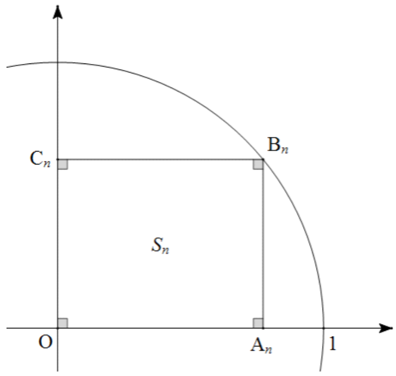
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제2. 그림과 같은 단위원에서 점 A_n, B_n, C_n을 잡고 S_n을 $\square OA_nB_nC_n$의 넓이라 하자.

a_n을 $\overline{OA_n}$과 $\overline{OC_n}$ 중 긴 것이라 하자.

$$a_1=\cos\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right),\ S_n=2S_{n+1}a_n$$

일 때 다음 물음에 답하여라. (2013. 고려대 면접)



(1) a_n과 a_{n+1}의 관계식을 구하여라.

(2) a_n을 구하여라.

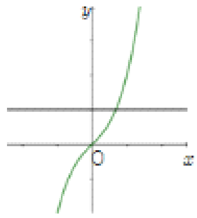
(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n\times\cdots\times a_1)$은?

• 예시답안

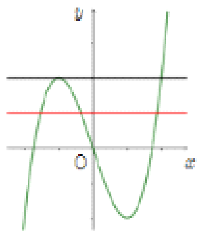
풀어보기(문제1) 정답 ③

실수 t에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-x+t$의 교점의 개수는 두 곡선 $y=f(x)+x$와 $y=t$의 교점의 개수와 동일하다. $h(x)=f(x)+x$라 하면 $h(x)$도 삼차함수이다.

ㄱ. $h(x)=x^3+x$를 미분하면 $h'(x)=3x^2+1>0$이므로 $h(x)$는 증가함수이다.
따라서 $y=t$와의 교점은 항상 1개다. 즉 $g(t)=1$이므로 $g(t)$는 상수함수이다. (참)



ㄴ. $g(1)=2$일 때, $f(x)$의 최고차항이 양수이면 $y=h(x)$와 $y=t$의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $g(t)=3$인 경우가 존재한다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우도 마찬가지다. (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=x^3-x$라 하면 $h(x)=x^3$은 증가함수이므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$이다. 그런데 함수 $f(x)$는 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서 극값을 갖는다. (거짓)
따라서 참은 ㄱ, ㄴ이다.

풀어보기(문제2)

(1)

$S_n=a_n\sqrt{1-a_n^2}\ (n\geq 1)$과 $S_n=2S_{n+1}a_n$에서

$$a_n\sqrt{1-a_n^2}=2a_{n+1}\sqrt{1-a_{n+1}^2}\ a_n$$

이다. 양변을 제곱하면

$$1-a_n^2=4a_{n+1}^2-4a_{n+1}^4$$

이고 $(2a_{n+1}^2-1)^2=a_n^2$이므로

$$2a_{n+1}^2 - 1 = a_n \ (n \geq 1)$$

이다.

(2)

$2a_{n+1}^2 - 1 = a_n \ (n \geq 1)$ 에서

$$a_{n+1}^2 = \frac{1+a_n}{2} \ (n \geq 1)$$

이고 $a_1 = \cos\theta$에서

$$a_2 = \cos\frac{1}{2}\theta, \ a_3 = \cos\frac{1}{2^2}\theta, \ \dots, \ a_n = \cos\frac{1}{2^{n-1}}\theta$$

이다.

(3)

$S_n = 2S_{n+1}a_n$에서 $2a_n = \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$ 이므로

$$2a_1 \times \cdots \times 2a_n = \frac{S_1}{S_2} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{S_1}{S_{n+1}}$$

이고

$$a_1 \times \cdots \times a_n = \frac{1}{2^n} \times \frac{S_1}{S_{n+1}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{\cos\theta \times \sin\theta}{\cos\frac{1}{2^n}\theta \times \sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \times \cdots \times a_1) = \frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$

이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

(1)

삼각함수의 미분법과 합성함수의 미분법에 의해, 도함수는 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta\cos\theta - 3(\cos\theta + \sin\theta) \\ &= (2\cos\theta\sin\theta - 3)(\cos\theta + \sin\theta) \end{aligned}$$

$t^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta = 1 + 2\cos\theta\sin\theta$를 이용하여 도함수를 t에 대한 다항식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f'(\theta) = (t^2 - 4)t = t^3 - 4t$$

(2)

$t=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$이므로 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ 이다.

(1)에서 구한 결과에서 $f'(\theta)=f'(t)=t^3-4t=0$을 만족하는 t의 값은 0 뿐이다.
따라서 $t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ 또는 $t=0$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.
함수 $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수 이고, 실수 전체에서 미분가능하다. 따라서 $[0,2\pi)$ 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 찾으면 된다.

$t=-\sqrt{2}$일 때 $\theta=\frac{5\pi}{4}$, $t=\sqrt{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$, $t=0$일 때 $\theta=\frac{3\pi}{4}$, $\theta=\frac{7\pi}{4}$이므로 이 값을

$f(\theta)=-\frac{2}{3}(\cos^3\theta-\sin^3\theta)+3(\cos\theta-\sin\theta)$에 대입하면

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)+3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)+3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이다. 그러므로 함수 $f(\theta)$의 최댓값은 $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ 이고, 최솟값은 $-\frac{8}{3}\sqrt{2}$ 이다.

(대학발표 예시답안)
함수 $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수이고, 실수 전체에서 미분가능하다. 따라서 $[0,2\pi)$ 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 찾으면 된다.
한편 함수 $f(x)$는 극값을 갖는 점에서 최댓값, 최솟값을 갖는다.

$t^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta\le 2$에서
삼각함수의 덧셈정리 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\alpha=\beta$이면, $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$를 적용하면
$t^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin2\theta\le 2$이므로, $t^2-4<0$이고,
$f'(\theta)=t(t^2-4)=0$의 필요충분조건은 $t=\cos\theta+\sin\theta=0$이다.
$t=0$일 때, $t^2=1+\sin2\theta=0$이고, $\sin2\theta=-1$이다.
함수 $f(\theta)$는 따라서 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 그리고 $\frac{7\pi}{4}$에서 극값을 갖는다. 극값은 다음과 같이 계산된다.

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)+3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

따라서, 함수 $f(\theta)$의 최댓값은 $\frac{8}{3}\sqrt{2}$이고, 최솟값은 $-\frac{8}{3}\sqrt{2}$이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

$h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3nx^2+3(2n-1)x-n^2+2n-4$라 하면, 삼차식 $h(x)=0$이 두 개 이상의 근을 갖기 위해서는 $h(x)$의 극댓값이 0보다 크거나 같고(크고) 극솟값이 0보다 작아야(작거나 같아야) 한다.
한편,

$$h'(x)=3x^2-6nx+6n-3=3(x-1)(x-2n+1)=0$$

이므로, 극점은 $x=1$이거나 $x=2n-1$이다.

n은 자연수이므로 $2n-1 \geq 2-1=1$이 성립한다. 따라서 삼차식 $h(x)=0$이 두 개 이상의 근을 갖기 위해서는 삼차함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고 $x=2n-1$에서 극솟값을 가져야 한다.
극댓값이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$h(1)=1-3n+6n-3-n^2+2n-4=-n^2+5n-6 \geq 0$$

즉, $n^2-5n+6=(n-2)(n-3) \leq 0$이 성립한다. 따라서 $2 \leq n \leq 3$을 만족하는 자연수이다.
즉, $n=2$이거나 $n=3$이다. 한편 극솟값은

$$\begin{aligned} h(2n-1) &= (2n-1)^3-3n(2n-1)^2+3(2n-1)^2-n^2+2n-4 \\ &= -(2n-1)^2(n-2)-n(n-2)-4 \end{aligned}$$

이므로, $n=2$인 경우는 $h(3)=-4$이고, $n=3$인 경우는 $h(5)=-32<0$이 되어 두 경우 모두 극솟값이 0보다 작다.
결론적으로 $n=2$이거나 $n=3$인 경우만 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 두 점 이상에서 만난다.

[문항3] 대학발표 예시답안

(1)
주어진 조건으로부터 제4항 a_4는 아래와 같이 표현된다.

$$a_4=\cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)a_1$$

여기에 $a_1=1$과 삼각함수의 덧셈정리
($\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\alpha=\beta$이면, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$)를 적용하면

$$a_4=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2^4}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}=\frac{1}{2^3\sin\left(\frac{\pi}{2^4}\right)}$$

이 성립한다.

(2)

(i) $n=1$일 때 $a_1=\dfrac{1}{2^0\sin\dfrac{\pi}{2^1}}=\dfrac{1}{1}=1$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 수식이 성립한다고 가정하자.
즉,

$$a_k=\frac{1}{2^{k-1}\sin\dfrac{\pi}{2^k}}$$

이 경우 위에 주어진 수식은 $a_{k+1}=\left(\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}\right)a_k$와 결합하여 다음의 관계식을 얻는다.

$$a_{k+1}=\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}{2^{k-1}\sin\dfrac{\pi}{2^k}}$$

여기에서 삼각함수의 덧셈정리
($\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\alpha=\beta$이면, $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$)를 적용하면 수식

$$a_{k+1}=\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\cdot\frac{1}{2^k\sin\dfrac{\pi}{2^{k+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}=\frac{1}{2^k\sin\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}$$

을 얻는다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$ 임을 알 수 있다.

(3)

a_{n+1}의 수식을 아래처럼 변형한다.

$$a_{n+1}=\frac{1}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2}{\pi}\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

그리고 극한 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$을 이용하면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{\pi}$ 임을 알 수 있다.

42 이화여자대학교(자연Ⅱ) 수시[42)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정	2개영역 등급 합 4이내	수학(3문항, 6문제)	100분

[1] 함수 $f(\theta)=-\frac{2}{3}(\cos^3\theta-\sin^3\theta)+3(\cos\theta-\sin\theta)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.[20점]

(1) 실수 θ에 대하여 $t=\cos\theta+\sin\theta$라 할 때, $f'(\theta)$를 t에 관한 다항식으로 나타내시오.
(2) 함수 $f(\theta)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

[2] 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)a_n$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) $a_4=\dfrac{1}{2^3\sin\frac{\pi}{2^4}}$ 임을 보이시오.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

[3] 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 각각

$$f(x)=2x^3-3x^2+20n\ ,\ g(x)=3nx^2-6nx+4n^2+28$$

이다. 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 서로 다른 교점의 개수가 2이상인 자연수 n을 모두 구하시오.

(2) 위 (1)의 조건을 만족하는 자연수 n에 대하여 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

42) 이화여자대학교 홈페이지

• 예시답안

[문항1] 대학발표 예시답안

[1] 자연 I 의 [문항1]과 동일한 문제이므로 자연 I 의 해설 참조

[문항2] 대학발표 예시답안

[2] 자연 I 의 [문항3]과 동일한 문제이므로 자연 I 의 해설 참조

[문항3] 대학발표 예시답안

[3]-(1)

$$h(x)=f(x)-g(x)=2x^3-3(n+1)x^2+6nx-4n^2+20n-28$$

라 하면, 삼차방정식 $h(x)=0$이 두 개 이상의 근을 갖기 위해서는 $h(x)$의 극댓값이 0보다 크거나 같고(크고) 극솟값이 0보다 작아야(작거나 같아야) 한다. 한편

$$h'(x)=6x^2-6(n+1)x+6n=6(x-1)(x-n)=0$$

이므로, 극값을 갖는 점은 $x=1$이거나 $x=n$이다.
n은 자연수이므로 $n \geq 1$이 성립한다. 따라서 삼차방정식 $h(x)=0$이 두 개 이상의 근을 갖기 위해서는 삼차함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고 $x=n$에서 극솟값을 가져야 한다.
극댓값이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$h(1)=2-3(n+1)+6n-4n^2+20n-28=-4n^2+23n-29 \geq 0$$

즉, $4n^2-23n+29 \leq 0$이 성립한다. 따라서 n은 $\dfrac{23-\sqrt{65}}{8} \leq n \leq \dfrac{23+\sqrt{65}}{8}$를 만족하는 자연수이다. 즉, $n=2$이거나 $n=3$이다. 이 경우 극댓값 $h(1)=\begin{cases}1, n=2\\4, n=3\end{cases}$이 되어 0보다 크다.
한편 극솟값은

$$\begin{aligned}h(n)&=2n^3-3(n+1)n^2+6n^2-4n^2+20n-28\\&=-n^3-n^2+20n-28\\&=-(n-2)(n^2+3n-14)\end{aligned}$$

이므로, $n=2$인 경우는 $h(2)=0$ 이고, $n=3$인 경우는 $h(3)=-4<0$ 이 되어 두 경우 모두 극솟값이 0보다 작거나 같다. 결론적으로 $n=2$이거나 $n=3$인 경우만 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 두 점 이상에서 만난다.

[3]-(2)

(1)의 풀이에 의해 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 두 점 이상에서 만나는 자연수 n은 $n=2$이거나 $n=3$인 경우뿐이다. 한편 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $h(x)$

와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

(i) $n=2$인 경우,

$$h(x)=2x^3-9x^2+12x-4=(2x-1)(x-2)^2=0$$

이므로 근은 $x=\frac{1}{2}$, 2가 된다. 따라서 둘러싸인 도형의 넓이는

$$A(2)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2x^3-9x^2+12x-4)dx=\left[\frac{1}{2}x^4-3x^3+6x^2-4x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{27}{32}$$

이다.

(ii) $n=3$인 경우,

$$h(x)=2x^3-12x^2+18x-4=2(x-2)(x^2-4x+1)=0$$

이므로 근은 $x=2$, $2\pm\sqrt{3}$ 이 된다. 한편 둘러싸인 도형은 점$(2,0)$에 대한 점대칭이므로 넓이는

$$\begin{aligned}A(3)&=2\int_{2-\sqrt{3}}^{2}(2x^3-12x^2+18x-4)dx\\&=4\int_{2-\sqrt{3}}^{2}(x-2)(x^2-4x+1)dx\\&=4\int_{2-\sqrt{3}}^{2}(x-2)((x-2)^2-3)dx\\&=4\int_{-\sqrt{3}}^{0}x(x^2-3)dx\\&=4\int_{-\sqrt{3}}^{0}(x^3-3x)dx\\&=4\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0}\\&=9\end{aligned}$$

이다.

따라서 최댓값은 9이고, 최솟값은 $\frac{27}{32}$이다.

(다른 풀이) $n=3$인 경우,

$$h(x)=2x^3-12x^2+18x-4=2(x-2)(x^2-4x+1)=0$$

이므로 근은 $x=2$, $2\pm\sqrt{3}$ 이 된다. 따라서 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}A(3)&=\int_{2-\sqrt{3}}^{2}(2x^3-12x^2+18x-4)dx+\int_{2}^{2+\sqrt{3}}(-2x^3+12x^2-18x+4)dx\\&=2F(2)-F(2-\sqrt{3})-F(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

이고, 여기서 $F(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^3+9x^2-4x$ 이다.

한편 $\alpha=2\pm\sqrt{3}$ 은 $x^2-4x+1=0$의 근이므로

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=\frac{1}{2}\alpha^4-4\alpha^3+9\alpha^2-4\alpha\\&=\frac{1}{2}\alpha^2(\alpha^2-4\alpha)-2\alpha(\alpha^2-4\alpha)+\alpha^2-4\alpha\\&=-\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha-1\\&=-\frac{1}{2}(\alpha^2-4\alpha)-1=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$A(3)=2F(2)-F(2-\sqrt{3})-F(2+\sqrt{3})=8-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=9$$

이다. 따라서 최댓값은 9이고 최솟값은 $\frac{27}{32}$이다.

43 인하대학교 모의[43)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학 (3문항, 9문제)	120분

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$를 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

이다.

(나) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 A는 다음과 같다.

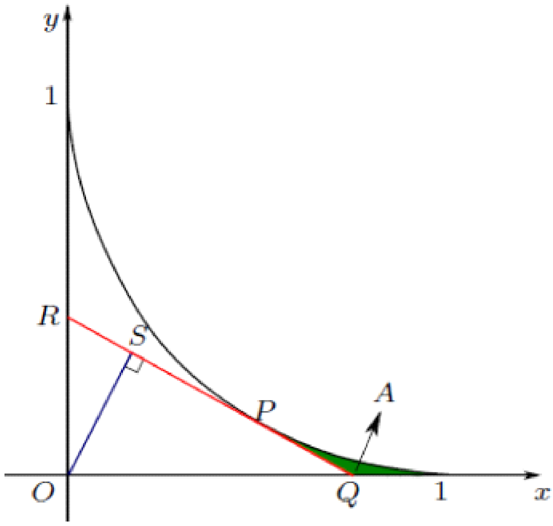
$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

(다) 한 점 (x_0, y_0)에서 직선 $ax+by+c=0$까지의 거리는 다음과 같다.

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(※) 음함수 $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 방정식이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R이라 하고 원점 O에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 S라 하자. 이 때, $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0$, x축, 접선으로 둘러싸인 도형을 A라 하자.

43) 인하대학교 홈페이지



(1-1) 음함수 $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1=0$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오. (5점)

(1-2) 선분 OQ의 길이와 OR의 길이의 합이 1로 일정함을 보이시오. (10점)

(1-3) 도형 A의 넓이가 $\dfrac{1}{162}$일 때, 선분 QR의 길이와 OS의 길이를 구하시오. (15점)

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

> **(가) (평균값정리)** 함수 $h(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면
> $$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(c)$$
> 인 c 가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.
>
> **(나) (사인함수의 덧셈정리)**
> $$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

(2-1) 함수 $h(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, 열린 구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여 $h'(0)=0$이면 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 상수함수임을 보이시오. (10점)

(2-2) 함수 $y=2\sin x+3\cos x$에 대하여 $y''+y=0$이 성립함을 보이시오. (여기서, $y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 이다.) (5점)

(2-3) 닫힌 구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 정의된 x에 대한 함수 y가 $y''+y=0$을 만족한다고 하자. 이 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를

$$\begin{cases} f(x)=y\cos x-y'\sin x \\ g(x)=y\sin x+y'\cos x \end{cases}$$

로 정의하자.

ⓐ 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 상수함수임을 보이시오. (5점)

ⓑ $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ 임을 보이시오. (여기서, c_1, c_2는 상수) (5점)

ⓒ $y(0)=1$, $y'(0)=2$일 때, 상수 c_1, c_2를 구하고 $y=r\sin(x+\alpha)$꼴로 나타내었을 때, r과 $\tan\alpha$의 값을 구하시오. (단, $r>0$, $0\le\alpha<2\pi$) (10점)

[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 이 구간에서의 극값과 양 끝점에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(나) x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 어떤 일정한 값에 수렴함이 알려져 있는데, 그 값을 e로 나타낸다. 이때 수 e는 무리수이고, 그 값은

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2.71828182845904\cdots$$

임이 알려져 있다. 무리수 e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 x의 자연로그라고 하며, 이것을 간단히 $\ln x$와 같이 나타낸다. 특히, $\ln 1=\log_e 1=0$, $\ln e=\log_e e=1$ 이다.

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

이다.

(라) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=L$, $\lim_{x\to a}g(x)=M\neq 0$ (L, M은 실수)일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M}$$

가 성립하고 함수 $h(x)$가 실수 a에서 극한값을 갖고, $h(x)>0$, $\lim_{x\to a}h(x)>0$이면 다음이 성립함이 알려져 있다.

$$\lim_{x\to a}\{\ln h(x)\}=\ln\left\{\lim_{x\to a}h(x)\right\}$$

(※) $0<a<\frac{1}{2}$을 만족하는 실수인 상수 a에 대하여, 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{\cos x}{\frac{1}{2}-a\sin x}$$

를 생각하자.

(3-1) 함수 $f(x)$의 최솟값을 a로 표현하시오. (15점)

(3-2) 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $S(a)$를 a로 표현하시오. (10점)

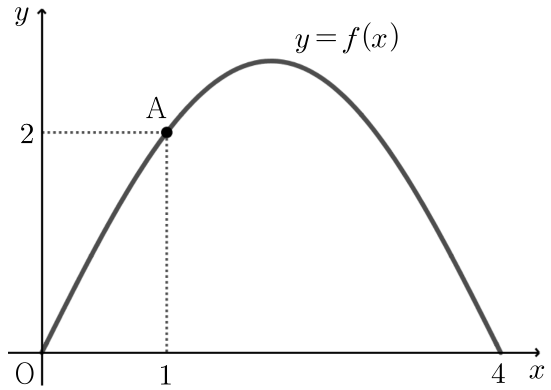
(3-3) $\lim_{a\to +0}S(a)$의 값을 구하시오. (10점)

• 풀어보기

문제1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)>0$ 이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$ $(t>0)$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B 라 하고, 점 A 를 지나고 점 A 에서의 접선과 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 C 라 하자. 모든 양수 t 에 대하여 삼각형 ABC 의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? (2017. 9월 모평)

① $e-2$ ② e ③ $e+2$ ④ $e+4$ ⑤ $e+6$

문제2. 닫힌 구간 $[0,\ 4]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 그림과 같고 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ 를 지난다. 일차함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은? (2015. 6월 모평)



① π ② $\pi+1$ ③ $\pi+2$ ④ $\pi+3$ ⑤ $\pi+4$

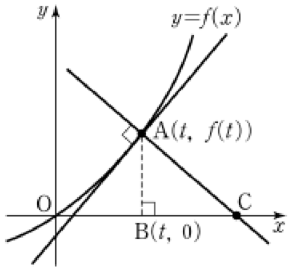
문제3. 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
(나) $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=\sin\pi x+1$이다.
(다) $1<x<2$일 때, $f'(x)\ge 0$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=p+\frac{q}{\pi}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) (2016. 전국연합)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ①



점 A$(t,\ f(t))$에서 x축에 내린 수선의 발은 B$(t,\ 0)$이고 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 방정식 $y=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$가 x축과 만나는 점은 C$(f'(t)f(t)+t,\ 0)$이다.

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}|f(t)f'(t)f(t)|\\&=\frac{1}{2}|\{f(t)\}^2f'(t)|\\&=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)\ \ (\because f'(x)>0)\\&=\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)\end{aligned}$$

따라서

$$f'(t)\{f(t)\}^2=e^t(e^t-1)^2$$

양변을 적분하면 $\dfrac{1}{3}f(t)^3=\dfrac{1}{3}(e^t-1)^3+C$이고 $f(0)=0$에서 $C=0$이다.

$$\{f(t)\}^3=(e^t-1)^3$$
$$\therefore f(t)=e^t-1$$

$y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1(e^x-1)dx=\Big[\ e^x-x\Big]_0^1=(e-1)-1=e-2$$

이다.

풀어보기(문제2) 정답 ③

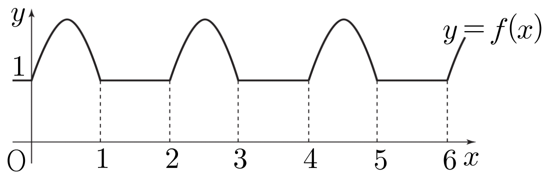
구간$[0,4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시키므로 일차함수 $g(x)$는 $(1,2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접해야 한다. $f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}x$이므로 $f'(1)=\dfrac{\pi}{2}$이다.

따라서 일차함수 $g(x)$의 그래프는 기울기가 $\dfrac{\pi}{2}$이고 점 $(1,2)$를 지나는 직선이므로

$g(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+2$ 이고 $g(3)=\pi+2$ 이다.

풀어보기(문제3) 정답 12

(가)와 (나)에서 $f(2)=f(0)=1$, $f(1)=1$이다. $1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 연속이고 $1<x<2$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 $f(x)=1$이다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x)dx &= 3\int_0^2 f(x)dx \\ &= 3\int_0^1(\sin\pi x+1)dx+3\int_1^2 dx \\ &= 3\times\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+x\right]_0^1+3 \\ &= 6+\frac{6}{\pi}\end{aligned}$$

따라서 $p=6$, $q=6$이고 $p+q=12$이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

(1-1)

합성함수의 미분법을 이용하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$$

이고 따라서

$$y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (\text{단, } x>0)$$

(별해) $y=(1-\sqrt{x})^2=1-2\sqrt{x}+x$ 이므로 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{x}}+1=-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(1-2)

논제 (1-1)에 의해 $\mathrm{P}\left(a,\ (1-\sqrt{a})^2\right)$에서의 접선의 기울기가

$$y'_{x=a}=-\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(1-\sqrt{a})^2=-\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}(x-a)$$

이다.
따라서, x축과 교점의 x좌표는 $x=\sqrt{a}$이고 y축과 교점의 y좌표는 $y=1-\sqrt{a}$이므로 선분 OQ의 길이와 OR의 길이의 합은 항상 1로 일정하다.

(1-3) 논제 (1-2)에 의해 $\mathrm{P}\left(a,\ (1-\sqrt{a})^2\right)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{1-\sqrt{a}}=1$$

이고 $\mathrm{Q}(\sqrt{a},\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 1-\sqrt{a})$이다.
따라서, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{a+(1-\sqrt{a})^2}$ 이고 제시문 (다)에 의해 원점에서 접선까지의 거리 $\overline{\mathrm{OS}}$는

$$\overline{\mathrm{OS}}=\frac{\sqrt{a}-a}{\sqrt{a+(1-\sqrt{a})^2}}$$

이다.
한편, 도형 A의 넓이는 정적분을 이용하여 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A&=\int_a^1(1-2\sqrt{x}+x)dx-\frac{1}{2}(\sqrt{a}-a)(1-\sqrt{a})^2 \\ &=\int_a^1(1-2\sqrt{x}+x)dx-\frac{1}{2}\sqrt{a}(1-\sqrt{a})^3 \\ &=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}a\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}=\frac{1}{6}(1-\sqrt{a})^3 \end{aligned}$$

$A=\dfrac{1}{162}$ 이므로 $a=\dfrac{4}{9}$가 된다. 따라서, $\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{OS}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$ 이다.

[문항2] 대학발표 예시답안

(2-1)
$a<x\le b$인 임의의 실수 x에 대하여 구간 $[a,\ x]$에 제시문 (가)의 평균값 정리를 사용하면 $\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(c)$인 c가 a와 x사이에 존재한다. 가정에 의하여 $h'(c)=0$이므로 $h(x)-h(a)=0$이다. 즉, $a<x\le b$인 임의의 실수 x에 대하여 $h(x)=h(a)$이므로 $h(x)$는 상수함수이다.

(2-2)
$y'=2\cos x-3\sin x$, $y''=-2\sin x-3\cos x$이므로 $y''+y=0$을 만족한다.

(2-3)
ⓐ 미분법에 의하여

$$f'(x)=(y'\cos x-y\sin x)-(y''\sin x+y'\cos x)=0$$

이고 마찬가지로 $g'(x)=0$이다. 그러므로 논제 (2-1)에 의해 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 상수함수이다.

ⓑ ⓐ에서 두 상수 c_1과 c_2에 대해 $f(x)=c_1$, $g(x)=c_2$라 하자.

$$\begin{cases} c_1=y\cos x-y'\sin x \\ c_2=y\sin x+y'\cos x \end{cases}$$

에서 y'을 소거하면

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

를 얻는다.

ⓒ $y(0)=1$에서 $c_1=1$이고 $y'(0)=2$에서 $c_2=2$이다. 이때,

$$y=\cos x+2\sin x=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\right)$$

이고 제시문 (나)의 덧셈정리를 이용하면

$$y=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)\quad\left(\text{단, }\tan\alpha=\frac{1}{2}\right)$$

이다. 따라서 $r=\sqrt{5}$이고 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$이다.

[문항3] 대학발표 예시답안

(3-1)

$f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 미분가능한 함수이므로 제시문 (가)에 의해 양 끝점과 극값에서 최솟값을 갖는다. 양 끝점에서 함숫값 $f(0)=2=f(2\pi)$이다. 극값을 구하기 위해 도함수를 구하면

$$f'(x)=\frac{-\sin x\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)-\cos x(-a\cos x)}{\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)^2}=\frac{a-\frac{1}{2}\sin x}{\left(\frac{1}{2}-a\sin x\right)^2}=0$$

이고 $0<2a<1$이므로 $\sin x=2a$의 해를 $x=\alpha$와 $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$이다. $0<x<\alpha$일 때, $f'(x)>0$. $\alpha<x<\beta$일 때, $f'(x)<0$. $\beta<x<2\pi$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값

$$f(\beta)=\frac{\cos\beta}{\frac{1}{2}-a\sin\beta}=\frac{-\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\frac{1}{2}-a\sin\beta}=\frac{-\sqrt{1-(2a)^2}}{\frac{1}{2}-a(2a)}=\frac{-2}{\sqrt{1-4a^2}}$$

을 갖는다. 따라서 닫힌 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $\dfrac{-2}{\sqrt{1-4a^2}}$ 이다.

(3-2)

$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$ 에서 $f(x)=0$ 이고 논제 (3-1)에서 $f(x)$의 최솟값이 음수이므로 구하는 면적은

$$S(a)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{1}{2}-a\sin x}dx=-\int_{1}^{-1}\frac{1}{\frac{1}{2}-at}dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\frac{1}{2}-at}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{2}-at\right|\right]_{-1}^{1}=-\frac{1}{a}\left(\ln\left(\frac{1}{2}-a\right)-\ln\left(\frac{1}{2}+a\right)\right)=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1+2a}{1-2a}\right)$$

이다.

(3-3)

제시문 (나)와 (라)의 극한성질을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lim_{a\to 0+}\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1+2a}{1-2a}\right)=\lim_{a\to 0+}\ln\left(\frac{1+2a}{1-2a}\right)^{\frac{1}{a}}=\ln\left\{\lim_{a\to 0+}\left(\frac{1+2a}{1-2a}\right)^{\frac{1}{a}}\right\}$$
$$=\ln\left\{\frac{\lim\limits_{a\to 0+}(1+2a)^{\frac{1}{2a}\times 2}}{\lim\limits_{a\to 0+}(1-2a)^{\frac{1}{-2a}\times(-2)}}\right\}=\ln\left(\frac{e^2}{e^{-2}}\right)=\ln e^4=4$$

이다.

44 인하대학교 수시(오전)[44)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음 (의예과제외)	수학(3문항, 6문제)	120분

[문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) (최대· 최소 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(나) (사잇값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a) < k < f(b)$ (또는 $f(b) < k < f(a)$)인 임의의 실수 k 에 대하여

$$f(c) = k$$

를 만족시키는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(다) 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고, 기호로 $\int f(x)dx = F(x) + C$ (단, C는 적분상수)와 같이 나타낸다. 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

(1-1) 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수이고 함수 $g(x)$는 $[a,\ b]$에서 $g(x) > 0$인 연속함수이면

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

를 만족하는 c가 a와 b 사이에 존재함을 보이시오. (10점)

44) 인하대학교 홈페이지

(1-2) 실수 전체 집합에서 연속함수 $f(x)$는 $f(x)>0$이고 $f'(x)=-\frac{x}{2}f(x)$를 만족한다. 함수 $f(x)$는 1을 극댓값으로 갖는다.

(a) 함수 $f(x)$를 구하시오. (10점)

(b) 부등식 $\int_1^2 x^2 f(x)dx < \frac{7}{3\sqrt[4]{e}}$이 성립함을 보이시오. (15점)

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 피보나치수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots$ 은 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열이다.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

피보나치수열에서 이웃하는 두 항 사이의 비 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 의 값을 차례로 구해보면, n이 한없이 커질 때, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 의 값은 황금비 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 에 수렴함이 알려져 있다.

(나) 1350년 경 프랑스의 수학자 오렘은 다음과 같이 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 을 1개, 2개, 4개, 8개, $\cdots$ 씩 괄호 ( )로 묶어서 부등식

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

이 성립함을 보이고, 이를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 이 발산함을 증명하였다.

(다) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ 이다. 즉 $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ 이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

(라) $\{c_n\}$과 $\{d_n\}$은 모든 항이 양수인 수열이다. 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} c_k \le \sum_{k=1}^{n} d_k$ 이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 도 발산한다.

(마) (입체도형의 부피) 닫힌 구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x를 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 부피 V는

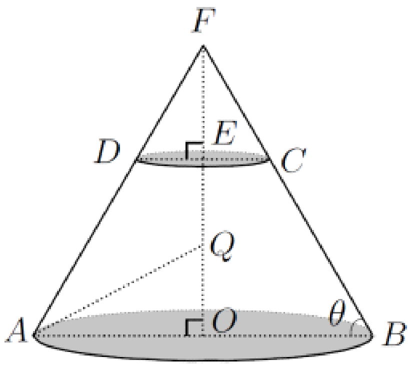
$$V = \int_a^b S(x)dx \quad (\text{단, } S(x)\text{는 닫힌 구간 } [a,\ b]\text{에서 연속})$$

(2-1) 다음은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$을 피보나치수열에 나타난 수만큼의 항으로 괄호 ( )로 묶어서 나타낸 것이다.

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{21}\right)+\cdots$$

이를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$이 발산함을 보이시오. (15점)

(2-2) 아래 그림과 같이 선분 AB가 지름인 원을 밑면으로 하는 원뿔 ABF가 있다. 여기서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OE}}=2$이고 선분 OE의 중점 Q는 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{FQ}}$를 만족한다. (단, O는 원뿔 ABF의 밑면인 원의 중심이다.)



(a) $\angle\mathrm{ABF}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. $\tan\theta$의 값을 구하시오. (10점)

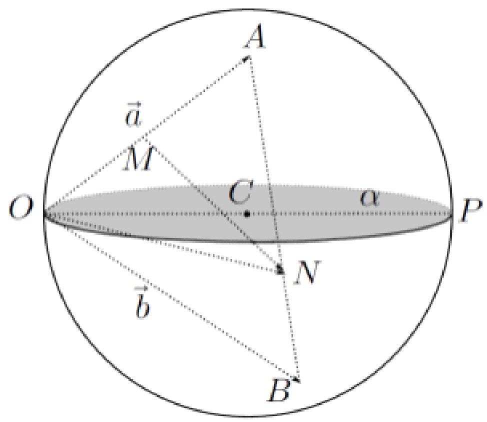
(b) 제시문 (마)를 이용하여 원뿔대 ABCD의 부피를 구하시오. (10점)

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m : n$ ($m>0$, $n>0$) 으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는 다음과 같다.

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

(※) O를 원점으로 갖는 좌표공간에 중심이 C이고 선분 OP를 지름으로 하는 구에서 두 점 O, P를 포함하는 평면 중 하나를 α라 하자. 아래 그림과 같이 두 점 A, B를 평면 α에 대하여 서로 반대편에 위치하고 네 점 O, A, P, B가 한 평면에 놓이도록 구 위에 A, B를 잡자. $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하자. 선분 OA의 중점을 M, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 N이라 하자.



(3-1) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 나타내시오. (10점)

(3-2) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음을 만족한다고 하자.

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\frac{1}{4},\ \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\frac{2}{5}$$

(a) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$로 나타낼 때, 실수 s, t의 값을 구하시오. (10점)

(b) 삼각형 OPN의 넓이를 S_1, 삼각형 OPB의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_1}{S_2}$의 값을 구하시오. (10점)

• 풀어보기

문제1. 함수 $f(x)=\ln(2x^2+1)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

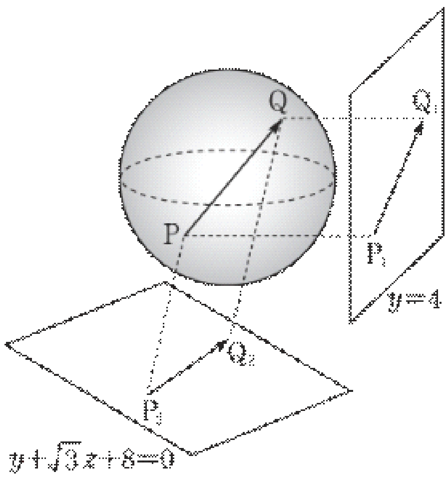
(2012년 4월 전국연합 B형)

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$이다.
ㄴ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$ 이다.
ㄷ. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $|f(x_1)-f(x_2)| \le \sqrt{2}\,|x_1-x_2|$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제2. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$의 최댓값을 구하시오.

(2014년 대수능 B형(2013년 11월 시행) 4점)



• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ⑤

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+1}$ 이므로 $f'(-x)=\dfrac{-4x}{2x^2+1}=-\dfrac{4x}{2x^2+1}=-f'(x)$ (참)

ㄴ. $f''(x)=\dfrac{4(2x^2+1)-4x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{4(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$, $f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$이므로 $y=f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다. (참)

ㄷ. ⅰ) $x_1=x_2$일 때, 주어진 부등식은 성립한다.

ⅱ) $x_1\neq x_2$일 때, $[x_1,\ x_2]$에서 평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c)$인 c가 $(x_1,\ x_2)$에서 적어도 하나 존재한다.

ㄱ, ㄴ에 의하여 $-\sqrt{2}\le f'(x)\le\sqrt{2}$ 이므로 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|=|f'(c)|\le\sqrt{2}$ 이다.

∴ ⅰ), ⅱ)에 의하여 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$|f(x_1)-f(x_2)|\le\sqrt{2}\,|x_1-x_2|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이므로 정답 ⑤이다.

풀어보기(문제2) 정답 24

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a,b,c)$라 하면 $a^2+b^2+c^2\le 16$, 평면 $y=4$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$이다.

평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}=\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각을 각각 θ_1, θ_2라 하면,

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 평면 $y=4$, $y+\sqrt{3}z+8=0$이 이루는 각은 각각 $\dfrac{\pi}{2}-\theta_1$, $\dfrac{\pi}{2}-\theta_2$이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\sin\theta_1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\sin\theta_2$$

따라서

$$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2(2-\sin^2\theta_1-\sin^2\theta_2)=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)$$

이다. $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\cos^2\theta_1 = \left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\cos^2\theta_2 = b^2$ 이므로

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2) = \left(\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 + b^2 \\
&= \frac{1}{4}(5b^2+3c^2+2\sqrt{3}\,bc) \\
&= \frac{1}{4}\{6(b^2+c^2)-(b^2+2\sqrt{3}\,bc+3c^2)\} \\
&= \frac{1}{4}\{6(b^2+c^2)-(b+\sqrt{3}\,c)^2\} \le \frac{3}{2}(b^2+c^2) \\
&\le \frac{3}{2}(16-a^2) \le 24
\end{aligned}$$

따라서 $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값은 24이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

(1-1)

$f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속함수이므로 제시문 (가)의 최대·최소정리에 의해 최댓값 M, 최솟값 m을 갖는다. 즉 모든 $x\in[a,\ b]$에 대하여 $m\le f(x)\le M$이다. 양변에 $g(x)$를 곱하여 적분하면 다음과 같다.

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

한편 $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $g(x)>0$이므로 $\int_a^b g(x)dx>0$이다.

따라서 $k=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$는 $m<k<M$을 만족하는 $f(x)$의 사잇값이고 제시문 (나)의 사잇값 정리에 의해 $k=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(c)$를 만족하는 c가 a와 b사이에 존재한다.

즉 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$를 만족하는 c가 a와 b사이에 존재한다.

(1-2) (a)

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{x}{2}$ 이므로 제시문 (다)에 의해 $\ln f(x) = -\dfrac{x^2}{4}+C$ (C는 적분상수)이다. 그러므로 $f(x)=e^Ce^{-\frac{x^2}{4}}$ 이다. 조건에서 $f(x)>0$이고 $f'(x)=-\dfrac{x}{2}f(x)$이므로 $x<0$에서는

$f'(x)>0$ 이고 $x>0$ 에서는 $f'(x)<0$ 이다. 따라서 $x=0$ 에서 극대이고 이 때 극댓값 $f(0)=e^C=1$ 이므로 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}$ 이다.

(1-2)(b)

$g(x)=x^2$ 이라 놓으면 (1-1)에 의해 $\int_1^2 x^2 f(x)dx = f(c)\int_1^2 x^2 dx$ 를 만족하는 $c\in(1,\ 2)$ 가 존재하고 $f(x)$ 는 $[1,\ 2]$ 에서 감소함수이므로

$$\int_1^2 x^2 f(x)dx = f(c)\int_1^2 x^2 dx = f(c)\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) < f(1)\frac{7}{3} = e^{-\frac{1}{4}}\frac{7}{3} = \frac{7}{3\sqrt[4]{e}}$$

이다.

[문제2] 대학발표 예시답안

(2-1)

피보나치수열 $\{a_n\}$ 을 이용하면 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{21}\right)+\cdots$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{5}{13}+\frac{8}{21}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}$$

제시문 (가)에 의해서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\frac{1}{1+\phi}\neq 0$ 이므로

제시문 (다)에 의해서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}$ 이 발산한다. 따라서 제시문 (라)에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 도 발산한다.

(2-2) (a)

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OE}=2$ 이고 Q 는 $\mathrm{AQ}=\mathrm{FQ}$ 를 만족하는 OE 의 중점이므로 $\mathrm{OQ}=1$ 이고

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{AO}}=\frac{\mathrm{OQ}+\mathrm{QF}}{\mathrm{AO}}=\frac{\mathrm{OQ}+\mathrm{AQ}}{\mathrm{AO}}$$
$$=\frac{\mathrm{OQ}+\sqrt{\mathrm{AO}^2+\mathrm{OQ}^2}}{\mathrm{AO}}=\frac{1+\sqrt{2^2+1}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$$

(2-2) (b)

원뿔 ABF 에서 O 를 좌표평면의 원점, 직선 AB 를 x축, 직선 OF 를 y축이라 하자.

$\overline{\mathrm{OF}}=2\tan\theta=2\phi=1+\sqrt{5}$ 이다. $y=h$ 를 지나 y축에 수직인 평면으로 원뿔 ABF 를 자른 단면을 $S(h)$ 라 하면 단면의 모양은 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 비례식

$r:2=2\phi-h:2\phi$ 로부터 $r=\dfrac{4\phi-2h}{2\phi}=2-\dfrac{1}{\phi}h$ 이다.

$$\begin{aligned}V&=\int_0^2\pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2dh=\pi\left[\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^3(-\phi)\right]_0^2\\&=-\frac{8\pi\phi}{3}\left(\left(1-\frac{1}{\phi}\right)^3-1\right)\\&=\frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V&=\int_0^2\pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2dh=\pi\int_0^2\left(4-\frac{4}{\phi}h+\frac{1}{\phi^2}h^2\right)dh=\pi\left[4h-\frac{2}{\phi}h^2+\frac{1}{3\phi^2}h^3\right]_0^2\\&=8\pi\left(1-\frac{1}{\phi}+\frac{1}{3\phi^2}\right)\\&=\frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V&=\int_0^2\pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2dh=\pi\int_2^{2-\frac{2}{\phi}}t^2(-\phi)dt=\phi\pi\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{2-\frac{2}{\phi}}^2\\&=\frac{\pi\phi}{3}\left(8-\left(2-\frac{2}{\phi}\right)^3\right)\\&=\frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi\end{aligned}$$

(별해) 옆으로 뉘어서 하는 경우 여러 가지 적분식이 나올 수 있습니다.

$$\int_{\sqrt{5}-1}^{\sqrt{5}+1}\pi\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^2dx=\frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi$$

[문제3] 대학발표 예시답안

(3-1)

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}$ 이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

(3-2) (a)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$ 이고 두 점 A, B가 구 위의 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ 이다.

(1)

$$0=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=(s-1)\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\Rightarrow (s-1)+t\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=0$$
$$\Rightarrow (s-1)+\frac{1}{4}t=0$$

(2)

$$0=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BP}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$\Rightarrow s\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}+(t-1)=0$$
$$\Rightarrow \frac{2}{5}s+(t-1)=0$$

위 식을 연립하여 풀면 $s=\frac{5}{6}$, $t=\frac{2}{3}$ 이다.

(3-2) (b)

$\overrightarrow{OP}$ 와 선분 AB의 교점을 Q라 하면 (3-1)에 의해 $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ 이므로

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\frac{5}{6}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}$$

(k는 0이 아닌 실수)이고 $\overrightarrow{OQ}$는 $\overrightarrow{AB}$의 내분점이므로 제시문에 의해 $\frac{5}{6}k+\frac{2}{3}k=1$, 즉 $k=\frac{2}{3}$ 이다. 즉 $\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$ 이다. 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이 N이므로 $\overrightarrow{ON}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ 이다.

또한 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 $\overrightarrow{ON}=t\overrightarrow{OQ}+(1-t)\vec{b}=\frac{5}{9}t\vec{a}+\left(1-\frac{5}{9}t\right)\vec{b}$ 이다. 계수를 비교하면 $\frac{1}{3}=\frac{5}{9}t \Rightarrow t=\frac{3}{5}$ 이다. 따라서 $\overrightarrow{ON}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OQ}+\frac{2}{5}\vec{b}$ 이다. 즉 점 N은 QB의 2 : 3으로 내분한다. 결국 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{5}$ 이다.

45 인하대학교 수시(오후1)[45)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음 (의예과제외)	수학(3문항, 6문제)	120분

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 다음이 성립한다.

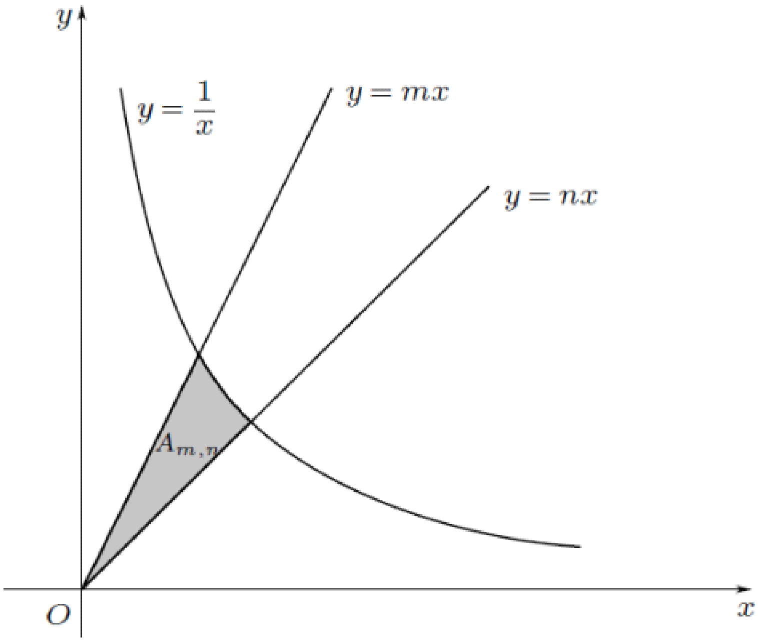
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x=\int_a^b f(x)dx,\ \ \triangle x=\frac{b-a}{n},\ \ x_k=a+k\triangle x$$

(다) (정적분의 부분적분법) 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f'(x)$와 $g'(x)$가 $[a,\ b]$에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(※) 아래 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$과 두 직선 $y=mx$, $y=nx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A_{m,\ n}$이라 하자. (단, m, n은 $m>n$인 자연수이다.)

45) 인하대학교 홈페이지



(1-1) $A_{m,\,n}$을 m, n으로 나타내시오. (15점)

(1-2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{n+k,\,n}}{n}$의 값을 구하시오. (15점)

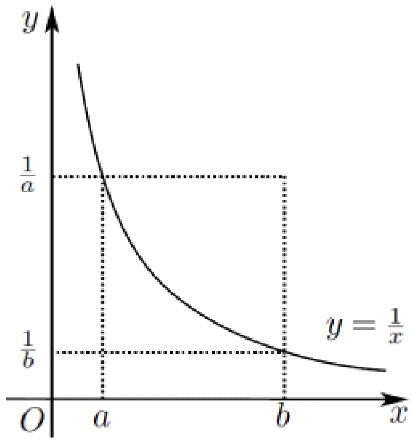
[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) $0 < a < b$일 때, 부등식

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$$

은 아래와 같이 직사각형의 넓이와 정적분 사이의 관계를 비교하면 보일 수 있다.

$$\frac{1}{b}(b-a) < \int_a^b \frac{1}{x}dx < \frac{1}{a}(b-a)$$
$$\frac{1}{b}(b-a) < \ln b - \ln a < \frac{1}{a}(b-a)$$
$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$$



(나) (수열의 극한값의 대소 관계) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$을 만족시키고 $\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

(다) 수열 $\{a_n\}$, $a_n > 0$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$이면 다음이 잘 알려져 있다.

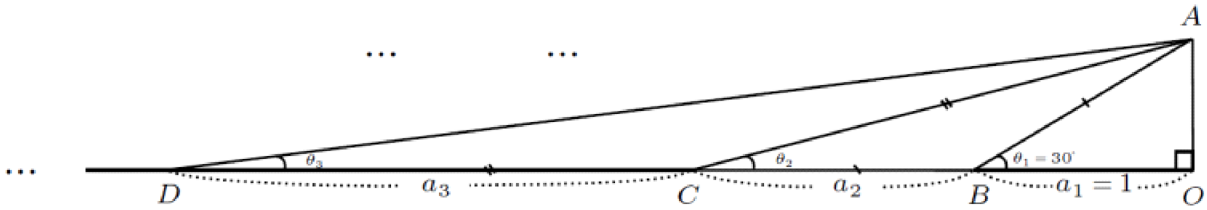
$$\lim_{n\to\infty}\{\ln a_n\} = \ln\left\{\lim_{n\to\infty} a_n\right\} = \ln\alpha$$

(라) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(2-1) 제시문 (가), (나) 그리고 (다)를 모두 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n$ 의 값을 구하시오.

(2-2) 아래 그림과 같은 도형이 있다.



여기서

$\overline{\mathrm{OB}} = a_1 = 1$, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = a_2$, $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{CD}} = a_3$, $\cdots$,

$\angle\mathrm{ABO} = \theta_1 = 30^\circ$, $\angle\mathrm{ACB} = \theta_2$, $\angle\mathrm{ADC} = \theta_3$, $\cdots$

(a) 위 그림으로부터 $\sin^2 15^\circ$ 의 값을 구하시오. (5점)

(b) 위 그림으로부터 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{a_{n+1}}$ 의 값을 구하시오. (15점)

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\ (\text{단, } abc\neq 0)$$

(나) 좌표공간에서 두 평면

$$\alpha\ :\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$\beta\ :\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

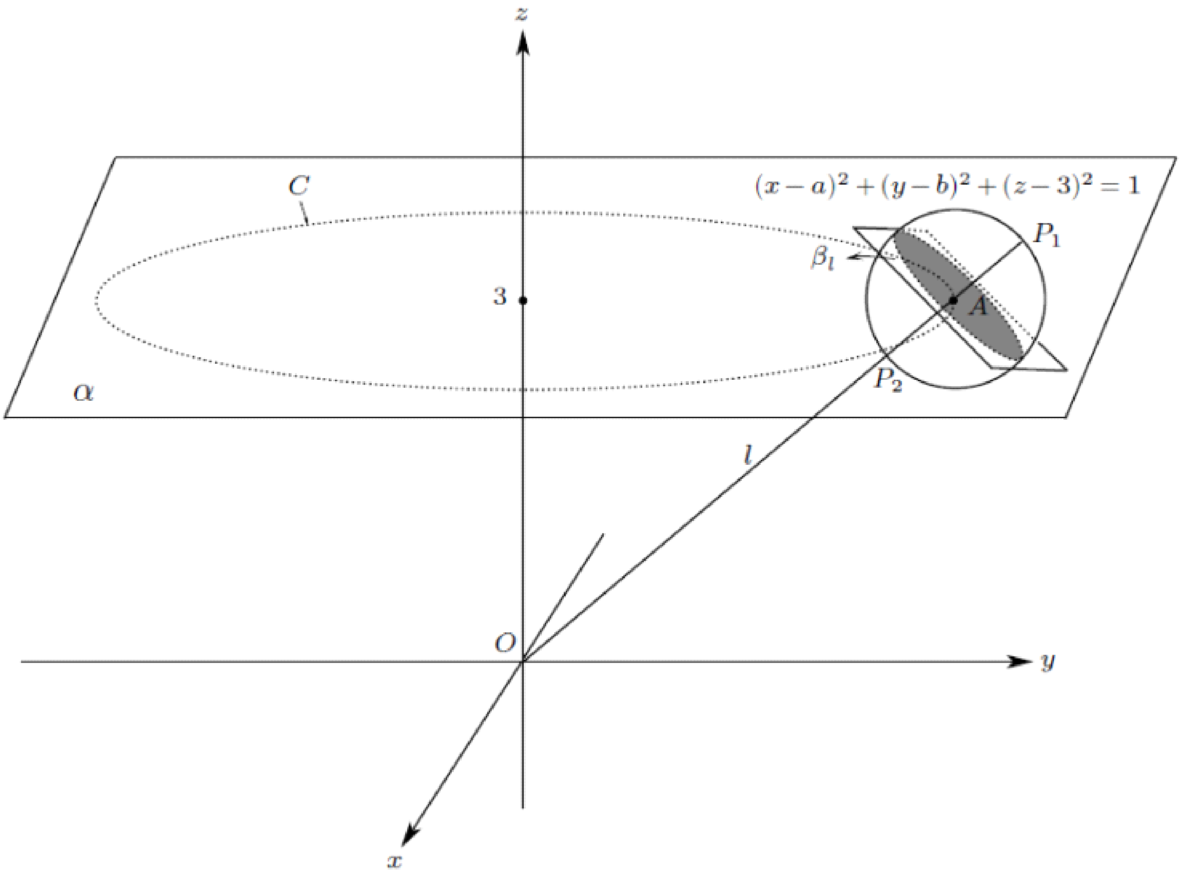
이 이루는 각의 크기를 θ $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

(다) (정사영의 넓이) 평면 α위의 도형 F의 평면 α'위로의 정사영을 F'이라 하자. F, F'의 넓이를 각각 S, S'이라고 할 때, 두 평면 α, α'이 이루는 각의 크기가 θ $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$이면

$$S'=S\cos\theta$$

(※) 아래 그림과 같이 좌표공간에서 xy평면에 평행하고 점 $(0,\ 0,\ 3)$을 지나는 평면을 α라 하자. 평면 α 위에 중심이 $(0,\ 0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 4인 원 C위의 한 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 3)$을 중심으로 하는 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-3)^2=1$이 있다. 이때, 두 점 O와 A를 지나는 직선을 l이라 하자. (단, O는 원점이다.)

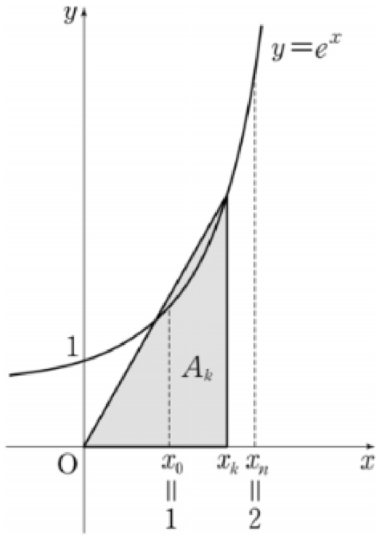


(3-1) 직선 l과 구의 두 교점 P_1과 P_2의 좌표를 a, b로 나타내시오. (15점)

(3-2) 직선 l에 수직이고 점 A를 지나는 평면을 β_1이라 할 때, 구와 평면 β_1의 교선으로 둘러싸인 평면도형을 F라 하자. 점 A의 y좌표인 b가 $0 \le b \le 4$를 만족하면서 원 C 위를 움직일 때, 도형 F의 평면 α 위로의 정사영들로 이루어진 도형의 넓이를 구하시오. (20점)

• 풀어보기

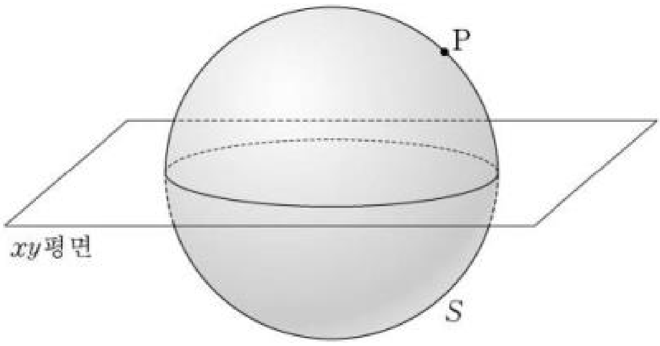
문제1. 함수 $f(x)=e^x$ 이 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=2$ 라 하자. 세 점 $(0,\ 0)$, $(x_k,\ 0)$, $(x_k,\ f(x_k))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$ 의 값은? (2014년 6월 모의평가 B형)



① $\frac{1}{2}e^2-e$ ② $\frac{1}{2}(e^2-e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$ ④ e^2-e ⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$

문제2. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2014년도 대수능)

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



• 예시답안

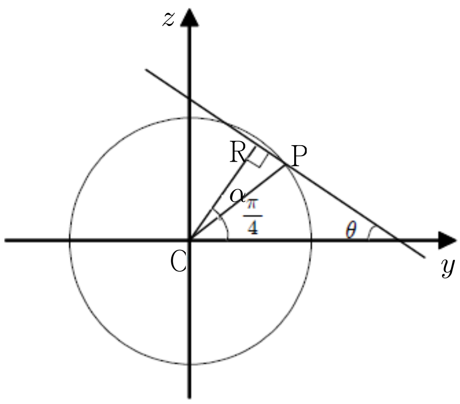
풀어보기(문제1) 정답 ③

$x_k = 1+\frac{k}{n}$라 하면 $A_k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx\\ &= \frac{1}{2}\left\{[xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right\} = \frac{1}{2}e^2\end{aligned}$$

풀어보기(문제2) 정답 9

원 C를 포함하는 평면과 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $\cos\theta\pi$이므로 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되기 위해서는 θ가 최소가 되어야 한다. 따라서 원 C를 포함하는 평면은 yz 평면과 수직이고 원 C 위의 임의의 점의 z좌표는 점 P의 z좌표보다 크거나 같다. 이때 yz 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



원 C의 중심을 점 R, $\angle\mathrm{POR}=\alpha$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{RP}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=7$이다. 따라서

$\sin\alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ 이다.

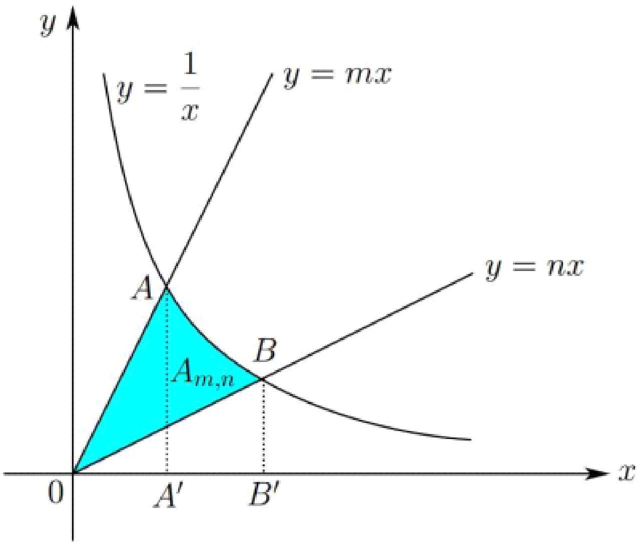
그러므로 $\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{5\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{5}$

원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{5}\pi$이므로 $p+q=9$이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

(1-1)

곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$과 두 직선 $y=mx$, $y=nx$의 교점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{\sqrt{m}},\ \sqrt{m}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\ \sqrt{n}\right)$이므로 곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{\sqrt{m}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S'이라고 하면 제시문 (가)에 의해 구하는 넓이 $A_{m,\,n}$은 다음과 같다.



$$\begin{aligned}A_{m,\,n}&=S'+\triangle \mathrm{OAA'}-\triangle \mathrm{OBB'}\\&=\int_{\frac{1}{\sqrt{m}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{m}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}\\&=[\ln x]_{\frac{1}{\sqrt{m}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\ln\frac{1}{\sqrt{n}}-\ln\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{2}\ln\frac{m}{n}\end{aligned}$$

(1-2)

(1-1)과 제시문 (나)와 (다)에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{n+k,\,n}}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_{n+k,\,n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{n+k}{n}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\ln x\,dx\\&=\frac{1}{2}[x\ln x-x]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}\\&=\ln\frac{2}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

[문제2] 대학발표 예시답안

(2-1)

$a=2n,\ b=2n+3$ 로 택하자. 제시문 (가)에 있는 부등식 $\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2n+3}<\frac{\ln(2n+3)-\ln(2n)}{3}<\frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{1}{2n+3}<\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{3}{2n}\right)<\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{3n}{2n+3}<\ln\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n<\frac{3}{2}$$

마지막 부등식에 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 을 취하면 제시문 (나)와 제시문 (다)에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n=\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n\right)=\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$ 이다.

(2-2) (a)

위 그림에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1+\overline{\mathrm{OA}}^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\overline{\mathrm{BC}}=a_2$, $2\theta_2=\theta_1=30^\circ$ 이므로 $\theta_2=15^\circ$ 이다. 따라서

$$\sin 15^\circ=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{CA}}},\ \overline{\mathrm{OA}}^2=\frac{1}{3},$$

$$\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+(a_1+a_2)^2=\frac{1}{3}+\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{8}{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{8+4\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin^2 15^\circ=\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{CA}}^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

(2-2) (b)

먼저 $\theta_n=\frac{\theta_1}{2^{n-1}}=\frac{\pi}{3\times 2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}=1$ 이다.

또한 $\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_{n+1}=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin\theta_n}=\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta_n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta_n}}=\lim_{n\to\infty}\left(2^n\sqrt{3}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\theta_n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2^n\sqrt{3}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

[문제3] 대학발표 예시답안

(3-1)

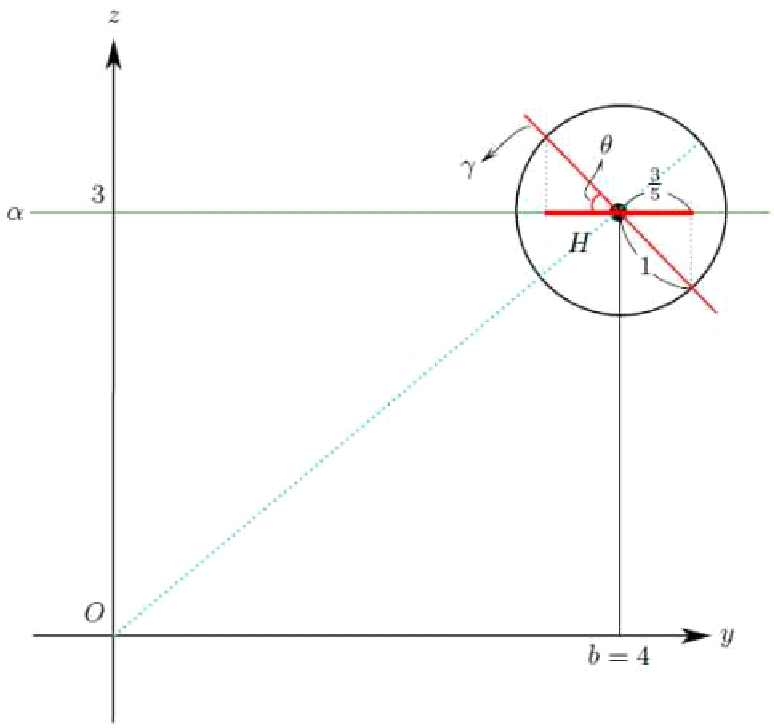
원 $x^2+y^2=16$, $z=3$ 위의 점을 $\mathrm{C}(a,\ b,\ 3)$이라 하면 원점 O와 C를 지나는 직선의 방정식 l은 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{3}$이다. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{3}=t$로 놓으면 $x=at,\ y=bt,\ z=3t$이고 이 식을 구의 방정식에 대입하여 t를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&(at-a)^2+(bt-b)^2+(3t-3)^2=1\\
\Rightarrow\ &a^2(t-1)^2+b^2(t-1)^2+9(t-1)^2=1\\
\Rightarrow\ &a^2+b^2+9=\frac{1}{(t-1)^2}\\
\Rightarrow\ &t=\frac{6}{5},\ \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{P}_1=\left(\dfrac{6}{5}a,\ \dfrac{6}{5}b,\ \dfrac{18}{5}\right)$, $\mathrm{P}_2=\left(\dfrac{4}{5}a,\ \dfrac{4}{5}b,\ \dfrac{12}{5}\right)$이다.

(3-2)

아래 그림과 같이 $b=4$일 때 평면 β_l 의 평면 α 위로의 정사영은 다음과 같다.

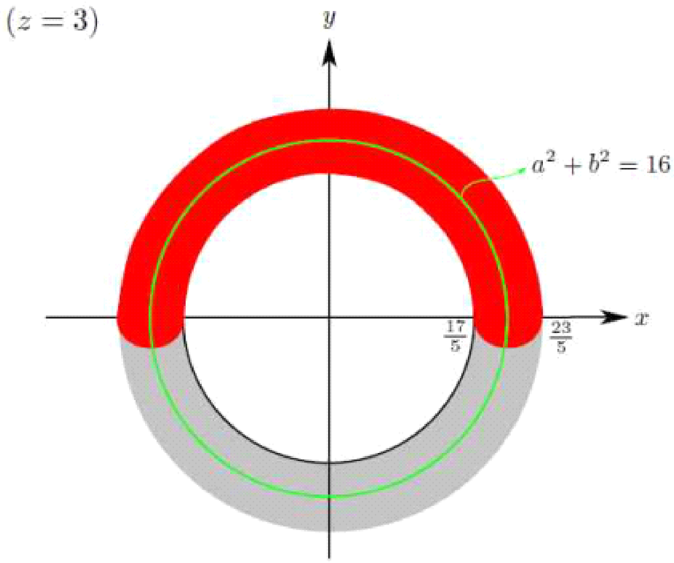


평면 α의 법선벡터는 $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$이고 평면 β_l 의 법선벡터는 $\overrightarrow{n_1}=(a,\ b,\ 3)$이므로 두 평면이 이루는 각을 θ 라 하면 $a^2+b^2=16$이므로 제시문 (나)에 의해

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{3}{\sqrt{a^2+b^2+9}}=\frac{3}{5}$$

이다.

위의 정사영을 생각하면 구의 중심이 원 위를 움직일 때, 평면 β_l 위의 도형 F의 평면 α 위로의 정사영들의 도형은 아래와 같이 반지름이 $\frac{17}{5}$와 $\frac{23}{5}$인 두 원으로 둘러싸인 영역이 된다.



따라서 구의 중심이 $0 \le b \le 4$를 만족하는 원 위를 움직일 때, 구하고자 하는 영역은 위의 그림에서 빨간색으로 표시된 영역, 즉 xy평면 위쪽의 반원들로 이루어진 영역과 $b=0$일 때 $(a,\ b,\ 3)=(4,\ 0,\ 3)$과 $(a,\ b,\ 3)=(-4,\ 0,\ 3)$를 중심으로 하는 평면 β_l 위의 반지름이 1인 반원들의 정사영으로 이루어진 도형의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{23}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{5}\right)^2\right] + \frac{\pi}{2}\cos\theta + \frac{\pi}{2}\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{23}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{5}\right)^2\right] + \pi\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{23}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{5}\right)^2\right] + \frac{3}{5}\pi = \frac{27}{5}\pi \end{aligned}$$

이다.

46 인하대학교 수시(오후2)[46)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음 (의예과제외)	수학(3문항, 6문제)	120분

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) (부정적분의 정의) $F'(x)=f(x)$일 때, $\int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

(나) (적분과 미분의 관계) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

(다) (미적분의 기본 정리) 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

(※) 모든 실수 x에 대하여, 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 미분가능하고 $f'(x)$와 $g'(x)$는 연속함수이다. 또한 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 등식을 만족한다.

$$f(x)=g(x)-\int_0^x (x-t)f'(t)dt$$

(1-1) $\{e^x f(x)\}'=e^x\{g'(x)+g(0)\}$이 성립함을 보이시오. (15점)

(1-2) 함수 $g(x)=\dfrac{x\cos x}{e^x}$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오. (15점)

46) 인하대학교 홈페이지

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

양의 실수 a, b에 대하여 산술평균 $\dfrac{a+b}{2}$와 기하평균 $\sqrt{ab}$는

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \quad (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립한다.})$$

을 만족한다. 마찬가지로 n개의 양의 실수 x_1, x_2, $\cdots$, x_n에 대하여

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad \text{또는} \quad x_1x_2\cdots x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$

(단, 등호는 $x_1=x_2=\cdots=x_n$일 때 성립한다.)
이 성립한다. 이 부등식을 산술・기하평균 부등식이라 한다.

(2-1) 수열 $\{a_n\}$, $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$에 대하여

(a) 함수 $y=\ln(1+x)$ $(x\ge 0)$의 그래프를 이용하여 $a_n<a_{n+1}$임을 보이시오. (10점)

(b) 제시문과 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 그리고 $x_{n+1}=1$을 이용하여 $a_n<a_{n+1}$임을 보이시오.(10점)

(2-2) 모든 자연수 n과 등식 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$을 만족하는 실수 p $(p>1)$와 양의 정수 q $(q>1)$에 대하여

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le p^q$$

임을 보이시오.(15점)

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는 다음과 같다.

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

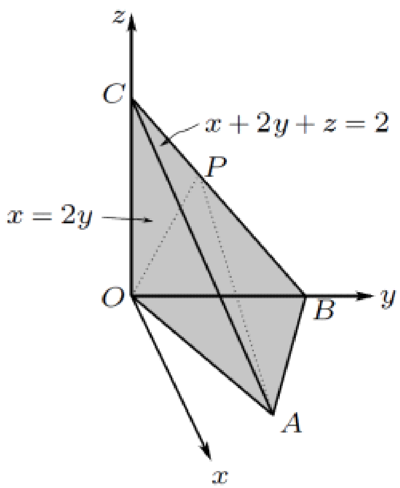
(나) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0<\theta<\pi)$라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta$$

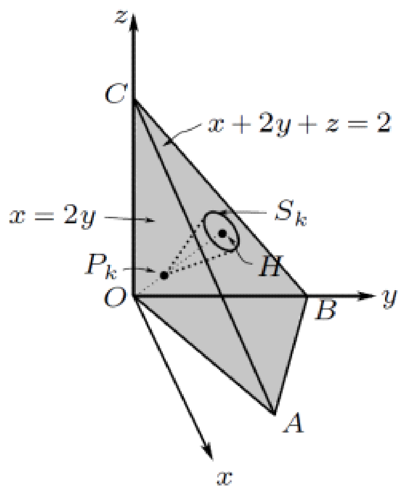
(※) O를 원점으로 하는 좌표공간에서 아래 그림과 같이 네 평면

$$x+2y+z=2,\ x=2y,\ x=0,\ z=0$$

으로 둘러싸인 사면체 OABC가 있다.



[그림 1]



[그림 2]

(3-1) [그림 1]에서 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 P라 하자. 삼각형 OAP의 넓이를 제시문(나)와 벡터의 내적을 이용하여 구하시오. (15점)

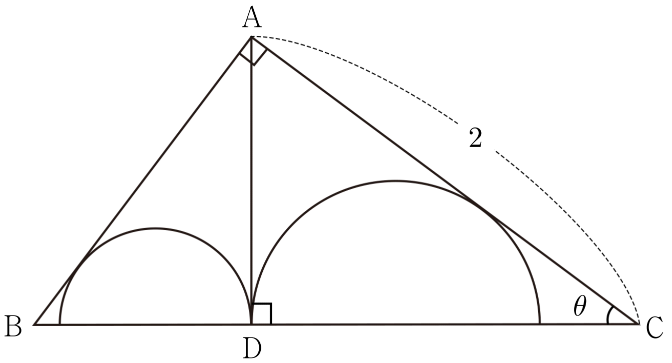
(3-2) [그림 2]에서 원점 O를 지나고 평면 $\alpha : x+2y+z=2$에 수직인 직선과 평면 α의 교점을 H라 하자. 또한 H에서 거리가 k인 선분 OH 위의 점을 P_k라 하자. (단, P_k는 양 끝점 O와 H가 아니다.)

(a) 점 H의 좌표와 k의 범위를 구하시오. (5점)

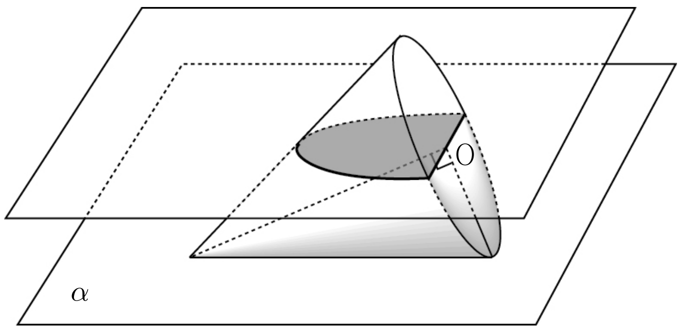
(b) P_k를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OH}}$인 구와 평면 α의 교선을 S_k라 하자. 밑면이 S_k이고 꼭짓점이 P_k인 원뿔의 부피를 $f(k)$라 할 때, $f(k)$의 최댓값을 구하시오. (15점)

• 풀어보기

문제1. 그림과 같이 선분 AC의 길이가 2이고 $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\angle ACD = \theta$라 하자.
삼각형 ABD에서 변 BD 위에 지름이 놓여 있고 변 AB에 접하면서 점 D를 지나는 반원의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 ADC에서 변 DC위에 지름이 놓여 있고 변 AC에 접하면서 점 D를 지나는 반원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2 \times T(\theta)} = \alpha$일 때, 60α의 값을 구하시오. (단, 두 반원의 호는 점 D에서 만난다.) (2015. 전국연합)



문제2. 반지름의 길이가 1, 중심이 O인 원을 밑면으로 하고 높이가 $2\sqrt{2}$인 원뿔이 평면 α 위에 놓여있다.(단, 원뿔의 한 모선이 평면 α에 포함된다.)
그림과 같이 원뿔을 평면 α와 평행하고 원뿔의 밑면의 중심 O를 지나는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 일부분은 포물선이다. 이때 단면의 넓이는? (2013. 전국연합)



① $\frac{13}{8}$　　② $\frac{7}{4}$　　③ $\frac{15}{8}$　　④ 2　　⑤ $\frac{17}{8}$

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 15

삼각형 ABD 의 내부의 반원의 중심을 O_1, 반지름의 길이를 r라 하고, 삼각형 ADC 의 내부의 반원의 중심을 O_2, 반지름의 길이를 R라 하자.

두 반원이 두 선분 AB, AC와 접하는 점을 각각 H_1, H_2라 하자.

삼각형 ADC 에서

$\overline{AH_2} = \overline{AD} = 2\sin\theta$, $\overline{CH_2} = 2(1-\sin\theta)$ 이므로 $R = 2\tan\theta(1-\sin\theta)$

$$\therefore\ T(\theta) = 2\pi(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta$$

삼각형 ABD 에서

$\overline{AH_1} = \overline{AD} = 2\sin\theta$, $\overline{AB} = 2\tan\theta$, $\overline{BH_1} = 2(\tan\theta - \sin\theta)$

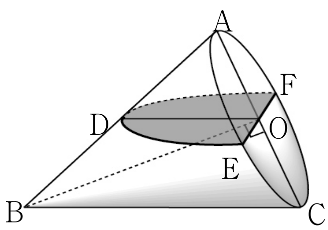
$\angle BO_1H_1 = \theta$ 이므로 $r = \dfrac{2(\tan\theta-\sin\theta)}{\tan\theta} = 2(1-\cos\theta)$

$$\therefore\ S(\theta) = 2\pi(1-\cos\theta)^2$$

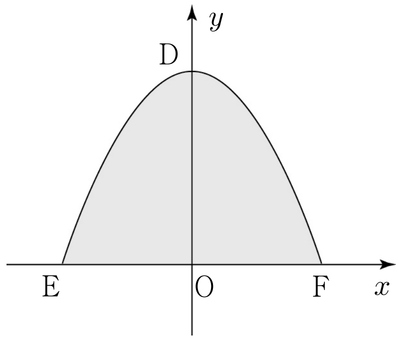
$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2\times T(\theta)} &= \lim_{\theta\to 0+}\frac{2\pi(1-\cos\theta)^2}{\theta^2\times 2\pi(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta}\\ &= \lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^2(1-\sin\theta)^2\tan^2\theta(1+\cos\theta)^2}\\ &= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\times\frac{\theta^2}{\tan^2\theta}\times\frac{1}{(1-\sin\theta)^2(1+\cos\theta)^2}\right\}\\ &= 1\times 1\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

따라서 $60a = 15$

풀어보기(문제2) 정답 ④



삼각형 ABC에 대하여 $\overline{BC}=3$이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DO}$, $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{DO}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{3}{2}$. 좌표평면에 포물선을 나타내면



이 포물선은 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하고 $(1, 0)$을 지나므로, 포물선의 방정식은 $y= -\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$. 따라서 구하고자 하는 단면의 넓이는 $S=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)dx=2$

[문제1] 대학발표 예시답안

(1-1)

주어진 등식의 양변을 미분하자. 제시문 (나)와 제시문 (다)에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} f'(x)&=g'(x)-\int_0^x f'(t)dt-xf'(x)+xf'(x)=g'(x)-\int_0^x f'(t)dt \\ &=g'(x)-f(x)+f(0)=g'(x)-f(x)+g(0) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(e^x f(x)\right)&=e^x f(x)+e^x f'(x) \\ &=e^x f(x)+e^x\{g'(x)-f(x)+g(0)\}=e^x\{g'(x)+g(0)\} \end{aligned}$$

(1-2)

$g(x)=\frac{x\cos x}{e^x}$ 이므로 (1)번에서 주어진 등식과 제시문 (가)를 이용하면

$$\begin{aligned} e^x f(x)&=\int e^x\{g'(x)+g(0)\}dx+C=\int e^x\left\{\frac{(\cos x-x\sin x)e^x-x\cos x e^x}{e^{2x}}\right\}dx+C \\ &=\int \cos x dx-\int x\sin x dx-\int x\cos x dx+C \end{aligned}$$

여기서 제시문 (라)를 이용하면

$$\int \cos x dx=\sin x$$

$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\int \cos x dx=-x\cos x+\sin x$$

$$\int x\cos x dx=x\sin x-\int \sin x dx=x\sin x+\cos x$$

따라서

$$\begin{aligned} f(x)&=e^{-x}\{\sin x+x\cos x-\sin x-x\sin x-\cos x+C\} \\ &=e^{-x}\{x\cos x-x\sin x-\cos x+C\} \end{aligned}$$

이다. $0=g(0)=f(0)= -1+C$로부터 $C=1$. 따라서

$$f(x)=\frac{x\cos x-x\sin x-\cos x+1}{e^x}$$

이다.

[문제2] 대학발표 예시답안

(2-1) (a)

$x\geq 0$에서 로그함수 $y=\ln(x+1)$는 위로 볼록한 증가함수이므로 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(\frac{1}{n+1},\ \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)$을 이은 직선의 기울기가 두 점 $(0,\ 0)$, $\left(\frac{1}{n},\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$을 지나는 직선의 기울기보다 크다. 즉

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

따라서 $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 이다.

(별해) 함수 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$는 $x\geq 0$에서 감소함수이다. (미분을 이용하여 체크 가능) 즉, $0<a<b$이면 $f(a)>f(b)$이므로 $0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$이면 $f\left(\frac{1}{n+1}\right)>f\left(\frac{1}{n}\right)$이다. 즉

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

따라서 $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 이다.

(2-1) (b)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times 1\leq\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(2-2)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times\left(\frac{1}{p}\right)^{q}\leq\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}}{n+q}\right)^{n+q}=\left(\frac{n+1+\frac{q}{p}}{n+q}\right)^{n+q}$$

$1+\frac{q}{p}=q$이므로

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{p}\right)^q \le \left(\dfrac{n+1+\dfrac{q}{p}}{n+q}\right)^{n+q} = 1$ 이고 따라서 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \le p^q$ 이다.

[문제3] 대학발표 예시답안

(3-1)

사면체 OABC의 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 구하면 $A\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 2)$이다. 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 성분은 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\left(0,\ \dfrac{1}{3},\ 0\right)+\left(0,\ 0,\ \dfrac{4}{3}\right)=\left(0,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$이다.

$\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각을 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 OAP의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{16}{9}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$$

(3-2) (a)

평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,\ 2,\ 1)$이다. $\vec{n}$에 평행하고 원점을 지나는 직선은

$$x=t,\ y=2t,\ z=t\ \ (t\text{는 0이 아닌 임의의 실수})$$

이를 평면 α에 대입하면 $t+4t+t=6t=2$, 즉 $t=\dfrac{1}{3}$이다. 따라서 $H\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$이다.

$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 이므로 k의 범위는 $0<k<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 이다.

(3-2) (b)

원 S_k의 반지름을 r라 하면 $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}-k^2}$ 이다. 따라서 원뿔의 부피 $f(k)$는

$$f(k)=\frac{1}{3}\pi r^2 k=\frac{1}{3}\pi k\left(\frac{2}{3}-k^2\right)=\frac{2\pi}{9}k-\frac{\pi}{3}k^3$$

$f'(k)=\dfrac{2\pi}{9}-\pi k^2=0$으로부터 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$이다. $k=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 주변에서 $f'(k)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 범위 $0<k<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 에서

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{2\pi}{9}\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{3}\frac{2\sqrt{2}}{27}=\frac{4\sqrt{2}}{81}\pi$$

는 최댓값이다.

47 중앙대학교(자연1) 모의[47]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	**자연(서울)**:국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 5 이내 **자연(안성)**:국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 2개 영역 등급 합 5 이내 **의학**:국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 4개 영역 등급 합 5 이내 *공통:한국사 4등급 이내	수학(3문항, 5문제) 70점 *물리, 화학, 생명과학 중 1과목 30점	120분

[문제 1] 다음을 읽고 문제에 답하시오

원탁 테이블 3개가 있는 점심 뷔페 식당이 있다. 테이블 번호가 1부터 3까지 순서대로 매겨져 있고, 각 테이블당 최대 4명의 손님이 앉을 수 있다. 손님들은 모두 한 명씩 순서대로 각자 들어와서 다음과 같은 규칙으로 테이블을 선택한 후 식사를 한다.

- 첫 번째로 들어오는 손님은 무조건 1번 테이블에 앉는다.
- n번째로 들어오는 손님은 비어있는 테이블들 중 번호가 가장 빠른 테이블에 $\frac{3}{n+2}$의 확률로 앉고, 이미 손님이 앉아 있는 테이블에는 $\frac{c}{n+2}$이 확률로 선택해서 앉는다. 여기서 c는 그 테이블에 이미 앉아 있는 손님의 수를 나타낸다. (단, $n=2, 3$)

오늘 점심 시간에 서로 알지 못하는 사이인 3명의 손님이 연이어 도착한 후 각각 순서대로 들어와서 식사를 한다고 가정하자. 오늘 이 식당에서 점심 시간에 사용될 테이블 수의 기댓값을 구하시오. [20점]

47) 중앙대학교 홈페이지

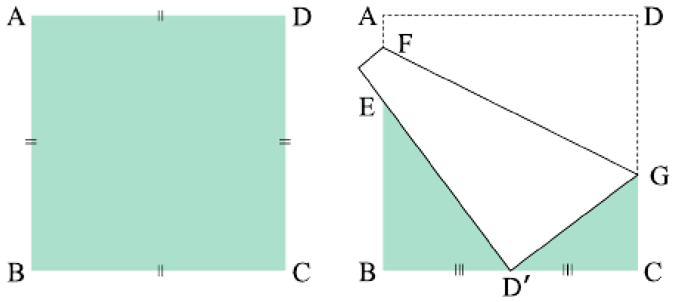
[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

○ 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 한 점 또는 한 직선에 대하여 대칭인 점 $\mathrm{P}'(x', y')$로 옮기는 것을 대칭이동이라고 한다. 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 x축에 대한 대칭이동은 $(x, y)\to(x, -y)$, y축에 대한 대칭이동은 $(x, y)\to(-x, y)$, 원점에 대한 대칭이동은 $(x, y)\to(-x, -y)$와 같이 나타낸다. 일반적으로 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{P}'(x', y')$가 있을 때, 직선 PP'는 직선 $ax+by+c=0$과 수직으로 만나고 그 만나는 점은 선분 PP'의 중점이다.

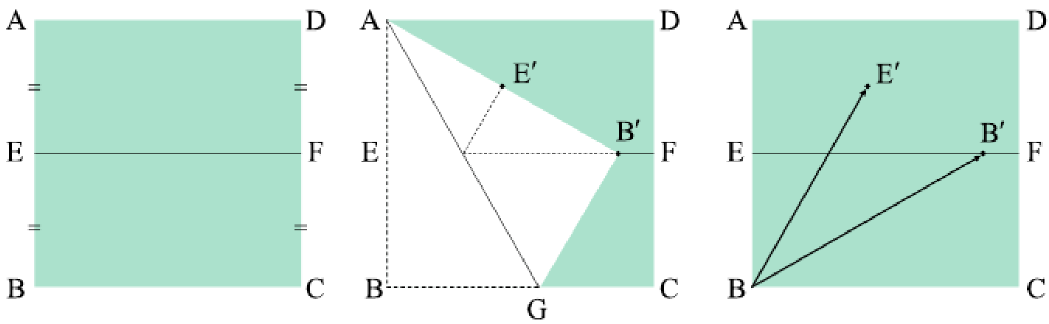
○ 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때 내적은 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

[문제2-1] 한 변의 길이가 1인 정사각형 종이 ABCD가 있다. 꼭짓점 D가 변 BC의 중점 D′와 일치하도록 접었을 때 선분 AF와 선분 BE의 길이를 논리적으로 구하시오. [10점]



[문제2-2] 한 변의 길이가 1인 종이 ABCD가 있다. 이 종이를 반으로 접었다 펴서 변 AB의 중점 E와 변 CD의 중점 F를 연결한 선분 EF가 생기도록 자국을 내었다. 꼭짓점 B가 선분 EF 위에 놓이도록 아래 그림과 같이 접어 점 E′와 B′를 표시하고 다시 폈다. 즉 삼각형 ABG와 삼각형 AB′G는 합동이고, E와 E′, B와 B′는 선분 AG에 대해 대칭이다. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BE}'}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$가 이루는 각 E′BB′를 구하는 과정을 점의 대칭이동을 이용하여 논리적으로 제시하시오. [15점]



[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

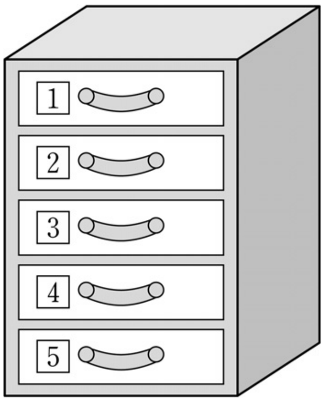
> ○ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$이다.
>
> ○ 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \le f(x)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하고, $f(a)$를 극솟값이라고 한다.

[문제3-1] 타원 $n^2x^2+(n+1)^2y^2=1$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{2n},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2(n+1)}\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(-\dfrac{1}{2n},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2(n+1)}\right)$에서의 두 접선의 교점을 R_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 b_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n$의 값을 구하시오. [10점]

[문제3-2] $\displaystyle\int_0^t(3^nx^3-3^nx^2+9n)dx=0$을 만족시키는 0보다 큰 상수 t가 존재하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [15점]

• 풀어보기

문제1. 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 서랍이 있다. 5개의 서랍 중 영희에게 임의로 2개를 배정해 주려고 한다. 영희에게 배정되는 서랍에 적혀 있는 자연수 중 작은 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(10X)$의 값을 구하시오. (2013년 11월 대수능)



문제2. 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx+(n+1)$이 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$이고 초점이 $(a_n, 0)$인 포물선에 접할 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은? (2014년 9월 모평)

① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 20

5개 중 임의로 2개를 배정하는 전체 방법의 수는 ${}_5C_2 = 10$

ⅰ) $X=1$인 경우

배정된 서랍의 번호를 순서쌍으로 나타내면

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{10}$

ⅱ) $X=2$인 경우

(2, 3), (2, 4), (2, 5)이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{10}$

ⅲ) $X=3$인 경우

(3, 4), (3, 5)이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{10}$

ⅳ) $X=4$인 경우

(4, 5)이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서 확률변수 X의 확률분포는

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2$

$\therefore\ \mathrm{E}(10X)=10\times\mathrm{E}(X)=20$

풀어보기(문제2) 정답 ①

꼭짓점의 좌표가 (0, 0)이고 초점이 $(a_n,\ 0)$인 포물선은

$y^2=4a_nx$이고 기울기가 n인 접선의 방정식은 $y=nx+\frac{a_n}{n}$이다.

따라서 $\frac{a_n}{n}=n+1$이고 $a_n=n(n+1)$이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}n(n+1)=70$

[문제 1] 대학발표 예시답안

테이블이 하나만 사용되는 경우는 모든 손님이 1번 테이블에 앉는 경우이다. 이때의 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ 가 된다.

테이블이 두 개가 사용되는 경우는 다음과 같다.

1번 테이블에 첫 번째, 두 번째 손님이 앉고, 2번 테이블에 세 번째 손님이 앉는 경우 :

$$\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$$

1번 테이블에 첫 번째, 세 번째 손님이 앉고, 2번 테이블에 두 번째 손님이 앉는 경우 :

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$$

1번 테이블에 첫 번째 손님이 앉고, 2번 테이블에 두 번째, 세 번째 손님이 앉는 경우 :

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$$

테이블이 세 개가 사용되는 경우는 1번 테이블에 첫 번째 손님, 2번 테이블에 두 번째 손님, 3번 테이블에 세 번째 손님이 앉는 경우이다. 이때의 확률은 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$ 이다.

따라서, 점심 시간에 사용될 테이블 수의 기댓값은 다음과 같다.

$$1\times\frac{2}{20}+2\times\left(\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}\right)+3\times\frac{9}{20}=\frac{47}{20}=2.35\,(\text{개})$$

[문제 2] 대학발표 예시답안

[문제2-1] 직선 FG를 $y=ax+b$라 할 때, 점 $\mathrm{D}'\left(\frac{1}{2},0\right)$는 이 직선에 대해 점 $\mathrm{D}(1,1)$의 대칭점이다. 즉 직선 FG의 기울기 a와 선분 DD'의 기울기는 수직이고, 선분 DD'의 중점은 직선 FG 위에 있다.

$-\frac{1}{a}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, 즉 $a=-\frac{1}{2}$ 이고, $\frac{1}{2}=a\times\frac{1+\frac{1}{2}}{2}+b$, 즉 $b=\frac{7}{8}$ 이다.

따라서, 선분 AF의 길이는 $1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$ 이다.

점 $\mathrm{A}(0,1)$의 직선 FG에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}'(c,d)$라 하면

$-\frac{1}{a}=2=\frac{1-d}{0-c}$, $d=2c+1$

$\frac{d+1}{2}=a\times\frac{c}{2}+b=-\frac{1}{2}\times\frac{c}{2}+\frac{7}{8}$, 즉 $c=-\frac{1}{10}$, $d=\frac{4}{5}$ 이다.

직선 $\mathrm{D}'\mathrm{E}$의 방정식을 점 $\mathrm{A}'\left(-\frac{1}{10},\frac{4}{5}\right)$와 $\mathrm{D}'\left(\frac{1}{2},0\right)$의 좌표를 이용하여 구하면

$y=\dfrac{-\dfrac{4}{5}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$, 즉 y축과의 교점이 $\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$이다.

따라서, 선분 BE의 길이는 $\dfrac{2}{3}$이다.

(다른 풀이)
선분 CG의 길이를 x라 하면, $\mathrm{D'G}$는 $1-x$가 되고, 피타고라스 정리를 이용하여 x를 구하면 $x^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-x)^2$, 즉 $x=\dfrac{3}{8}$이다.
그리고 삼각형 $\mathrm{D'CG}$와 삼각형 $\mathrm{EBD'}$가 닮음을 이용하여 선분 BE의 길이를 비례식으로 구하면

$$\overline{\mathrm{D'C}}:\overline{\mathrm{CG}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{BD'}},\ \ \overline{\mathrm{BE}}=\frac{\overline{\mathrm{D'C}}\cdot\overline{\mathrm{BD'}}}{\overline{\mathrm{CG}}}=\frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{8}}=\frac{2}{3}$$

이므로 선분 BE의 길이는 $\dfrac{2}{3}$이다.

점 A의 직선 FG에 대한 대칭점을 $\mathrm{A'}$라 하면, 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{A'D'}}=\dfrac{5}{6}$이고, $\overline{\mathrm{A'E}}=\dfrac{1}{6}$이다.
그리고 삼각형 EBD와 삼각형 $\mathrm{EA'F}$는 닮음을 이용하여 선분 EF의 길이를 비례식으로 구하면

$$\overline{\mathrm{A'E}}:\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{D'E}},\ 즉\ \overline{\mathrm{EF}}=\frac{5}{24}$$

이므로 선분 AF의 길이는 $\overline{\mathrm{AF}}=1-\overline{\mathrm{BE}}-\overline{\mathrm{EF}}=\dfrac{1}{8}$이다.

[문제2-2] 직선 AG를 $y=ax+1$이라 할 때, 점 $\mathrm{B'}\left(b,\ \dfrac{1}{2}\right)$는 이 직선에 대해 점 $\mathrm{B}(0,0)$의 대칭점이므로

$$-\frac{1}{a}=\frac{\dfrac{1}{2}}{b}\cdot b=-\frac{1}{2}a,\ \ \frac{1}{4}=a\times\frac{b}{2}+1$$

이다.
두 식을 연립하여 풀면 $a=-\sqrt{3}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고, 따라서 $\mathrm{B'}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.
그리고 직선 AG에 대해 $\mathrm{E'}(c,d)$는 $\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$와 대칭이므로

$$-\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{d-\frac{1}{2}}{c},\ c=d\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\frac{1}{2}+d}{2}=-\sqrt{3}\frac{c}{2}+1$$

이다.

두 식을 연립하여 풀면 $c=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $d=\frac{3}{4}$ 이고, 따라서 $E'\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 이다.

이제 벡터 $\overrightarrow{BE'}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 과 벡터 $\overrightarrow{BB'}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이 이루는 각을 구하면

$\cos(\angle E'BB')=\frac{\overrightarrow{BE'}\cdot\overrightarrow{BB'}}{|\overrightarrow{BE'}||\overrightarrow{BB'}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고, 따라서 $\angle E'BB'=\frac{\pi}{6}=30^\circ$ 이다.

[문제 3] 대학발표 예시답안

[문제3-1] P_n 과 Q_n 은 y 축에 대칭이므로 P_n 에서의 접선과 y 축과의 교점이 R_n 이 되고, 접선의 방정식은 $\frac{n}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}(n+1)y=1$ 이다.

따라서 $b_n=\frac{1}{2n}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}(n+1)}-\frac{\sqrt{3}}{2(n+1)}\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{10} b_n=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{22\sqrt{3}}$

[문제3-2] $\int_0^t (3^n x^3-3^n x^2+9n)dx=\frac{3^n}{4}t^4-3^{n-1}t^3+9nt=0$ 을 만족하는 $t>0$ 이 있으면 된다. 그리고 $t>0$ 이므로 $g(t)=\frac{3^n}{4}t^3-3^{n-1}t^2+9n$ 로 놓으면 $g(t)$ 가 0보다 큰 근을 가지면 된다.

$g(t)$ 의 도함수가 $g'(t)=\frac{3^{n+1}}{4}t^2-2\cdot 3^{n-1}t$ 이므로 $t=0,\ \frac{8}{9}$ 에서 극대, 극소를 가지고 되고, $g\left(\frac{8}{9}\right)=2^7\cdot 3^{n-6}-2^6\cdot 3^{n-5}+9n\le 0$ 이면 0보다 큰 근을 가지게 된다.

위 식을 정리하면 $n\le 2^6\cdot 3^{n-8}$ 이고, 주어진 부등식을 만족시키는 최소의 자연수는 $n=6$ 이다.

48 중앙대학교(자연2) 모의[48]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	**자연(서울)**:국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 3개 영역 등급 합 5 이내 **자연(안성)**:국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 2개 영역 등급 합 5 이내 **의학**:국어, 수학(가), 영어, 과탐 중 4개 영역 등급 합 5 이내 *공통:한국사 4등급 이내	수학(3문항, 5문제) 70점 *물리, 화학, 생명과학 중 1과목 30점	120분

[문제 1] 다음을 읽고 문제에 답하시오

영희는 두 단계로 구성된 활쏘기 게임에 참여할 수 있는 기회를 얻었다. 게임은 다음과 같은 규칙으로 진행된다.

○ 1단계에서는 10m 거리에서 활쏘기가 시행되며, 명중하게 되면 2단계로 넘어가서 20m 거리에서 다시 시행된다.

○ 1단계에서 성공하면 성공할 때까지의 시도 횟수에 따라 상금을 받고 2단계로 넘어가게 된다. 1단계의 상금은 다음과 같으며, 각 화살의 명중 확률은 0.7이다.

성공할 때까지의 시도 횟수	1	2	3
상금(원)	30,000	20,000	10,000

○ 2단계에서는 총 3개의 화살 중 1단계에서 사용하고 남은 화살을 쏘며 명중 개수에 따라 상금을 받는다. 2단계의 상금은 다음과 같으며, 각 화살의 명중 확률은 0.6이다.

명중 개수	0	1	2
상금(원)	0	10,000	20,000

영희가 이 게임에 참여할 때, 받을 수 있는 상금의 기댓값을 구하시오. [20점]

48) 중앙대학교 홈페이지

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

○ 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

○ 두 함수 $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$의 합성함수 $g \circ f$는 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$로 정의한다.

○ 집합에 속하는 두 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 집합을 나타내는 방법을 조건제시법이라고 한다.

○ 집합 A의 원소가 유한 개일 때, 집합 A의 원소의 개수를 $n(A)$로 나타낸다.

[문제2-1] 자연수 k에 대하여 수열 a_k를 $a_k = \int_{-k+1}^{k} (x^3 - x + 1)dx$로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [10점]

[문제2-2] 집합 $E_k = \left\{ x \,|\, \sin\left(k\pi \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) + \frac{1}{2k} = 0 \right\}$에 대하여, $1 \leq n(E_k) \leq 10$을 만족시키는 자연수 k를 모두 구하시오. [10점]

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

○ 좌표평면 위에서 한 곡선 위의 점 P의 좌표를 (x, y)라고 할 때, x와 y를 각각 $x=f(t)$, $y=g(t)$인 함수의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 t를 x, y의 매개변수라고 한다.

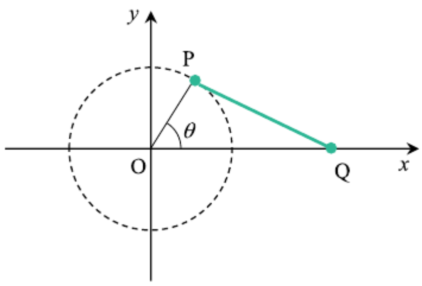
○ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표를 x라고 하면 x는 시각 t에 대한 함수이므로 $x=f(t)$로 놓을 수 있다. 함수 $f(t)$의 시각 t에서의 순간 변화율

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

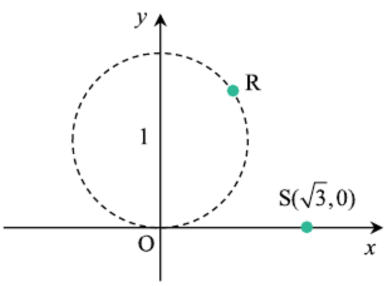
를 점 P의 시각 t에서의 순간 속도 또는 속도라고 한다.

○ 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $a\sin\theta + b\cos\theta\ (a \neq 0,\ b \neq 0)$를 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내는 것을 삼각함수의 합성이라고 한다. (단, $r>0$, $0 \le \alpha < 2\pi$)

[문제3-1] 다음 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 원점을 중심으로 하는 단위원 위에서 움직이고, 시각 t에서 $\theta=2t$이다. 점 Q는 양의 x축 위에서 움직이고, 이 두 점을 잇는 선분 PQ의 길이는 3으로 일정하다. 시각 $t=\frac{\pi}{12}$일 때, 점 Q의 순간 속도를 구하시오. [10점]



[문제3-2] 다음 그림과 같이 점 $\mathrm{R}(x, y)$는 중심이 $(0, 1)$인 단위원 위에 있고, 점 S는 $(\sqrt{3}, 0)$에 있다. 원점을 O라 할 때 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 길이가 최대가 되는 R의 좌표를 구하시오. [15점]



• 풀어보기

문제1. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=t-\frac{2}{t},\ y=2t+\frac{1}{t}$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P의 속력은? (2016년 11월 대수능)

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

문제2. $0<x<2\pi$일 때, 방정식 $\cos^2 x-\sin x=1$의 모든 실근의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (2016년 11월 대수능)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$이므로 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(3,1)$이다.

따라서 시각 $t=1$에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이다.

풀어보기(문제2) 정답 7

$\cos^2 x-\sin x=1$

$1-\sin^2 x-\sin x=1$

$\sin^2 x+\sin x=0$

$\sin x(\sin x+1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$

$x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

$\therefore p+q=2+5=7$

[문제 1] 대학발표 예시답안

(i) 1단계 첫 번째 시도에서 명중할 확률은 0.7이고, 이때 상금 30,000원을 받고 2단계로 넘어가면 총 2번의 화살을 쏠 기회를 부여받는다. 화살의 명중 개수를 X라고 하면 X는 이항분포 $B(2,\ 0.6)$을 따르고, 그에 따른 기댓값 $E(X)=2\times0.6=1.2$를 갖는다. 따라서, 2단계에서 받을 수 있는 상금의 기댓값은 $E(10{,}000X)=10{,}000\times1.2=12{,}000$(원)이다. 총 42,000원의 상금을 0.7의 확률로 받게 된다.

(ii) 1단계에서 두 번째 시도에서 명중할 확률은 0.3×0.7이고, 이때 상금 20,000원을 받고 2단계로 넘어가면 총 1번의 화살을 쏠 기회를 부여받는다. 화살의 명중 개수를 X라고 하면 X는 이항분포 $B(1,\ 0.6)$을 따르고, 그에 따른 기댓값 $E(X)=1\times0.6=0.6$을 갖는다. 따라서, 2단계에서 받을 수 있는 상금의 기댓값은 $E(10{,}000X)=10{,}000\times0.6=6{,}000$(원)이다. 총 26,000원의 상금을 0.3×0.7의 확률로 받게 된다.

(iii) 1단계 세 번째 시도에서 명중할 확률은 $0.3\times0.3\times0.7$이고, 이때 상금 10,000원을 받고 게임은 종료된다.

따라서 영희가 이 게임에 참여하여 받을 수 있는 상금의 기댓값은

$$0.7\times42{,}000+(0.3\times0.7)\times26{,}000+(0.3\times0.3\times0.7)\times10{,}000=35{,}490\text{(원)}$$

이다.

(다른 풀이)

모든 경우의 수와 그에 따른 상금을 나타내면 다음 표와 같다.

<table>
<tr><th>1단계</th><th rowspan="2">화살2 (확률)</th><th rowspan="2">화살3 (확률)</th><th rowspan="2">상금</th></tr>
<tr><th>화살1 (확률)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">불발(0.3)</td><td rowspan="2">불발(0.3)</td><td>불발(0.3)</td><td>0원</td></tr>
<tr><td>명중(0.7)</td><td>10,000원</td></tr>
<tr><td rowspan="3">명중(0.7)</td><td>2단계</td><td rowspan="2">20,000원</td></tr>
<tr><td>불발(0.4)</td></tr>
<tr><td>명중(0.6)</td><td>30,000원</td></tr>
<tr><td rowspan="6">명중(0.7)</td><td>2단계</td><td rowspan="2">화살2</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>화살1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">불발(0.4)</td><td>불발(0.4)</td><td>30,000원</td></tr>
<tr><td>명중(0.6)</td><td>40,000원</td></tr>
<tr><td rowspan="2">명중(0.6)</td><td>불발(0.4)</td><td>40,000원</td></tr>
<tr><td>명중(0.6)</td><td>50,000원</td></tr>
</table>

이때, 영희가 이 게임에 참여하여 받을 수 있는 상금의 기댓값은 다음과 같다.

$(0.3\times0.3\times0.3)\times0+(0.3\times0.3\times0.7)\times10,000+(0.3\times0.7\times0.4)\times20,000+$
$(0.3\times0.7\times0.6)\times30,000+(0.7\times0.4\times0.4)\times30,000+(0.7\times0.4\times0.6)\times40,000+$
$(0.7\times0.6\times0.4)\times40,000+(0.7\times0.6\times0.6)\times50,000=35,490$ (원)

[문제 2] 대학발표 예시답안

[문제2-1] x^3-x가 홀함수이므로

$$a_k=\int_{-k+1}^{k}(x^3-x+1)dx=\int_{-k+1}^{k}(x^3-x)dx+\int_{-k+1}^{k}1\,dx=\int_{k-1}^{k}(x^3-x)dx+2k-1$$

이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\int_0^{10}(x^3-x)dx+\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2450+100=2550$ 이다.

(다른 풀이)

$\displaystyle a_k=\int_{-k+1}^{k}(x^3-x+1)dx=\int_{-k+1}^{k}(x^3-x)dx+\int_{-k+1}^{k}1\,dx=k^3-\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{4}+2k-1$ 이다.

따라서 $\displaystyle a_k=\sum_{k=1}^{10}\left(k^3-\frac{3}{2}k^2+2k-\frac{3}{4}\right)=2550$ 이다.

[문제2-2] $\displaystyle y=\sin\left(k\pi\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+\frac{1}{2k}$ 의 근을 구하면 된다. 그래프를 구하기 위해 주어진 함수를 $\displaystyle f(x)=\sin(k\pi x)+\frac{1}{2k}$ 와 $\displaystyle g(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 의 합성함수 $f\circ g$로 생각할 수 있다. $g(x)$는 단조증가하면서 $-1<g(x)<1$이다. 따라서 $\displaystyle -k\pi<k\pi\frac{e^x-1}{e^x+1}<k\pi$이므로

$y=\sin\left(k\pi\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$은 $x=\pm\infty$에서 x축을 점근선으로 가지면서 $2k-1$개의 근을 갖는다.

$y=\sin\left(k\pi\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)+\dfrac{1}{2k}$은 위의 그래프를 $\dfrac{1}{2k}$만큼 y축의 방향으로 평행이동한 것이므로 근이 하나 더 늘어난다. 따라서 $n(E_k)=2k$이고, $k=1, 2, 3, 4, 5$이다.

[문제 3] 대학발표 예시답안

[문제3-1] 점 Q의 x좌표를 x라 하면, 선분 PQ의 길이가 3으로 일정하므로

$$(\cos\theta-x)^2+\sin^2\theta=3^2$$
$$x=\cos\theta+\sqrt{9-\sin^2\theta}=\cos(2t)+\sqrt{9-\sin^2(2t)}$$

이다.

따라서, 점 Q의 x축의 방향 속도는

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin(2t)-\frac{2\sin(2t)\cos(2t)}{\sqrt{9-\sin^2(2t)}}$$

이다.

그리고 시각 $t=\dfrac{\pi}{12}$일 때, 점 Q의 x축 방향 속도는

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{9-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}}=-1-\frac{2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{9-\frac{1}{4}}}=-1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$$

이다.

[문제3-2] 매개변수 θ를 이용하여 원 위의 점 R을 $(\cos\theta, \sin\theta+1)$로 나타낼 수 있다. 원점 O에서 점 R로의 벡터는 $\overrightarrow{OR}=(\cos\theta, \sin\theta+1)$이고, 원점 O 에서 점 $S(\sqrt{3}, 0)$으로의 벡터는 $\overrightarrow{OS}=(\sqrt{3}, 0)$이다.

두 벡터의 합이 $\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}=(\cos\theta+\sqrt{3}, \sin\theta+1)$이라고 할 때, 이 벡터의 길이의 제곱은 다음과 같다.

$$|\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}|^2=(\cos\theta+\sqrt{3})^2+(\sin\theta+1)^2=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta+5$$

위 식을 삼각함수의 합성 방법을 이용하여 정리하면,

$$|\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}|^2=5+4\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\cos\theta+\frac{2}{4}\sin\theta\right)=5+4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

이다.

이 벡터의 길이가 최대가 되려면, $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$, 즉 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$이다.

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$이고, $R\left(\cos\dfrac{\pi}{6}, 1+\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

49 중앙대학교(자연1) 수시[49)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 영어, 과탐(1과목 반영) 중 3개 영역 등급 합 5 이내, (안성-2개 영역 등급 합 5 이내) 한국사 4등급 이내	수학 (3문항, 5문제)	120분

[문제1] 스마트폰 제조사 A, B, C의 점유율과 제품의 판매가격은 다음과 같으며, 각 제조사에서는 단 한 종류의 제품만을 생산한다고 가정한다.

제조사	A	B	C
점유율(%)	60	25	15
판매가격(만원)	90	120	80

어떤 스마트폰 판매점에서는 매출 향상을 위해 위의 정보를 이용하고자 한다. 이 판매점에서는 손님이 방문하면 판매원이 손님에게 다음과 같은 순서로 제품 정보(제조사, 가격)를 설명한다.

Ⅰ. 점유율이 높은 A사의 제품에 대해 먼저 설명한다.
Ⅱ. 손님이 A사의 제품을 구입할 의사가 없으면, B사와 C사의 제품을 손님의 유형에 따라 다음 표의 확률로 선택해서 설명한다. 여기서 방문 확률은 각 유형의 손님이 이 판매점을 방문할 확률이다.

손님 유형		청소년	성인
방문확률		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
선택확률	B	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
	C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

이 판매점을 방문하는 손님 한 명에 대한 매출액의 기댓값을 구하시오.(단, 설명을 듣고 스마트폰을 구입할 확률은 점유율과 같다고 가정한다.)[20점]

49) 중앙대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 제시문 (가), (나), (다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ 이 서로 수직이면 $mm'=1$ 이다.

(나) 세 점 A, B, C 를 잡을 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 이다.

(다) $x=f(t)$, $y=g(t)$ 가 t 에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$ 이면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ 이다.

[문제 2-1] 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(1, 2^n)$ 에서 직선 $y=2^{n+1}x$ 에 내린 수선의 발을 Q_n 이라 하자. 점 Q_n 에서 직선 $y=2^n x$ 에 내린 수선의 발을 $\mathrm{R}_n=(a_n, b_n)$ 이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{74}{5}+K\right)$ 이다. K 의 값을 구하시오.[10점]

[문제 2-2] 좌표평면 위의 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원이 있다. 이 원이 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$ 과 접하면서 이동한다. 이때, 원의 중심의 자취를 곡선 $y=f(x)$ 라고 하자. 기울기가 1 이면서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.[15점]

[문제 3] 다음 제시문 (가), (나), (다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) x가 모든 실수의 값을 가질 때, 이차함수 $y=m(x-p)^2+q$(단, $m\neq 0$)는
 (i) $m>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.
 (ii) $m<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

(나) 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면 $A=BQ+R$가 성립한다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

(다) 삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 중선이라 하고, 세 중선의 교점을 무게중심이라고 한다. 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

[문제 3-1] 함수 $f(x)=x^4-12x^3+(2a+42)x^2-(12a+36)x+(2a^2+6a+11)$이 최솟값 28을 가지게 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.[10점]

[문제 3-2] 자연수 k에 대해 점 A_k의 좌표는 $\left({}_{30}\mathrm{C}_k, \dfrac{(-1)^k{}_{30}\mathrm{C}_k}{k+1}\right)$이다.

점A_{3k-2}, A_{3k-1}, A_{3k}를 꼭짓점으로하는 삼각형 T_k의 무게중심을 $\mathrm{M}_k(x_k, y_k)$라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} x_k$와 $\sum_{k=1}^{10} y_k$의 값을 각각 구하시오.[15점]

• 풀어보기

문제1. 무게가 1인 추 6개, 무게가 2인 추 3개와 비어 있는 주머니 1개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음의 시행을 한다. (단, 무게의 단위는 g이다.)

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 무게가 1인 추 1개를 주머니에 넣고, 눈의 수가 3 이상이면 무게가 2인 추 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 반복하여 주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)\ (x=3,\ 4,\ 5,\ 6)$을 구하는 과정이다.

(ⅰ) $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\boxed{\quad(가)\quad}$

(ⅱ) $X=4$인 사건은

세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와

세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$\mathrm{P}(X=4)=\boxed{\quad(나)\quad}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$

(ⅲ) $X=5$인 사건은

네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와

네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+\boxed{\quad(다)\quad}$

(ⅳ) $X=6$인 사건은 다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $\frac{ab}{c}$의 값은? (2018 대입 대수능 가형)

① $\frac{4}{9}$　② $\frac{7}{9}$　③ $\frac{10}{9}$　④ $\frac{13}{9}$　⑤ $\frac{16}{9}$

문제2. x에 대한 방정식 $\cos x=\frac{1}{(2n-1)\pi}x\ (n=1,2,3,\cdots)$의 양의 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}$의 값을 구하시오. (2011. 03. 전국연합 A형)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ①

(i) $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\boxed{\frac{8}{27}}$$

(ii) $X=4$인 사건은

세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 추를 넣는 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$\mathrm{P}(X=4)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boxed{\frac{4}{27}}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(iii) $X=5$인 사건은

네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

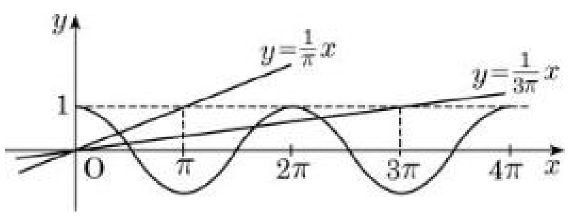
$$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+\boxed{\frac{8}{81}}$$

(iv) $X=6$인 사건은

다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로 $\mathrm{P}(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

$a=\frac{8}{27}$, $b=\frac{4}{27}$, $c=\frac{8}{81}$이다. 따라서 $\frac{ab}{c}=\frac{\frac{8}{27}\times\frac{4}{27}}{\frac{8}{81}}=\frac{4}{9}$

풀어보기(문제2) 정답 120



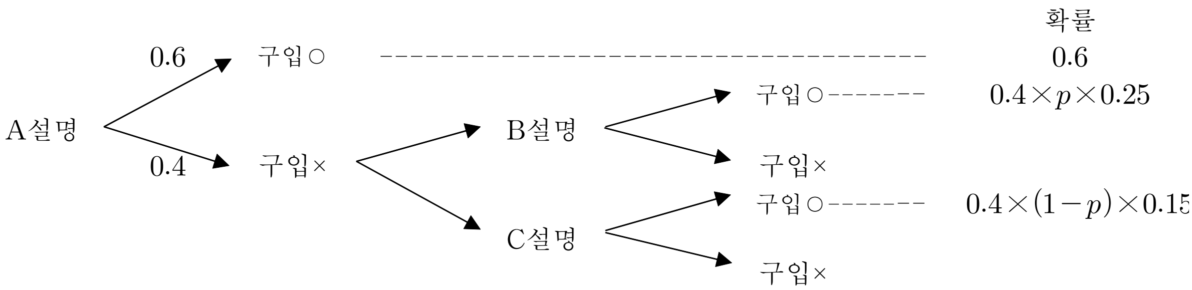
그림에서 $a_n=2n-1\,(n\geq 1)$

$$\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}=\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{2n(2n+2)}=\sum_{n=1}^{24}\frac{125}{n(n+1)}=125\sum_{n=1}^{24}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=120$$

[문제1] 대학발표 예시답안

[1.1]

판매점에 방문한 손님이 각 제조사의 제품을 구입할 확률은 다음과 같이 계산할 수 있다.



위에서 구한 확률을 사용하면 B를 선택할 확률이 p일 때, 이 판매점의 매출액의 기댓값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$90\times0.6+120\times0.4\times p\times0.25+80\times0.4\times(1-p)\times0.15$$

손님이 청소년일 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 이때 B를 선택할 확률은 $p=\frac{2}{3}$이므로 매출액의 기댓값은 $90\times0.6+120\times0.4\times\frac{2}{3}\times0.25+80\times0.4\times\frac{1}{3}\times0.15=54+8+1.6=63.6$이다.

손님이 성인일 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 이때 B를 선택할 확률은 $p=\frac{3}{4}$이므로 매출액의 기댓값은 $90\times0.6+120\times0.4\times\frac{3}{4}\times0.25+80\times0.4\times\frac{1}{4}\times0.15=54+9+1.2=64.2$이다.

따라서, 이 판매점의 이 날 오후 매출액의 기댓값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{3}\times63.6+\frac{2}{3}\times64.2=64\text{만원}$$

[1.1] 다른 풀이 대학발표 예시답안

판매점에 방문한 손님이 A를 구입할 확률은 0.6이다.

A를 구입하지 않고 다른 제품을 구입하는 경우는 청소년이 B를 구입하는 경우, 청소년이 C를 구입하는 경우, 성인이 B를 구입하는 경우, 성인이 C를 구입하는 경우의 4가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

청소년이 B를 구입할 확률은 $0.4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times0.25=\frac{1}{45}$이다.

청소년이 C를 구입할 확률은 $0.4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times0.15=\frac{1}{150}$이다.

성인이 B를 구입할 확률은 $0.4\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times0.25=\frac{1}{20}$이다.

성인이 C를 구입할 확률은 $0.4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times0.15=\frac{1}{100}$이다.

따라서, 이 판매점의 이 날 오후 매출액의 기댓값은 다음과 같다.

$$90\times0.6+120\times\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{20}\right)+80\times\left(\frac{1}{150}+\frac{1}{100}\right)=54+120\times\frac{13}{180}+80\times\frac{1}{60}=54+\frac{26}{3}+\frac{4}{3}=64\text{만원}$$

[문제2] 대학발표 예시답안

[2.1]

$(1,2^n)$을 지나고 기울기 $-\dfrac{1}{2^{n+1}}$인 직선과 $y=2^{n+1}x$의 교점을 구하면

$\mathrm{Q}_n=\left(\dfrac{2^{2\mathrm{n}+1}+1}{2^{2\mathrm{n}+2}+1},\ 2^{\mathrm{n}+1}\dfrac{2^{2\mathrm{n}+1}+1}{2^{2\mathrm{n}+2}+1}\right)$이다. 다시 Q_n을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2^n}$인 직선과

$y=2^nx$ 교점의 x좌표를 구하면 $a_n=\dfrac{2^{2n+1}+1}{2^{2n+2}+1}\cdot\dfrac{2^{2n+1}+1}{2^{2n}+1}$이고 식을 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

$$a_n=\frac{2^{2n+1}+1}{2^{2n+2}+1}\cdot\frac{2^{2n+1}+1}{2^{2n}+1}=\frac{4\cdot4^{2n}+4\cdot4^n+1}{4\cdot4^{2n}+5\cdot4^n+1}=1-\frac{4^n}{4\cdot4^{2n}+5\cdot4^n+1}$$

$$=1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n+1}-\frac{1}{4^{n+1}+1}\right)$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}=5-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4^6+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{74}{5}+\frac{1}{4^6+1}\right)$이고, $K=\dfrac{1}{4^6+1}=\dfrac{1}{4097}$이다.

[2.2]

좌표평면의 원점을 O라 하자. $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$위의 동점을 P라 하고 P에서 길이 1인 법선벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 구하면 원의 중심의 자취는 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$이다. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2+1\right)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}(t,\ -1)$이므로 원의 중심의 자취 $\mathrm{Q}(x,y)$는 매개변수로 다음과 같이 나타내어진다.

$(x,y)=\left(t+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}},\ \dfrac{1}{2}t^2+1-\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)$에 대하여 매개함수 미분을 하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\left(1+\dfrac{1}{(t^2+1)^{2/3}}\right)}{1+\dfrac{1}{(t^2+1)^{2/3}}}=t$이다. 기울기가 1이면 $t=1$이므로 접점은

$\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x+\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}$이다.

[문제3] 대학발표 예시답안

[3.1]

a에 대한 식으로 묶으면 원래 식은 $(x^4-12x^3+42x^3-36x+11)+2a(x^2-6x+3)+2a^2$이 된다. 한편, x에 대한 식 $x^4-12x^3+42x^3-36x+11$을 x^2-6x+3으로 나누면

$x^4-12x^3+42x^3-36x+11=(x^2-6x+3)^2+2$ 이므로, 원래 식은

$(x^2-6x+3)^2+2a(x^2-6x+3)+2a^2+2$ 와 같게 된다. 따라서 완전제곱식으로 묶을 수 있고,

그 결과는 $(x^2-6x+3+a)^2+a^2+2=\{(x-3)^2+a-6\}^2+a^2+2$ 가 된다.

1) $a\ge 6$: 이 경우 $x=3$ 에서 최소이고, 최솟값은 $(a-6)^2+a^2+2=2a^2-12a+38$ 이다.

$2a^2-12a+38=28$ 에서 $a^2-6a+5=(a-5)(a-1)=0$, 따라서 a는 1이거나 5가 될 수 있다. 그러나 $a\ge 6$이므로 이는 모순이고, 따라서 이 경우 가능한 a가 존재하지 않는다.

2) $a<6$: 이 경우 $x=3\pm\sqrt{6-a}$ 에서 최소이고, 최솟값은 a^2+2 이다. 따라서

$a^2+2=28$ 에서 가능한 a는 $\pm\sqrt{26}$. 이는 위의 조건을 만족한다.

따라서 가능한 a의 값은 $\pm\sqrt{26}$ 이다.

[3.1] 다른 풀이 대학발표 예시답안

준식 $f(x)$를 x에 대해 미분하면 $f'(x)=4x^3-36x^2+2(2a+42)x-(12a+36)$ 이 되고,

인수분해하면 $f'(x)=4(x-3)(x^2-6x+a+3)=4(x-3)\{(x-3)^2+a-6RIGHT$ 이 된다.

1) $a\ge 6$: 이 경우 $x=3$ 에서만 $f'(x)=0$ 이 될 수 있고, 부호를 조사하면 $f(x)$는 $x=3$ 에서 극솟값, 더 나아가 최솟값을 가진다. 이 경우 $x=3$을 대입하면

$f(3)=2a^2-12a+38=28$ 이 되게 하는 a는 $1, 5$ 이고, 이는 $a\ge 6$에 모순이므로, 이 경우 가능한 a는 없다.

2) $a<6$: 이 경우 $f(x)$는 $x=3\pm\sqrt{6-a}$ 에서 극솟값을 가진다. $f(3\pm\sqrt{6-a})$ 을 계산하기 위하여 $3\pm\sqrt{6-a}$ 를 근으로 갖는 이차식 $x^2-6x+3+a$ 으로 $f(x)$를 나누면

$f(x)=(x^2-6x+3+a)^2+a^2+2$ 이 되고, $f(3\pm\sqrt{6-a})=a^2+2$ 가 되어 함수 $f(x)$는 $x=3\pm\sqrt{6-a}$ 에서 최솟값을 가진다. 이때 $a^2+2=28$ 인 a를 구하면 $a=\pm\sqrt{26}$ 이 되고 위의 조건을 만족한다. 따라서 가능한 a의 값은 $\pm\sqrt{26}$ 이다.

[3.2]

1) $\sum_{k=1}^{10} x_k$: $\sum_{k=1}^{10} x_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{{}_{30}\mathrm{C}_{3k-2}+{}_{30}\mathrm{C}_{3k-1}+{}_{30}\mathrm{C}_{3k}}{3}\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}{}_{30}\mathrm{C}_k x^k$ 에서

$x=1$ 을 대입하여 위의 값이 $\frac{1}{3}(2^{30}-1)$ 이 됨을 알 수 있다.

2) $\sum_{k=1}^{10} y_k$: $\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1}$ 을 이용하면,

$$\sum_{k=1}^{10} y_k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{30}\frac{{}_{30}\mathrm{C}_k}{k+1}(-1)^k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{30}\frac{{}_{31}\mathrm{C}_{k+1}}{31}(-1)^k=-\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{31}\frac{{}_{31}\mathrm{C}_k}{31}(-1)^k$$ 이 되고,

$(1+x)^{31}$ 에 대한 이항정리를 적용하면

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{31}\frac{{}_{31}\mathrm{C}_k}{31}(-1)^k=-\frac{1}{3}\left(0-\frac{1}{31}+\frac{31}{31}\right)=-\frac{10}{31}$$ 이다.

50 중앙대학교(자연2) 수시[50)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	국어, 수학(가), 영어, 과탐(2과목평균) 중 4개 영역 등급 합 5 이내 한국사 4등급 이내	수학 (3문항, 5문제)	120분

[문제 1] 우리나라 학생의 장래 희망직업에 대하여 다음의 상황들을 고려하자.

(가) 우리나라 학생의 희망직업 선호도에 대하여 다음과 같은 사실이 알려져 있다고 하자.

- 학생의 희망직업 1위와 보호자가 희망하는 학생의 직업 1위는 모두 교사이다.
- 학생의 희망직업이 교사일 확률은 $\frac{1}{5}$이며, 보호자가 희망하는 학생의 직업이 교사일 확률은 $\frac{3}{8}$이다.
- 학생의 희망직업은 그 보호자가 희망하는 학생의 직업에 영향을 받는다.
- 보호자가 희망하는 학생의 직업이 교사일 때, 그 학생의 희망직업이 교사일 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

(나) 한 연구기관에서는 학생과 보호자의 희망직업 일치도에 대한 인식조사 연구를 수행하고자한다. 이 연구에서는 임의로 학생과 그 보호자 20쌍을 선택하여 그룹 1과 그룹 2로 10쌍씩 임의로 나누고, 그룹 1에서는 학생에게만 희망직업을 조사하고 그룹 2에서는 보호자에게만 학생의 희망직업을 조사하였다. 그 결과 희망직업이 교사인 경우가 각 그룹에서 2쌍씩 관측되었다.

제시문 (가)로부터 학생의 희망직업이 교사일 때 그 보호자가 희망하는 학생의 직업이 교사일 확률을 구하고, 제시문(나)에서 관측된 4쌍 중에서 학생과 보호자의 희망직업이 일치하는 경우가 적어도 2쌍 이상 있을 확률을 구하시오. [20점]

50) 중앙대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 제시문 (가)와 (나)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 다음이 성립한다.

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

(나) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지고 a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이 성립한다.

[문제2-1] 다음 극한을 구하시오. [10점]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4\cos^2\left(\frac{\pi k^2}{4n^2}\right)}$$

[문제 2-2] 두 실수 x, y가 $x+y=8$, $-84\le xy\le -65$를 만족한다. 다음 식의 최댓값 M과 최솟값 m을 구하시오. [15점]

$$(x^2+y^2+3xy)e^y$$

[문제 3] 다음 제시문 (가)-(라)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

(나) 두 공간벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$일 때 다음이 성립한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

(다) 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$가 각각 u, x에 대하여 미분가능하면 합성함수 $y=f(g(x))$도 x에 대하여 미분가능하고, 그 도함수는 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 이다.

(라) x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

[문제 3-1] 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구를 평면 $x+y+z=1$로 자를 때 생기는 단면을 F라 하자. 도형 F의 평면 $(t-1)x+ty+(t+1)z=1$ 위로의 정사영을 F'이라 하고, F'의 넓이를 $S(t)$라고 할 때, $\int_{-1}^{2} S(t)dt$의 값을 구하시오.(단, t는 실수이다.) [10점]

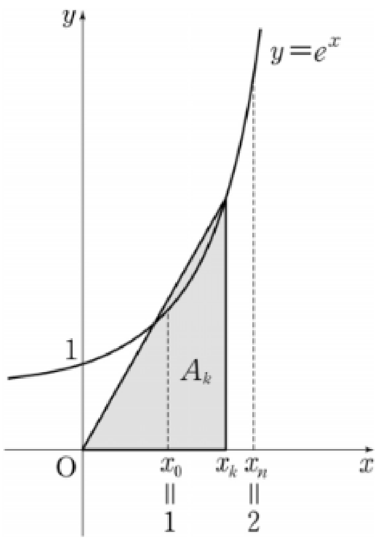
[문제 3-2] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표는 $(t, -3)$이다. 곡선 $y=\frac{\sin x}{x^2+1}$ 위의 점 Q(x, y)는 점 P와 거리를 5로 유지하며 연속적으로 움직인다. $t=4$일 때 Q의 좌표가 $(0, 0)$이다. $t=\pi+4$일 때, 점 Q의 속도 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$를 구하시오. [15점]

• 풀어보기

문제1. 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르면 1개의 동전을 3번 던지고, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같으면 1개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 2번 나올 확률은?(2013 대입 대수능 A형)

① $\frac{9}{28}$　　② $\frac{19}{56}$　　③ $\frac{5}{14}$　　④ $\frac{3}{8}$　　⑤ $\frac{11}{28}$

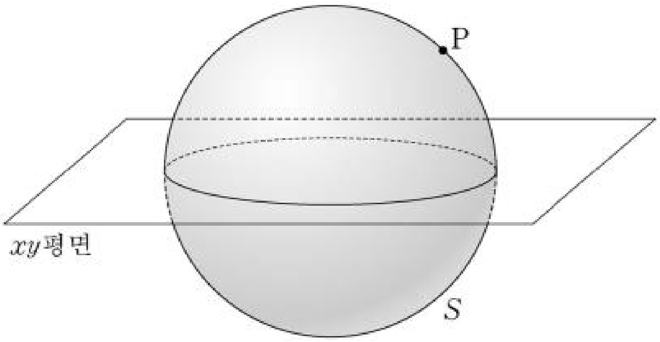
문제2. 함수 $f(x)=e^x$ 이 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=2$ 라 하자. 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$ 의 값은?(2014 대입 6월 모평 B형)



① $\frac{1}{2}e^2-e$　　② $\frac{1}{2}(e^2-e)$　　③ $\frac{1}{2}e^2$　　④ e^2-e　　⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$

문제3. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2015 대입 대수능 B형)

> (가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
> (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ①

(i) 꺼낸 공의 색이 다른 경우

꺼낸 공의 색이 다르고, 1개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_1}{{}_7C_2} \times {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{21} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{14}$$

(ii) 꺼낸 공의 색이 같은 경우

꺼낸 공의 색이 같고, 1개의 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_4C_2 + {}_3C_2}{{}_7C_2} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{21} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{28}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{3}{14} + \frac{3}{28} = \frac{9}{28}$

풀어보기(문제2) 정답 ③

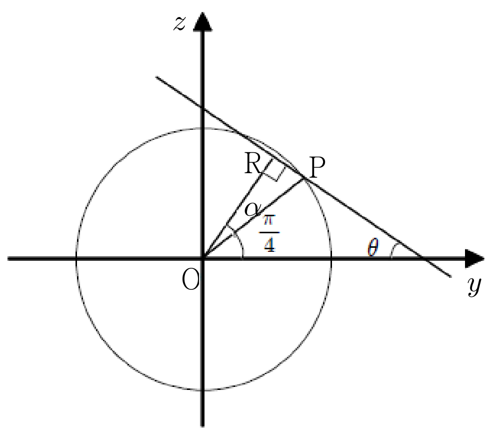
$x_k = 1 + \frac{k}{n}$라 하면 $A_k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx = \frac{1}{2}\left\{[xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right\} = \frac{1}{2}e^2$$

풀어보기(문제3) 정답 9

원 C를 포함하는 평면과 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $\cos\pi\theta$이므로 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되기 위해서는 θ가 최소가 되어야 한다. 따라서 원 C를 포함하는 평면은 yz 평면과 수직이고 원 C 위의 임의의 점의 z좌표는 점 P 의 z좌표보다 크거나 같다. 이때 yz 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



원 C의 중심을 점 R, $\angle \mathrm{POR}=\alpha$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{RP}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=7$이다. 따라서 $\sin\alpha=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ 이다. 그러므로

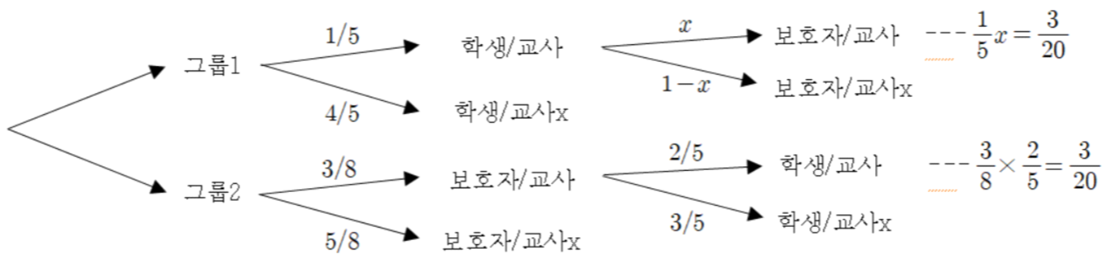
$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{5\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{5}$$

원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{4}{5}\pi$이므로 $p+q=9$이다.

[문제1] 대학발표 예시답안

[1.1]

학생과 그 보호자 20쌍을 임의로 그룹 1, 2에 각각 10쌍씩 나누고 그룹 1에서는 학생에게만 희망직업을 조사하고, 그룹 2에서는 보호자에게만 희망하는 학생의 직업을 조사하는 경우 나올 수 있는 결과는 다음의 그림과 같다.



그룹 1에서는 학생에게만 희망직업을 조사하였고 그 결과 희망직업이 교사인 경우가 2쌍이 관측되었다. 이때 학생의 희망직업이 교사일 때 보호자가 희망하는 학생의 직업이 교사일 확률 x는 위의 그림에서 $x=\dfrac{3}{20}\times 5=\dfrac{3}{4}$ 이다.

그룹 2에서는 보호자에게만 희망하는 학생의 직업을 조사하였고 그 결과 희망직업이 교사인 경우가 2쌍이 관측되었다. 이때 학생의 직업이 교사일 확률은 문제에 주어져 있는 대로 $\dfrac{2}{5}$ 이다.

그룹 1, 2에서 학생과 그 보호자의 희망직업이 일치하는 쌍의 수를 각각 X, Y라고 하면, X와 Y는 각각 이항분포 $B\left(2, \dfrac{3}{4}\right)$와 $B\left(2, \dfrac{2}{5}\right)$를 따른다.

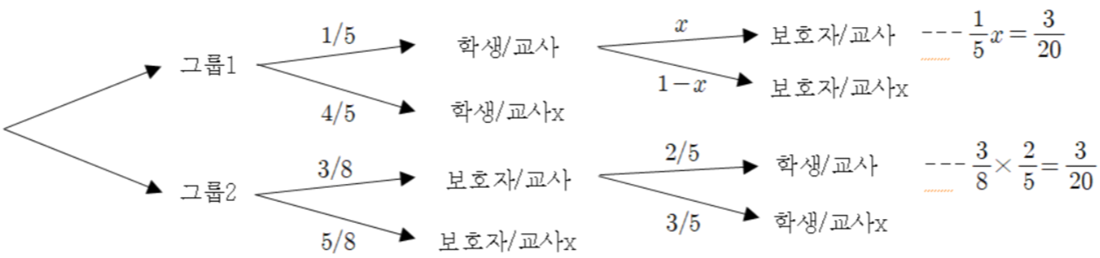
구하는 확률은 X와 Y의 합이 2이상일 확률이고 그 확률은 1에서 X와 Y의 합이 1이하일 확률을 빼면 된다. 그리고 X와 Y의 합이 1이하일 확률은 $X=Y=0$일 확률, $X=1$이고 $Y=0$일 확률, $X=0$이고 $Y=1$일 확률의 합과 같다. 따라서 구하는 확률은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$1-\left\{{}_2C_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^2\times{}_2C_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^2+{}_2C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\times{}_2C_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^2+{}_2C_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^2\times{}_2C_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^1\right\}$$

$$=1-\left(\frac{1}{16}\times\frac{9}{25}+2\times\frac{3}{16}\times\frac{9}{25}+\frac{1}{16}\times2\times\frac{6}{25}\right)=1-\frac{75}{400}=\frac{13}{16}$$

[1.1] 다른 풀이 대학발표 예시답안

학생과 그 보호자 20쌍을 임의로 그룹 1, 2에 각각 10쌍씩 나누고 그룹 1에서는 학생에게만 희망직업을 조사하고, 그룹 2에서는 보호자에게만 희망하는 학생의 직업을 조사하는 경우 나올 수 있는 결과는 다음의 그림과 같다.



그룹 1에서는 학생에게만 희망직업을 조사하였고 그 결과 희망직업이 교사인 경우가 2쌍이 관측되었다. 이때 학생의 희망직업이 교사일 때 보호자가 희망하는 학생의 직업이 교사일 확률 x는 위의 그림에서 $x=\frac{3}{20}\times5=\frac{3}{4}$ 이다.

그룹 2에서는 보호자에게만 희망하는 학생의 직업을 조사하였고 그 결과 희망직업이 교사인 경우가 2쌍이 관측되었다. 이때 학생의 직업이 교사일 확률은 문제에 주어져 있는 대로 $\frac{2}{5}$ 이다.

그룹 1, 2에서 관측된 4쌍 중에서 학생과 그 보호자의 희망직업이 일치하는 경우가 최소한 2쌍 이상일 확률은 1쌍 이하일 확률을 계산하여 1에서 빼면 된다. 그리고 그룹 1, 2에서 관측된 4쌍 중에서 희망직업이 일치하는 경우가 1쌍 이하일 확률은 둘 다 한 쌍도 없을 확률, 그룹 1에서만 1쌍이 일치할 확률, 그룹 2에서만 1쌍이 일치할 확률의 합이다. 따라서 구하는 확률은 다음과 같이 계산된다.

$$1-\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times2\times\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\left(\frac{3}{5}\right)^1\right\}$$
$$=1-\left(\frac{1}{16}\times\frac{9}{25}+2\times\frac{3}{16}\times\frac{9}{25}+\frac{1}{16}\times2\times\frac{6}{25}\right)=1-\frac{75}{400}=\frac{13}{16}$$

[문제2] 대학발표 예시답안

[2.1]

위 식을 변형하면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}\frac{1}{n}$ 이 되고,

구분구적법을 쓰면 $\int_0^1 \frac{x^3}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)}dx$ 와 같다.

$y=x^2$ 로 치환하면 $\int_0^1 \frac{x^3}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)}dx=\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}y}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}dy$ 이 되고,

$z=\frac{\pi}{4}y$ 로 치환하면 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2}{\pi}z}{\cos^2 z}\frac{4}{\pi}dz=\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\cos^2 z}dz$ 가 된다.

$\frac{d(\tan z)}{dz}=\frac{1}{\cos^2 z}$ 에 착안하면 위의 적분은 부분적분을 적용하면 간단하게 되고, 계산하면 $\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{z}{\cos^2 z}dz=\frac{8}{\pi^2}\left\{[z\tan z]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan z\,dz\right\}$ 이 된다. 마지막으로 $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ 이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan z\,dz=[-\ln(\cos z)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$ 가 되고, 이를 적용하면 $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\ln 2$ 의 값이 얻어진다.

[2.2]

$x+y=8$에서 $y=8-x$, 이를 $-84\le xy\le -65$에 대입하면 두 이차 부등식 $x^2-8x-84\le 0$, $x^2-8x-65\ge 0$ 이 얻어진다. 이를 풀면 $-6\le x\le 14, x\ge 13$ 이거나 $x\le -5$ 의 범위가 얻어지고 따라서 x 의 범위는 $13\le x\le 14$, $-6\le x\le -5$ 가 된다.

한편, 준식을 x 에 대해 정리하면 $f(x)=(-x^2+8x+64)e^{8-x}$ 가 된다. 이를 x 에 대해 미분하면 $(x^2-10x-56)e^{8-x}=(x-14)(x+4)e^{8-x}$ 가 되므로 준식은 $x=14$ 에서 극솟값, $x=-4$ 에서 극댓값을 가진다.

따라서 x 의 범위를 고려하면 최댓값은 $x=-5$ 아니면 $x=13$ 인 경우 중 하나이고, 값을 비교하면 $x=13$ 일 때 $f(13)=-e^{-5}$ 의 값이 최댓값이 된다. 따라서 $M=-e^{-5}$

같은 논리로, 최솟값은 $x=-6$ 아니면 $x=14$ 인 경우 중 하나이고, 값을 비교하면 $x=-6$ 일 때 $f(-6)=-20e^{14}$ 의 값이 최솟값이 된다. 따라서 $m=-20e^{14}$.

[2.2] 다른 풀이 대학발표 예시답안

$x+y=8$에서 $x=8-y$, 이를 $-84\le xy\le -65$에 대입하면 두 이차 부등식 $y^2-8y-84\le 0$, $y^2-8y-65\ge 0$ 이 얻어진다. 이를 풀면 $-6\le y\le 14, y\ge 13$ 이거나 $y\le -5$ 의 범위가 얻어지고 따라서 y의 범위는 $13\le y\le 14$, $-6\le y\le -5$ 가 된다.

한편, 준식을 y에 대해 정리하면 $g(y)=(-y^2+8y+64)e^y$ 가 된다. 이를 y에 대해 미분하면 $(-y^2+6y+72)e^y=-(y-12)(y+6)e^y$ 가 되므로 준식은 $y=-6$ 에서 극솟값, $y=12$ 에서 극댓값을 가진다.

따라서 y 의 범위를 고려하면 최댓값은 $y=13$ 아니면 $y=-5$ 인 경우 중 하나이고, 값을

비교하면 $y=-5$일 때 $g(-5)=-e^{-5}$의 값이 최댓값이 된다. 따라서 $M=-e^{-5}$
같은 논리로, 최솟값은 $y=14$아니면 $y=-6$인 경우 중 하나이고, 값을 비교하면 $y=14$일 때 $g(14)=-20e^{14}$의 값이 최솟값이 된다. 따라서 $m=-20e^{14}$.

[문제3] 대학발표 예시답안

[3.1]

원점과 평면 $x+y+z=1$사이의 거리는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 따라서 단면 F의 넓이는 $\frac{2}{3\pi}$이다. 또한, 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 두 법선벡터가 $(1,1,1)$과 $(t-1,t,t+1)$이므로 내적을 이용하면 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3t^2+2}}$을 얻는다. 정사영의 넓이는 두 평면이 이루는 예각을 고려하므로 $S(t)=\frac{2}{3}\pi\frac{\sqrt{3}\,|t|}{\sqrt{3t^2+2}}$이다. 적분을 계산하면

$\int_{-1}^{2}S(t)dt=\frac{2}{3}\pi\left(2\int_0^1\frac{\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3t^2+2}}dt+\int_1^2\frac{\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3t^2+2}}dt\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(\sqrt{14}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})$이다.

[3.2]

$(x-t)^2+(y+3)^2=25$이고 $y=\frac{\sin x}{x^2+1}$을 대입하면 $(x-t)^2+(\frac{\sin x}{x^2+1}+3)^2=25$이다. 음함수 미분하면 $(x-t)\left(\frac{dx}{dt}-1\right)+\left(\frac{\sin x}{x^2+1}+3\right)\left(\frac{\cos x(x^2+1)-2x\sin x}{(x^2+1)^2}\right)\frac{dx}{dt}=0$이다.

$t=\pi+4$일 때 $x=\pi$, $y=0$이므로 위 식에 대입하면 $t=\pi+4$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{4\pi^2+4}{4\pi^2+7}$이다. $y=\frac{\sin x}{x^2+1}$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{\cos x(x^2+1)-2x\sin x}{(x^2+1)^2}\frac{dx}{dt}$이고 $t=\pi+4$에서 계산하면, $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{4\pi^2+4}{4\pi^2+7},-\frac{4}{4\pi^2+7}\right)$이다.

[3.2] 다른 풀이 대학발표 예시답안

점 Q가 문제의 조건으로부터 식 $y=\frac{\sin x}{x^2+1}$와 $(x-t)^2+(y+3)^2=25$을 만족한다. 음함수 미분하면 다음 두 식을 얻는다.

$$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{\cos x(x^2+1)-2x\sin x}{(x^2+1)^2}\right)\frac{dx}{dt},\ (x-t)\left(\frac{dx}{dt}-1\right)+(y+3)\frac{dy}{dt}=0$$

$t=\pi+4$일 때 $x=\pi$, $y=0$이므로 위의 두 식에 $t=\pi+4$, $(x,y)=(\pi,0)$을 대입하여 정리하면 $t=\pi+4$일 때, 점 Q의 속도는 $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{4\pi^2+4}{4\pi^2+7},-\frac{4}{4\pi^2+7}\right)$이다.

51 한양대학교 모의(1차)[51)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(2문항)	90분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (50점)

1. 양의 실수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{8+x}{3}-\sqrt[3]{15x}$ 의 최솟값을 구하시오.

2. 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)=\dfrac{10+x}{5}-\sqrt[5]{24x}>0$ 임을 보이시오.

3. 임의의 양의실수 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2017}에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{a_1+\cdots+a_{2017}}{2017}\geq \sqrt[2017]{a_1\cdots a_{2017}}$$

51) 한양대학교 홈페이지

[문제 2번] 양의 실수 a, b에 대하여 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. $a^2 > b$일 때, 다음 세 실수의 크기를 비교하시오.

$$a-\sqrt{a^2-b}\,,\ \sqrt{a^2+b}-a,\ \frac{b}{2a}$$

2. $a^3 > b$일 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a < a-\sqrt[3]{a^3-b}$$

3. 두 절댓값 $\left|75-\sqrt{5627}\right|$ 과 $\left|7-\sqrt[3]{341}\right|$ 의 크기를 비교하시오.

• 풀어보기

문제1. 다음은 모든 실수 x에 대하여 $2x-1 \geq ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값을 구하는 과정이다.

> $f(x)=(2x-1)e^{-x^2}$이라 하자.
>
> $f'(x)=\left(\boxed{\quad (가) \quad}\right)\times e^{-x^2}$
>
> $f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$
>
> 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면
>
> 함수 $f(x)$의 극솟값은 $\boxed{\quad (나) \quad}$ 이다.
>
> 또한 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로
>
> 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면
>
> 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{\quad (나) \quad}$ 이다.
>
> 따라서 $2x-1 \geq ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값은
>
> $\boxed{\quad (나) \quad}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(x)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $g(2)\times p$의 값은?

(2016. 전국연합)

① $\frac{10}{e}$　　② $\frac{15}{e}$　　③ $\frac{20}{\sqrt[4]{e}}$　　④ $\frac{25}{\sqrt[4]{e}}$　　⑤ $\frac{30}{\sqrt[4]{e}}$

문제2. 함수 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(2016. 전국연합)

> < 보 기 >
>
> ㄱ. $f'(0)=1$
>
> ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ 이다.
>
> ㄷ. $0<a<b<1$일 때, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$이다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ③

$f(x)=(2x-1)e^{-x^2}$이라 하자.

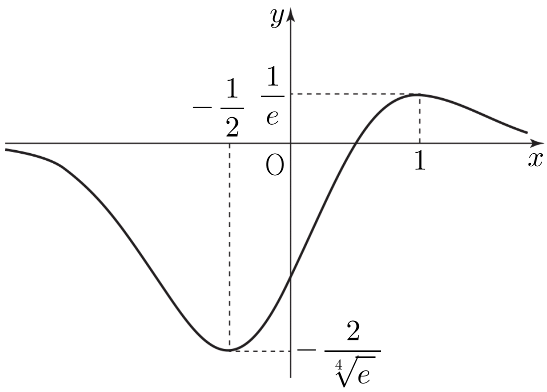
$$f'(x)=\left(\boxed{-4x^2+2x+2}\right)\times e^{-x^2}=-2(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 $\boxed{-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}}$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면



이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}}$이다.

$(2x-1)e^{-x^2}\geq-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$이므로 $k\leq-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$

따라서 $2x-1\geq ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값은 $\boxed{-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}}$이다.

$\therefore\ g(x)=-4x^2+2x+2,\ p=-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$

따라서 $g(2)\times p=\dfrac{20}{\sqrt[4]{e}}$이다.

풀어보기(문제2) 정답 ③

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x)(x^2+1)^2-(1-x^2)\{2(x^2+1)\cdot 2x\}}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2+1)\{-(x^2+1)-2(1-x^2)\}}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 에서 $f'(0)=\dfrac{1}{1}=1$ (참)

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이고 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값 $-\dfrac{1}{2}$ 을 갖고 $x=1$ 에서 극댓값 $\dfrac{1}{2}$ 을 갖는다.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$$

$x>0$ 일 때, $f(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이면서 최소이다. 따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\ge -\dfrac{1}{2}$ 이다. (참)

ㄷ. $f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ 이므로 $f''(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$ 이다.

$f'(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{8}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\dfrac{1}{8}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f'(x)$ 는 $x<-\sqrt{3}$ 또는 $0<x<\sqrt{3}$ 에서 감소하고, $-\sqrt{3}<x<0$ 또는 $x>\sqrt{3}$ 에서 증가하므로 함수 $f'(x)$ 는 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 감소한다. 따라서 $0<x<1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$f'(x)<f'(0)=1$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 $0<a<b<1$인 모든 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 c가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<b<1$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(0)=1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[문제 1] 대학발표 예시답안

1.

$f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{15}{x^2}}\right)$이므로 $f(x)$는 $x=\sqrt{15}$에서 최솟값

$$f(\sqrt{15})=\frac{8+\sqrt{15}}{3}-\sqrt[3]{15\sqrt{15}}=\frac{8+\sqrt{15}}{3}-\sqrt{15}=\frac{8-2\sqrt{15}}{3}$$

을 갖는다.

2.

$g'(x)=\dfrac{1}{5}\left(1-\sqrt[5]{\dfrac{24}{x^4}}\right)$이고 $g''(x)=\dfrac{4}{25}\sqrt[5]{\dfrac{24}{x^9}}$ 이므로 $g(x)$는 $x=\sqrt[4]{24}$에서 최솟값

$$g(\sqrt[4]{24})=\frac{10+\sqrt[4]{24}}{5}-\sqrt[5]{24\sqrt[4]{24}}=\frac{10+\sqrt[4]{24}}{5}-\sqrt[4]{24}=\frac{10-4\sqrt[4]{24}}{5}$$

을 갖는다. 따라서 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)>0$

3.

1, 2번의 내용을 토대로 함수 $h_{2017}(x)=\dfrac{a_1+\cdots+a_{2016}+x}{2017}-\sqrt[2017]{a_1\cdots a_{2016}x}$ 를 생각해보면

$$h'_{2017}(x)=\frac{1}{2017}\left(1-\sqrt[2017]{\frac{a_1\cdots a_{2016}}{x^{2016}}}\right)$$

이고

$$h''_{2017}(x)=\frac{2016}{(2017)^2}\sqrt[2017]{\frac{a_1\cdots a_{2016}}{x^{4033}}}$$

이므로 $h_{2017}(x)$는 $x=\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$ 에서 최솟값

$$\begin{aligned}h_{2017}(\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}})&=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}{2017}-\sqrt[2017]{a_1\cdots a_{2016}\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}\\&=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}{2017}-\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}\end{aligned}$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}-2016\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}{2017}$$

을 갖는다. 따라서 $\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$ 이면 모든 양의 실수 x에 대하여 $h_{2017}(x)\geq 0$이다. 즉, 임의의 양의 실수 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2016}$에 대하여

$$\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$$

임을 보이면 충분하다. 다시 함수 $h_{2016}(x)=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+x}{2017}-\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}x}$ 에 위의 논리를 적용하면 $\frac{a_1+\cdots+a_{2015}}{2015}\geq\sqrt[2015]{a_1\cdots a_{2015}}$ 이면 $\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$ 이 성립함을 알 수 있다. 결국 이 논리를 반복하면 $\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$ 임을 보이는 것으로 증명이 끝났다는 것을 알 수 있다. 이는

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}-2\sqrt{a_1a_2}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2}{2}\geq 0$$

으로 증명 끝!!

(다른 풀이)

임의의 양의 실수 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$과 2이상의 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

임을 n에 대한 수학적 귀납법으로 보이고자 한다. 우선 $n=2$일 때,

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}-2\sqrt{a_1a_2}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2}{2}\geq 0$$

이므로 성립한다. $n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하자. 양의 실수에서 정의된 함수

$$h(x)=\frac{a_1+\cdots+a_k+x}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1\cdots a_kx}$$

의 도함수

$$h'(x)=\frac{1}{k+1}\left(1-\sqrt[k+1]{\frac{a_1a_2\cdots a_k}{x^k}}\right)$$

이므로 $h(x)$는 $x=\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$ 에서 최솟값

$$\begin{aligned}h(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k})&=\frac{a_1+\cdots+a_k+\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1\cdots a_k\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}} \quad\cdots\cdots \quad (1)\\&=\frac{a_1+\cdots+a_k+\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}-\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\\&=\frac{a_1+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}\geq 0\end{aligned}$$

을 갖는다. (1)의 마지막 부등식은 수학적 귀납법의 가정의 결과이다.

[문제 2] 대학발표 예시답안

1.

$$\sqrt{a^2+b}-a=\sqrt{a^2+b}-a\frac{\sqrt{a^2+b}+a}{\sqrt{a^2+b}+a}=\frac{a^2+b+a\sqrt{a^2+b}-a\sqrt{a^2+b}-a^2}{\sqrt{a^2+b}+a}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b}+a}<\frac{b}{2a}$$

이 성립한다. 같은 방법으로, 계산하면

$$a-\sqrt{a^2-b}=a-\sqrt{a^2-b}\,\frac{\sqrt{a^2-b}+a}{\sqrt{a^2-b}+a}=\frac{a\sqrt{a^2-b}+a^2-(a^2-b)-a\sqrt{a^2-b}}{\sqrt{a^2-b}+a}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b}+a}>\frac{b}{2a}$$

을 얻는다. 따라서 $\sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}$ 이다.

1. (나침반 다른 풀이)

함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 에 대하여 열린구간 $(a^2-b,\ a^2)$에서 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{b}=f'(c_1)$$

인 실수 c_1이 열린구간 $(a^2-b,\ a^2)$에서 존재한다. 열린구간 $(a^2,\ a^2+b)$에서 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{\sqrt{a^2+b}-a}{b}=f'(c_2)$$

인 실수 c_2가 열린구간 $(a^2,\ a^2+b)$에서 존재한다. 양의 실수 x에 대하여 함수 $f'(x)$는 감소함수이고 $c_1<a^2<c_2$ 이므로

$$f'(c_2)<f'(a^2)<f'(c_1)$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b}-a}{b}<\frac{1}{2a}<\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{b}$$

$$\sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}$$

이다.

2.

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ 로부터

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a=\frac{(a^3+b)-a^3}{\left(\sqrt[3]{a^3+b}\right)^2+a\sqrt[3]{a^3+b}+a^2}=\frac{b}{\left(\sqrt[3]{a^3+b}\right)^2+a\sqrt[3]{a^3+b}+a^2}<\frac{b}{3a^2}$$

이 성립함을 알 수 있다. 마찬가지 방법으로

$$a-\sqrt[3]{a^3-b}=\frac{a^3-(a^3-b)}{a^2+a\sqrt[3]{a^3-b}+\left(\sqrt[3]{a^3-b}\right)^2}=\frac{b}{a^2+a\sqrt[3]{a^3-b}+\left(\sqrt[3]{a^3-b}\right)^2}>\frac{b}{3a^2}$$

을 얻는다. 따라서 $\sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}$ 이 성립한다.

2. (나침반 다른 풀이)

함수 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 에 대하여 열린구간 $(a^3-b,\ a^3)$ 에서 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{a-\sqrt[3]{a^3-b}}{b}=f'(c_1)$$

인 실수 c_1 이 열린구간 $(a^3-b,\ a^3)$ 에서 존재한다. 열린구간 $(a^3,\ a^3+b)$ 에서 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{\sqrt[3]{a^3+b}-a}{b}=f'(c_2)$$

인 실수 c_2 가 열린구간 $(a^3,\ a^3+b)$ 에서 존재한다. 양의 실수 x 에 대하여 함수 $f'(x)$ 는 감소함수이고 $c_1<c_2$ 이므로

$$f'(c_2)<f'(c_1)$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^3+b}-a}{b}<\frac{a-\sqrt[3]{a^3-b}}{b}$$

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}$$

이다.

3.

문항 1에서 부등식

$$\sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}\quad \cdots\cdots \ ①$$

이 성립한다. 우선 $75^2=5625$ 이므로, 부등식 ①에 의해 부등식

$$\left|75-\sqrt{5627}\right|=\sqrt{5627}-75=\sqrt{75^2+2}-75<\frac{2}{2\times 75}=\frac{1}{75}$$

이 성립한다. 또한 문항 2의 증명으로부터 부등식

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}\quad \cdots\cdots \ ②$$

이 성립함을 알 수 있다. $341=343-2=7^3-2$ 이므로 부등식 ②에 의해

$$\left|7-\sqrt[3]{341}\right|=7-\sqrt[3]{341}=7-\sqrt[3]{7^3-2}>\frac{2}{3\times 7^2}=\frac{2}{147}=\frac{1}{73.5}>\frac{1}{75}$$

이 성립한다. 그러므로 $\left|75-\sqrt{5627}\right|<\left|7-\sqrt[3]{341}\right|$ 임을 알 수 있다.

52 한양대학교 모의(2차)[52]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(2문항)	90분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

자연수들로 이루어진 무한수열 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ 과 다항식 $p(x)$는 다음 조건들을 모두 만족한다.

가. $p(0)=0$
나. $p(x_1)=1$이며 모든 자연수 n에 대해서 $p(x_n)$는 자연수이다.
다. 모든 자연수 n에 대해서 $\dfrac{1}{p(x_{n+1})}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k}=1$을 만족시킨다.

1. 무한수열 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ 에서 $x_m=x_{m+l}$인 서로 다른 자연수 m과 l이 존재하는지 논하시오.

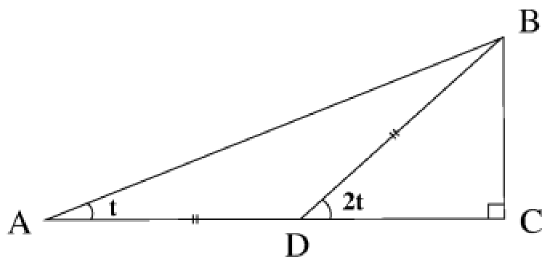
2. 무한수열 $p(x_1),\ p(x_2),\ \cdots,\ p(x_n),\ \cdots$ 의 수렴, 발산 여부를 판정하시오. 발산하면 그 이유를 설명하고 수렴하면 그 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p(x_n)$을 구하시오.

3. 무한수열 $p(x_1),\ p(x_2),\ \cdots,\ p(x_n),\ \cdots$ 의 4번째 항 $p(x_4)$의 값을 구하시오.

52) 한양대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 아래 그림을 이용하여 $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$ 일 때, $\cos t = f(\cos 2t)$ 를 만족하는 함수 $y = f(x)$, $0 \le x \le 1$ 를 구하시오. (단, 그림에서 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}}$ 이다.)



2. 위 문제에서 구한 함수 $y = f(x)$ 를 이용해서, 아래와 같이 주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴, 발산 여부를 판정하시오. 발산하면 그 이유를 설명하고 수렴하면 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 을 구하시오.

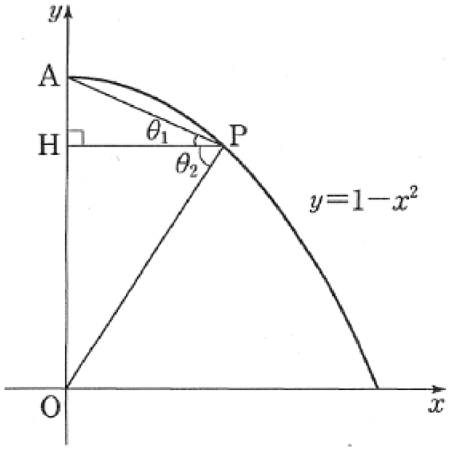
$$a_1 = \sqrt{2}\,,\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,,\ a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\,,\ \cdots\cdots$$

3. 수열 $\{b_m\}$ 을 $b_m = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\sqrt{1+\cos\dfrac{k\pi}{2^m n}}$ 으로 정의할 때, 제 1항 b_1 의 값과 극한값 $\lim\limits_{m\to\infty} b_m$ 을 구하시오.

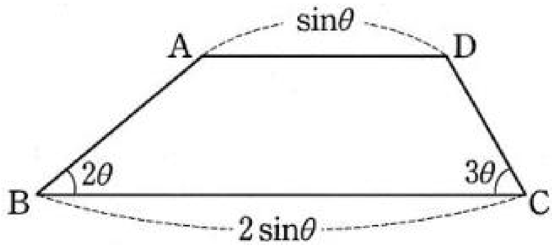
• 풀어보기

문제1. 곡선 $y=1-x^2(0<x<1)$ 위의 점 P 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 원점 O 와 점 $A(0, 1)$ 에 대하여 $\angle APH=\theta_1$, $\angle HPO=\theta_2$ 라 하자. $\tan\theta_1=\frac{1}{2}$ 일 때, $\tan(\theta_1+\theta_2)$ 의 값은? (2017. 9월 모평)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



문제2. 그림과 같이 사다리꼴 ABCD 에서 변 AD 와 변 BC 가 평행하고 $\angle B=2\theta$, $\angle C=3\theta$, $\overline{BC}=2\sin\theta$, $\overline{AD}=\sin\theta$ 이다. 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2014. 6월 모평)



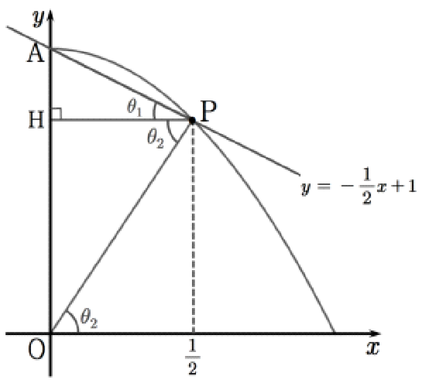
• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 ④

$\tan\theta_1 = \frac{1}{2}$ 이므로 직선 AP 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이고 y 절편은 1 이므로 직선 AP 의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}x+1$ 이다. 직선 AP 와 곡선 $y=1-x^2$ 과의 교점을 구하면 $1-x^2 = -\frac{1}{2}x+1$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

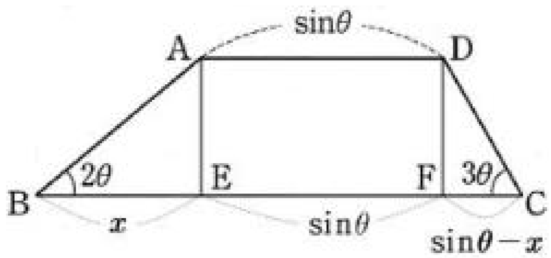
한편 아래 그림과 같이 θ_2 는 직선 OP 와 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기와 같으므로 $\tan\theta_2 = \frac{3}{2}$ 이다.



따라서 $\tan(\theta_1+\theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

풀어보기(문제2) 정답 14

점 A, F 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하면



$$\overline{\mathrm{AE}} = x\tan 2\theta,\ \overline{\mathrm{DF}} = (\sin\theta - x)\tan 3\theta$$

$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{DF}}$ 에서 $x = \dfrac{\sin\theta\tan 3\theta}{\tan 2\theta + \tan 3\theta}$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times 3\sin\theta\times x\tan 2\theta=\frac{1}{2}\times 3\sin\theta\times\frac{\sin\theta\tan 3\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}\times\tan 2\theta$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sin\theta\tan 2\theta\sin\theta\tan 3\theta}{\theta^3(\tan 2\theta+\tan 3\theta)}$$

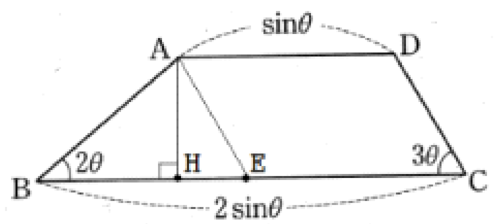
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2}\frac{3\sin\theta\tan 2\theta\sin\theta\tan 3\theta}{\theta^4}\times\frac{\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}$$

$$=\frac{9}{5}$$

$\therefore\ p+q=14$

(다른 풀이)

점 A 에서 선분 DC 와 평행한 직선을 그어 선분 BC 와 만나는 점을 E , 점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.



$\angle\mathrm{AEB}=3\theta$, $\angle\mathrm{BAE}=\pi-5\theta$이고 $\triangle\mathrm{ABE}$ 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 5\theta}$$

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin 2\theta=\dfrac{\sin\theta\sin 3\theta\sin 2\theta}{\sin 5\theta}$이다. 따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot(\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{AD}})\cdot\overline{\mathrm{AH}}$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin\theta+\sin\theta)\left(\frac{\sin\theta\sin 3\theta\sin 2\theta}{\sin 5\theta}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{3\sin\theta\sin\theta\sin 3\theta\sin 2\theta}{2\theta^3\sin 5\theta}=\frac{9}{5}$$

따라서 $p+q=14$이다.

[문항1] 대학발표 예시답안

1.

만약 $x_m = x_{m+l}$ 인 자연수 m과 l이 존재한다면,

$$\frac{1}{p(x_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_k} = 1 \text{ 이고 } \frac{1}{p(x_{m+l})} + \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k} = 1$$

이므로

$$\Rightarrow \frac{1}{p(x_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_k} = 1 = \frac{1}{p(x_{m+l})} + \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p(x_m)} - \frac{1}{p(x_{m+l})} = \sum_{k=m}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}$$

$p(x_m) = p(x_{m+l})$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=m}^{m+l-1} \frac{1}{x_k} = 0$이다. 이는 모순이다. 그러므로 $x_m = x_{m+l}$ 인 자연수 m과 l은 존재하지 않는다.

2.

1번에서 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \neq x_{n+1}$ 이므로 임의의 x_n에 대하여

$$\frac{1}{p(x_n)} - \frac{1}{p(x_{n+1})} = \frac{1}{x_n} > 0$$

이므로 $p(x_n) < p(x_{n+1})$ ⋯ ① 이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} p(x_n)$ 은 발산한다.

3.

$\dfrac{1}{p(x_2)} + \dfrac{1}{x_1} = 1$ 이므로 $x_1 = 2$, $p(x_2) = 2$ 이다.

x_1	$p(x_2)$
2	2

$x_1 = 2,\ p(x_1) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{p(x_3)} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$ 이므로 다음과 같은 3가지 경우를 고려할 수 있다.

$$\Rightarrow \{p(x_3) = x_2 = 2^2\},\ \{p(x_3) = 3,\ x_2 = 6\},\ \{p(x_3) = 6,\ x_2 = 3\}$$

x_2	$p(x_3)$
3	6
4	4
6	3

$$\Rightarrow \{p(x_3) = x_2 = 2^2\} \Rightarrow \frac{1}{p(x_4)} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow$$

x_3	$p(x_4)$	x_3	$p(x_4)$
5	20	12	6
6	12	20	5
8	8		

$\{p(x_3)=3,\ x_2=6\} \Rightarrow \dfrac{1}{p(x_4)}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

x_3	$p(x_4)$
4	12
6	6
12	4

$\{p(x_3)=6,\ x_2=3\} \Rightarrow \dfrac{1}{p(x_4)}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow$

x_3	$p(x_4)$	x_3	$p(x_4)$
7	42	15	10
8	24	18	9
9	18	24	8
10	15	42	7
12	12		

이런 방법으로 계속 하다보면 제한된 시간에 $p(x_4)$를 구하기에 시간이 부족하다. 혹은 $x_n=2^n$이고 다항식 $p(x)=\dfrac{1}{2}x$임을 유추할 수 있는 데. 이런 경우는 부분점수.

그런데, 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{1}{p(x_{n+1})}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k}=1$을 만족하므로

$$\Rightarrow \frac{1}{p(x_n)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_k}=1=\frac{1}{p(x_{n+1})}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p(x_n)}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{p(x_{n+1})}>0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p(x_n)}-\frac{1}{x_n}>0$$

$$\Rightarrow 0<\frac{p(x_n)}{x_n}<1 \ \cdots\cdots \ ②$$

위의 ②에 의해 모든 n에 대해서 $0<\dfrac{p(x_n)}{x_n}<1$를 만족하고 ①에 의해 $p(x_n)$의 값은 n이 커짐에 따라 증가하고 수열 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$는 서로 다른 자연수들로 이루어져 있으므로 수열 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$도 증가수열이고 다항식 $p(x)$의 차수는 1이하임. …… ③

③에 의해서 $p(x_1)=1$이고 $p(x_2)=2$이므로 다항식 $p(x)$는 상수함수가 아니다. 그러므로 다항식은 $p(x)=cx$이다.

$$x_1=2,\ p(x_1)=1 \Rightarrow f(2)=2c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{2} \Rightarrow p(x)=\frac{1}{2}x$$

$$p(x_2)=2 \Rightarrow p(x_2)=\frac{1}{2}x_2=2 \Rightarrow x_2=4$$

$$p(x_3)=4 \Rightarrow p(x_3)=\frac{1}{2}x_3=4 \Rightarrow x_3=8$$

$$\cdots$$

$$x_n=2^n$$

이고 다항식 $p(x)=\frac{1}{2}x$ 이고 $p(x_4)=8$ 이다.

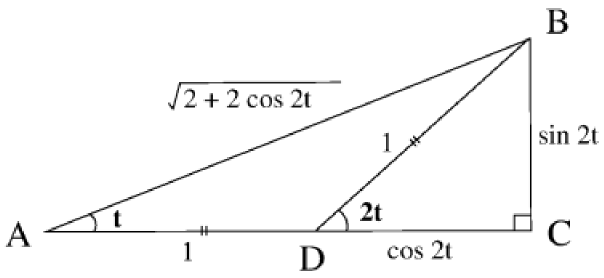
[문항2] 대학발표 예시답안

1.

아래 그림에서 임의의 $0<t<\frac{\pi}{4}$ 에 대해 $\cos t=\frac{1+\cos 2t}{\sqrt{2+2\cos 2t}}=\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$ 이다.

따라서 $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ 로 할 수 있다.

이 때, $f(\cos 0)=\sqrt{\frac{1+1}{2}}=1=\cos 0$, $f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+0}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$ 이므로 $0\le t\le\frac{\pi}{4}$ 일 때, $\cos t=f(\cos 2t)$ 가 성립한다.



2.

$$a_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$$

$$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+a_1}=2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=2f\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2+a_2}=2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}=2f\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\frac{\pi}{16}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

$$\vdots$$

로부터 $a_n=2f\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\right)=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 임을 알 수 있다.

따라서 극한값은 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=2\times 1=2$ 이다.

3.

$$b_m = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\cos\frac{\pi k}{2^m n}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{\pi k}{2^m n}\right)\frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k}{2^{m+1}n}\right)\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{m+1}}k}{n}\right)\frac{\frac{\pi}{2^{m+1}}}{n}2^{m+1} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2^{m+1}}}\cos t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}$$

이다. 따라서 b_1 은 $\frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{1+1}\sin\frac{\pi}{2^{1+1}} = \frac{4}{\pi}$ 이고

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}} = \lim_{m\to\infty}\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}}{\frac{\pi}{2^{m+1}}} = \sqrt{2}\times 1 = \sqrt{2}$$ 이다.

53 한양대학교 수시(오전)[53)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(2문제, 6문항)	90분

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 매개변수 t로 나타낸 타원 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(a, b > 0)$이 주어져 있다. 타원 위의 한 점 $(a\cos t, b\sin t)\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y = -b$, $x = -a$와 만나는 점을 각각 A$'$, B$'$이라 하자. 선분의 길이의 비 $\dfrac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$을 t에 대한 식으로 나타내시오.

2. 장축과 단축의 길이가 각각 $2a$, $2b$인 타원 C가 있다. 타원 C를 포함하는 직각삼각형 중에서, 세 변이 타원과 각각 한 점에서 접하고, 두 변이 각각 장축과 단축에 평행한 직각삼각형의 넓이의 최솟값을 구하시오.

3. 빗변이 아닌 두 변의 길이가 각각 p, q인 직각삼각형 $\triangle$가 있다. 직각삼각형 $\triangle$에 포함되는 타원 중에서, $\triangle$의 세 변과 각각 한 점에서 접하고, 장축 및 단축이 각각 길이 p, q인 변에 평행한 타원을 생각하자. 이러한 타원의 장축과 단축의 길이의 곱의 최댓값을 구하시오.

53) 한양대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 함수 $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)\cdots(x-2017)$ 에 대하여 $f'(2)\neq 0$ 임을 보이시오.

2. 위의 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f''(x)f(x) < \{f'(x)\}^2$ 임을 보이시오.

3. 미분가능한 함수 $g(x)$ 가

$$\{g(x)\}^3-1=p_1(x)p_2(x)\cdots p_n(x)$$

(단, n 은 자연수이고 $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 는 모든 계수가 정수인 다항식)

를 만족할 때, $h(x)=\{p_1(x)\}^2+\cdots+\{p_n(x)\}^2-n$ 이라 하자.

$g(\alpha)=0$ 인 정수 α 에 대하여 $h(\alpha)$ 와 $h'(\alpha)$ 를 구하시오.

• 풀어보기

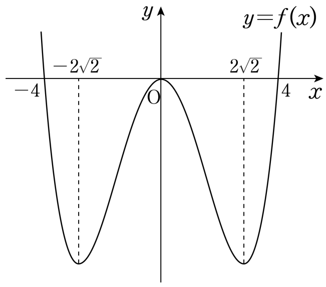
문제1. 함수 $f(x)=x^4-16x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k값의 제곱의 합을 구하시오. (2015. 전국연합)

> (가) 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f'(x)<0$이다.
> (나) $f'(k)f'(k+2)<0$

문제2. 실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선과 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) (2014. 전국연합)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 17



$f'(x)=4x(x^2-8)$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2\sqrt{2}$, 0, $2\sqrt{2}$

(가)의 조건에 의해 $f(x)$는 구간 $(k,\ k+1)$에서 감소한다.

그래프에서 감소하는 구간은 $(-\infty,\ -2\sqrt{2})$, $(0,\ 2\sqrt{2})$이고, k는 정수이므로 $k=0$, 1 또는 -4, -5, $\cdots$

(나)의 조건에 의해 $f'(k+2)>0$ 이므로 $k=1$ 또는 -4

따라서 $1^2+(-4)^2=17$

풀어보기(문제2) 정답 25

원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선의 방정식은 $y=\tan(\sin t)x$ $\cdots$ ㉠

점 P는 원과 직선의 교점이므로 원의 방정식 $x^2+y^2=e^{2t}$과 연립하면

$$x^2+\{\tan(\sin t)x\}^2=e^{2t}$$

$$\{1+\tan^2(\sin t)\}x^2=e^{2t}$$

$$\frac{x^2}{\cos^2(\sin t)}=e^{2t}$$

$$x^2=e^{2t}\cos^2(\sin t)$$

$$x=e^t\cos(\sin t)\ (\because\ x>0)$$

이를 ㉠에 대입하면 $y=e^t\sin(\sin t)$

그러므로 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$x=e^t\cos(\sin t),\ y=e^t\sin(\sin t)$$

$$\frac{dx}{dt}=e^t\cos(\sin t)-\{e^t\sin(\sin t)\}\cos t=e^t\{\cos(\sin t)-\sin(\sin t)\times\cos t\}$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t\sin(\sin t)+\{e^t\cos(\sin t)\}\cos t=e^t\{\sin(\sin t)+\cos(\sin t)\times\cos t\}$$

$t=\pi$일 때, 점 P의 좌표는 $\left(e^\pi\cos(\sin\pi),\ e^\pi\sin(\sin\pi)\right)$이므로 $\mathrm{P}(e^\pi,\ 0)$

$t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{\pi}\{\sin(\sin\pi)+\cos(\sin\pi)\times\cos\pi\}}{e^{\pi}\{\cos(\sin\pi)-\sin(\sin\pi)\times\cos\pi\}}=\frac{-e^{\pi}}{e^{\pi}}=-1$$

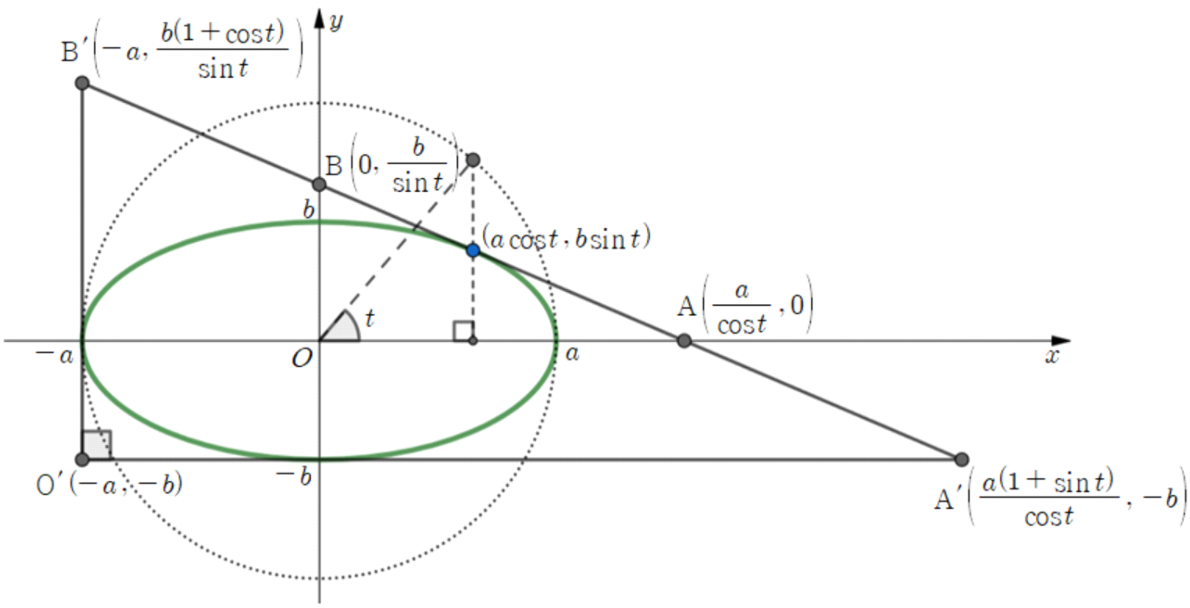
그러므로 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=-(x-e^{\pi})$

이때 접선의 x절편은 e^{π}, y절편은 e^{π}이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times e^{\pi}\times e^{\pi}=\frac{1}{2}e^{2\pi}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로 $10(a+b)=10\left(\frac{1}{2}+2\right)=25$

[문제1] 대학발표 예시답안

문항 1.



점 $(a\cos t, b\sin t)\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{\cos t}{a}x+\frac{\sin t}{b}y=1$이므로,

$A\left(\frac{a}{\cos t}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{b}{\sin t}\right)$, $A'\left(\frac{a(1+\sin t)}{\cos t}, -b\right)$, $B'\left(-a, \frac{b(1+\cos t)}{\sin t}\right)$이다. 따라서

$\overline{AB}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}+\frac{b^2}{\sin^2 t}}$, $\overline{A'B'}=\sqrt{\frac{a^2(1+\sin t+\cos t)^2}{\cos^2 t}+\frac{b^2(1+\sin t+\cos t)^2}{\sin^2 t}}$ 이고,

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=1+\cos t+\sin t$ 이다.

[다른 풀이]

점 $(a\cos t, b\sin t)\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{\cos t}{a}x+\frac{\sin t}{b}y=1$이므로,

$\mathrm{A}\left(\dfrac{a}{\cos t}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \dfrac{b}{\sin t}\right)$, $\mathrm{A}'\left(\dfrac{a(1+\sin t)}{\cos t}, -b\right)$, $\mathrm{B}'\left(-a, \dfrac{b(1+\cos t)}{\sin t}\right)$이다.

삼각형 BOA 와 삼각형 B′O′A′ 는 닮음이므로,

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{O'B'}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\dfrac{b(1+\cos t)}{\sin t}+b}{\dfrac{b}{\sin t}} = 1+\cos t+\sin t \text{ 이다.}$$

문항 2.

타원을 매개변수 곡선 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ (a, b 는 양수)로 나타내자. 두 변이 각각 타원의 장축, 단축에 평행한 직각삼각형 중에서 넓이가 최소인 직각삼각형의 세 변은 타원과 각각 한 점에서 만난다. 이러한 삼각형은 위의 그림에서 $\triangle \mathrm{A'B'O'}$ 이고, 타원과 빗변 $\mathrm{A'B'}$ 와의 교점을 $(a\cos t, b\sin t)$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 라 하면, 문항 1번으로부터,

$\triangle \mathrm{A'B'O'}$ 의 넓이 = $\triangle \mathrm{ABO}$ 의 넓이 $\times\ (1+\cos t+\sin t)^2 = \dfrac{ab}{2}\dfrac{(1+\cos t+\sin t)^2}{\sin t\cos t}$ 이다.

$f(t) = \dfrac{(1+\cos t+\sin t)^2}{\sin t\cos t}$ 라 하면, $f'(t) = -\dfrac{(1+\cos t+\sin t)^2(\cos t-\sin t)}{\sin^2 t\cos^2 t}$ 이고, $f(t)$ 는 표와 같이 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 에서 최솟값 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2(1+\sqrt{2})^2$ 를 갖는다.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$2(1+\sqrt{2})^2$	$\nearrow$	

따라서, $\triangle \mathrm{A'B'O'}$ 의 넓이는 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때 최소이고, 이 때 최솟값

$$\frac{ab}{2}\times 2(1+\sqrt{2})^2 = ab(1+\sqrt{2})^2 \left(= ab(3+2\sqrt{2})\right)$$

를 갖는다.

문항3.

구하려는 타원을 매개변수 곡선 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ (a, b 는 양수)로 나타내자. 문항2의 풀이로부터, $\triangle$의 넓이$=\dfrac{1}{2}pq = \dfrac{ab}{2}f(t)$ 이다.

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ 에서 $f(t) > 0$ 이고 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때 $f(t)$ 는 최소이므로, 같은 값 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때

$\dfrac{1}{f(t)}$ 은 최대이다.

따라서 타원의 장축과 단축의 길이의 곱 $4ab = \dfrac{4}{f(t)}pq$ 는 최댓값 $\dfrac{4}{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}pq = \dfrac{2pq}{(1+\sqrt{2})^2}$ 를 갖는다.

[문제2] 대학발표 예시답안

문항 1.

$f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)\cdots(x-2017)$ 에 대하여

$$f'(x) = (x-3)(x-5)\cdots(x-2017)+(x-1)(x-5)\cdots(x-2017)+(x-1)(x-3)(x-7)\cdots(x-2017) +\cdots+(x-1)(x-3)\cdots(x-2015)$$

이고,

$$f'(2) = (2-3)(2-5)\cdots(2-2017)+(2-1)(2-5)\cdots(2-2017)+(2-1)(2-3)(2-7)\cdots(2-2017) +\cdots+(2-1)(2-3)\cdots(2-2015)$$

이다. 이 때 우변의 첫 두항의 합은 0 이므로

$$f'(2) = (2-1)(2-3)(2-7)\cdots(2-2017)+(2-1)(2-3)(2-5)\cdots(x-2017) +\cdots+(2-1)(2-3)\cdots(2-2015)$$

한편 우변의 각 항은 음수 1007 개의 곱이므로 모두 음수이고, 따라서 $f'(2)<0$ 이다.

문항2.

우선 임의의 $a = 1, 3, \cdots, 2017$ 에 대하여 $f(a)=0$ 이고 $f'(a) \neq 0$ 이므로

$f''(a)f(a) < (f'(a))^2$ 이 성립한다.

만약 x 가 $1, 3, \cdots, 2017$ 이 아닌 실수라면 $f(x) \neq 0$ 이므로

$$\frac{f(x)f''(x)-f'(x)^2}{f(x)^2} < 0$$

임을 보이면 된다. 한편

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1}+\cdots+\frac{1}{x-2017}$$

이고

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x)-f'(x)^2}{f(x)^2} = -\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\cdots+\frac{1}{(x-2017)^2}\right) < 0$$

이므로 $f''(a)f(a) < (f'(a))^2$ 이 성립한다.

문항3.

우선 $g(\alpha)=0$ 인 α 에 대하여

$$-1 = g(\alpha)^3 - 1 = p_1(\alpha)\cdots p_n(\alpha) \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

이고 $p_i(\alpha)\,(i=1,\cdots,n)$는 정수이므로 $p_i(\alpha)=\pm 1$ 이고 따라서

$$h(\alpha)=p_1(\alpha)^2+\cdots+p_n(\alpha)^2-n=0$$

한편

$$3g(x)^2g'(x)=p_1{}'(x)p_2(x)\cdots p_n(x)+\cdots+p_1(x)\cdots p_{n-1}(x)p_n{}'(x)$$

이므로

$$\begin{aligned}0&=p_1{}'(\alpha)p_2(\alpha)\cdots p_n(\alpha)+\cdots+p_1(\alpha)\cdots p_{n-1}(\alpha)p_n{}'(\alpha)\\&=(-1)\cdot\left(\frac{p_1{}'(\alpha)p_2(\alpha)\cdots p_n(\alpha)+\cdots+p_1(\alpha)\cdots p_{n-1}(\alpha)p_n{}'(\alpha)}{p_1(\alpha)p_2(\alpha)\cdots p_n(\alpha)}\right)\quad\text{-----(*적용)}\\&=-\left(\frac{p_1{}'(\alpha)}{p_1(\alpha)}+\cdots+\frac{p_n{}'(\alpha)}{p_n(\alpha)}\right)\\&=-\left(p_1{}'(\alpha)p_1(\alpha)+\cdots+p_n{}'(\alpha)p_n(\alpha)\right)\quad\text{-----}\left(p_i(\alpha)=\pm1=\frac{1}{p_i(\alpha)}\right)\end{aligned}$$

이고 $h'(x)=2\left(p_1(x)p_1{}'(x)+\cdots+p_n(x)p_n{}'(x)\right)$ 이므로 $h'(\alpha)=0$.

54 한양대학교 수시(오후1)[54)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(2문제, 6문항)	90분

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 좌표공간에 중심이 원점이고 반지름이 20인 구 S와 어떤 평면이 만나서 생기는 원을 C라 하자. C의 중심의 좌표가 $(3, 4, 12)$일 때, 원 C의 평면 $4x+5y-20z=1$ 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

2. 문항 1에서 주어진 원 C의 넓이를 A라 하고, x축을 포함하는 임의의 평면 α에 대하여 원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 A_α라 하자. $\dfrac{A_\alpha}{A}$의 최댓값을 구하시오.

3. 문항 1에서 주어진 구 S와 평면이 만나서 생기는 반지름이 $\sqrt{10}$인 원이 있다. 이 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 6π일 때, 이 원의 평면 $3x-y=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구하시오.

54) 한양대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> $n \geq 3$ 인 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \left(1 - x^n\right)^{\frac{1}{n}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

<나> 곡선 $y = f(x)$ 위의 한 점 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ $\left(0 < x_0 < 1\right)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 P , y 축과 만나는 점을 Q 라 하자.

<다> 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 에 대하여 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = L$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이면, $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = L$ 이다.

1. 곡선 $y = f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ 위의 점 중에서 원점까지의 거리가 최대인 점을 A 라 하자. 점 A 의 좌표를 구하시오.

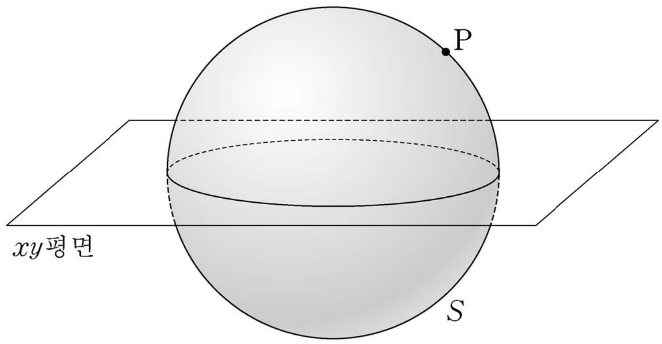
2. 선분 PQ 의 길이의 최솟값을 구하시오.

3. 자연수 n 에 대하여 $d_n = \int_0^1 \left(1 - x^n\right)^{\frac{1}{n}} dx$ 라 할 때, 극한값 $\lim\limits_{n \to \infty} d_n$ 을 구하시오.

• 풀어보기

문제1. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$ 과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$ 가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2014. 대수능)

> (가) 원 C는 점 P 를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
> (나) 원 C의 반지름의 길이는 1 이다.

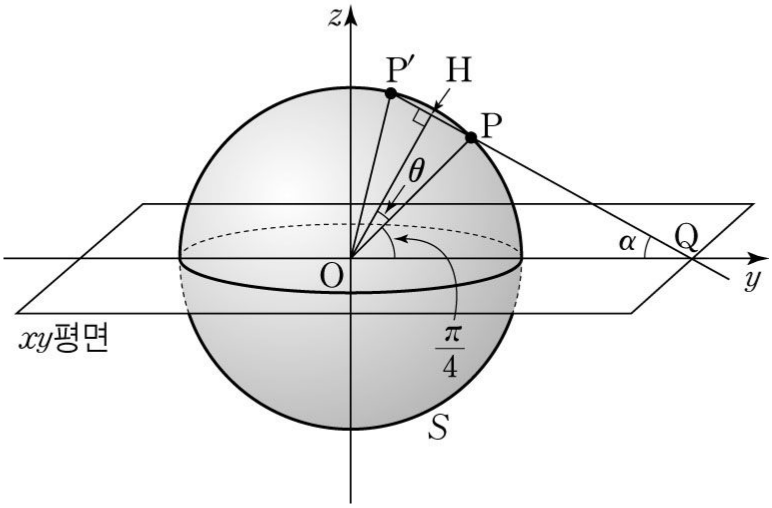


문제2. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B 의 x 좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$ 라 하자. 양수 k 에 대하여 두 직선 OA, OB 와 곡선 $y=x^2+x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 k 가 되도록 하는 점 (s, t) 가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C위의 점 중에서 점 $(1, 0)$ 과의 거리가 최소인 점의 x 좌표가 $\frac{2}{3}$ 일 때, $k=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2013. 평가원)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 9

그림과 같이 원점을 O, 원 C가 yz평면과 만나는 다른 한 점을 P$'$이라 하자. 또, 원점 O에서 선분 PP$'$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle \mathrm{POH}=\theta$라 하자.



$\overline{\mathrm{PH}}=1$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{50}$ 이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\theta=\dfrac{7}{\sqrt{50}}$

선분 PP$'$의 연장선과 y축이 만나는 점을 Q라 하고, $\angle \mathrm{OQP}=\alpha$라 하자, 이때, 정사영의 넓이는

$$\pi\cos\alpha=\pi\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right\}=\pi\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\pi\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{7}{\sqrt{50}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{50}}\right)=\pi\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\right)=\frac{4}{5}\pi$$

$\therefore p+q=9$

풀어보기(문제2) 정답 109

구하려고 하는 부분의 넓이는

(선분 OB와 포물선으로 둘러싸인 도형)$-$(선분 OA와 포물선으로 둘러싸인 도형)

이므로 $\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{6}s^3$이다.

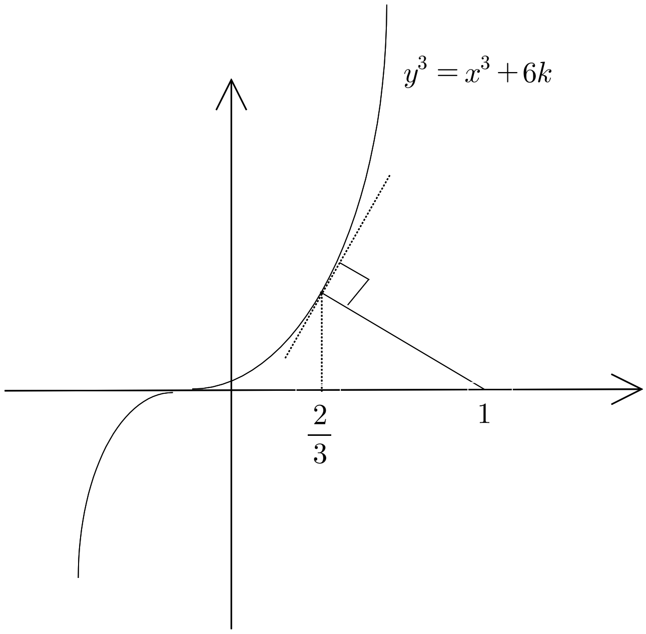
($\because$포물선과 직선으로 둘러싸인 도형 넓이$=\dfrac{1}{6}|a|(\beta-\alpha)^3$)

이 값이 k이므로 $(s,\ t)$가 그리는 도형 C의 방정식은 $x^3-y^3=-6k$

$y^3=x^3+6k$ ⋯ ①

곡선 C위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\dfrac{2}{3}$이려면 그림에서

와 같이 $x=\frac{2}{3}$인 그래프 위의 점에서 접선과 수직인 직선이 $(1,\ 0)$을 지나야 한다.



①의 식을 미분하면 $3y^2y'=3x^2,\quad y'=\frac{x^2}{y^2}$

$x=\frac{2}{3}$에서 $y=a$ 라 두면 접선의 기울기는 $\frac{4}{9a^2}$

따라서 접선에 수직인 접선의 기울기는 $-\frac{9a^2}{4}$

직선의 식은 $y-a=-\frac{9}{4}a^2\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$(1,\ 0)$을 지나므로 $-a=-\frac{9}{4}a^2\times\frac{1}{3}$이고 $a\neq0$ 이므로 $a=\frac{4}{3}$

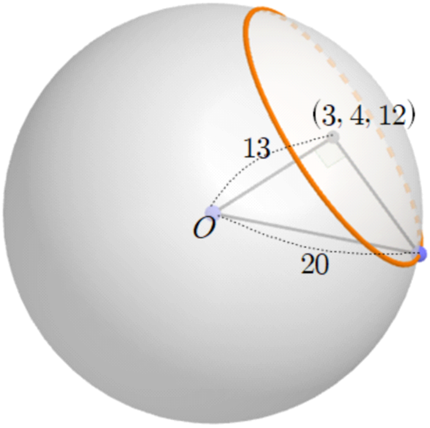
$\left(\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3+6k$

$\therefore\ 6k=\frac{56}{27},\ k=\frac{28}{81}$

$\therefore\ p+q=109$

[문제1] 대학발표 예시답안

문항 1.



원 C의 중심 $(3,4,12)$와 원점과의 거리는 $\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$이다.

따라서 C의 반지름은 $\sqrt{20^2-13^2}=\sqrt{231}$이고, C의 넓이는 231π이다.

평면 $4x+5y-20z=1$의 법선벡터를 $(4,5,-20)$, 원 C를 포함하는 평면의 법선벡터를 $(3,4,12)$로 택하자. 두 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면,

$$\cos\theta=\frac{|(3,4,12)\cdot(4,5,-20)|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}\sqrt{4^2+5^2+(-20)^2}}=\frac{16}{21}$$ 이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $231\pi\cdot\dfrac{16}{21}=176\pi$이다.

문항 2.

평면 α의 방정식은 $z=my$ 또는 $y=0$ (xz-평면)라 할 수 있다. 따라서 α의 법선벡터는 $(0,m,-1)$ 또는 $(0,1,0)$로 택할 수 있다. 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 θ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|(0,m,-1)\cdot(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+m^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{|4m-12|}{13\sqrt{m^2+1}}$$ 또는

$$\cos\theta=\frac{|(0,1,0)\cdot(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{4}{13}$$ 이다.

$\dfrac{|4m-12|}{13\sqrt{m^2+1}}$는 $m=-\dfrac{1}{3}$일 때 최댓값 $\dfrac{4}{13}\sqrt{10}\left(>\dfrac{4}{13}\right)$을 갖는다. 따라서 $\dfrac{A_\alpha}{A}=\cos\theta$의 최댓값은 $\dfrac{4}{13}\sqrt{10}$이다.

[다른 풀이]
평면 α의 방정식은 $(\cos t)y + (\sin t)z = 0$이라 할 수 있고, 따라서 $(0, \cos t, \sin t)$를 α의 법선벡터로 택하자.

평면 α와 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라 하면,

$$
\begin{aligned}
\frac{A_\alpha}{A} = \cos\theta &= \frac{|(0, \cos t, \sin t) \bullet (3, 4, 12)|}{\sqrt{0^2 + \cos^2 t + \sin^2 t}\ \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} \\
&= \frac{|4\cos t + 12\sin t|}{13} \\
&= \frac{4\sqrt{10}}{13}\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\cos t + \frac{3}{\sqrt{10}}\sin t\right| \\
&= \frac{4\sqrt{10}}{13}|\sin\beta\cos t + \cos\beta\sin t| \\
&= \frac{4\sqrt{10}}{13}|\sin(\beta + t)| \le \frac{4}{13}\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

(단, β는 $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$을 만족한다.)

따라서 $\frac{A_\alpha}{A} = \cos\theta$의 최댓값은 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$이다.

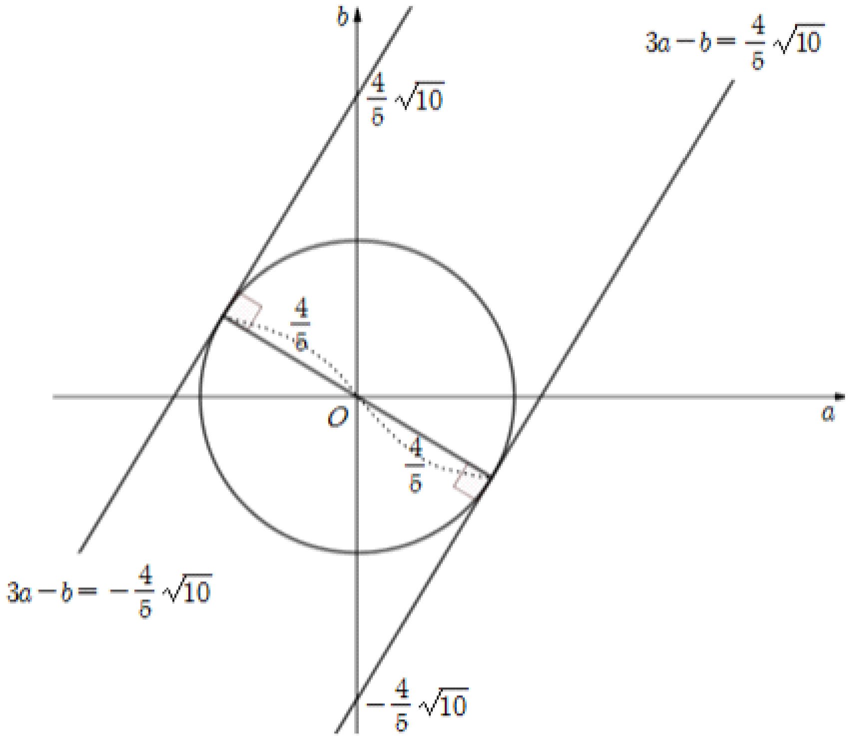
문항 3.
원이 놓여 있는 평면의 단위 법선벡터를 (a, b, c)라 하자. ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$이다.)
원의 xy-평면 위로의 정사영의 넓이가 6π이므로

$$6\pi = \frac{|(0, 0, 1) \bullet (a, b, c)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \sqrt{10^2}\,\pi = |c| \cdot 10\pi \text{ 이다.}$$

따라서 $|c| = \frac{3}{5}$이고, $a^2 + b^2 = 1 - c^2 = \frac{16}{25}$이다.
원의 평면 $3x - y = 1$ 위로의 정사영의 넓이는

$$\frac{|(3, -1, 0) \bullet (a, b, c)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2}\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \sqrt{10^2}\,\pi = \sqrt{10}\,\pi|3a - b|$$

이다.



[그림1]

$|3a-b|=k$ 라 하면, a , b 는 $a^2+b^2=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 을 만족하므로, k 의 최댓값은 $\frac{4}{5}\sqrt{10}$ 이다.(원 $a^2+b^2=\frac{16}{25}$ 과 직선 $|3a-b|=k$가 접할 때 k는 최댓값 또는 최솟값을 가진다. 그림1 참조)

따라서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{10}\pi\cdot\frac{4}{5}\sqrt{10}=8\pi$ 이다.

[문제2] 대학발표 예시답안

문항 1.

원점 $(0,0)$ 과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,f(x))$ 사이의 거리의 제곱을 $g(x)$ ($0\le x\le 1$)라 하자.

함수 $g(x)$ 의 정의에 의해 $g(x)=x^2+(1-x^n)^{\frac{2}{n}}$ 이다.

$g(0)=1$, $g(1)=1$ 이고, $g'(x)=2x-2(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}$ 이다. $0<x<1$ 일 때

$g'(x)>0 \Leftrightarrow x-(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}-(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}>(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}} \Leftrightarrow$

$x<(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ ($n\ge 3$ 이므로) $\Leftrightarrow x^n<1-x^n \Leftrightarrow x^n<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

비슷한 방법으로 $g'(x)=0 \iff x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $g'(x)<0 \iff x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 임을 확인 할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 에서 $g(x)$ 가 최대가 된다.

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이므로 곡선 위의 점 중에서 원점까지의 거리가 최대인 점 A 의 좌표는 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ 이다.

문항 2.

$0<x<1$ 일 때, $f'(x)=-(1-x^n)^{\frac{1-n}{n}}x^{n-1}<0$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 의 한 점 $(x_0, f(x_0))$ 에서의 접선의 방정식은 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

점 P 의 좌표를 $(p,0)$, 점 Q 의 좌표를 $(0,q)$ 이라 하면

$$0=f'(x_0)(p-x_0)+f(x_0),\ q=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$$

따라서 $p=\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)}$, $q=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

즉, 점 P 의 좌표는 $\left(\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)},0\right)$, 점 Q 의 좌표는 $(0,f(x_0)-x_0f'(x_0))$ 이다.

이로부터 선분 PQ 의 길이의 제곱을 $h(x_0)$ 라 하면

$h(x_0)=\dfrac{|f(x_0)-x_0f'(x_0)|^2}{|f'(x_0)|^2}(1+(f'(x_0))^2)$ $(0<x_0<1)$을 얻는다.

한편 $|f(x_0)-x_0f'(x_0)|=\left|(1-x_0^n)^{\frac{1}{n}}+x_0^n(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}\right|=(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}$,

$|f'(x_0)|=(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}x_0^{n-1}$ 이므로 정리하면 $h(x_0)=\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^{2(n-1)}+(1-x_0^n)^{\frac{2(1-n)}{n}}$

선분 PQ 의 길이의 최솟값을 찾기 위해서는 구간 $(0,1)$ 에서의 $h(x)$ 의 최솟값을 찾으면 충분하다. x 가 0 또는 1 로 수렴함에 따라 $h(x)$ 는 양의 무한대로 발산한다.

또한 $h'(x)=2(1-n)\left(x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}\right)$ 이므로, $0<x<1$ 일 때

$h'(x)>0 \iff x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}<0$ ($n \geq 3$ 이므로) $\iff x^{2-3n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}<0$

$\iff x^{2-3n}<(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}} \iff x>(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ ($n \geq 3$ 이므로) $\iff x^n>1-x^n$

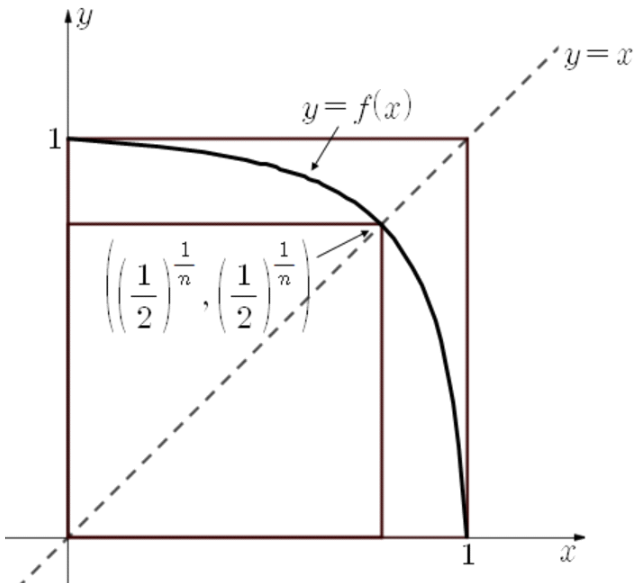
$\iff x^n>\dfrac{1}{2} \iff x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

비슷한 방법으로 $h'(x)=0 \iff x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $h'(x)<0 \iff x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 임을 확인 할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 에서 $h(x)$ 가 최소가 되고 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=2\cdot 4^{\frac{n-1}{n}}$ 이다.

선분 PQ 의 길이의 최솟값은 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$의 양의 제곱근인 $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}$ 이다.

문항 3.



$0<x<1$ 일 때 $f(x)>0$, $f'(x)<0$ 이고, $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

따라서 $0<x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<f(x)<1$ 이다. 이로부터

(한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 인 정사각형의 넓이)

$$=\int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}dx \le \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}f(x)\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(1-x^n)^{\frac{1}{n}}dx \le \int_0^1 1\,dx$$

= (한 변의 길이가 1 인 정사각형의 넓이)

를 얻는다. 정리하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \le d_n \le 1$

이 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}}=1$ 이므로 제시문 <다>에 의해 $\lim_{n\to\infty}d_n=1$

55 한양대학교 수시(오후2)[55)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(2문제, 6문항)	90분

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 점 (a, b) 에서 포물선 $y^2-2y-4x+13=0$ 에 두 개의 접선을 그을 수 있고 이 두 접선이 수직으로 만날 때, 점 (a, b) 를 모두 구하시오.

2. $s>\sqrt{6}$ 인 실수 s 에 대하여 점 $(-2, s)$ 에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 에 그을 수 있는 접선이 두 개다. 이 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta$ 의 값을 s 로 나타내시오.

3. 점 $(t, 6)$ 에서 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 에 그을 수 있는 접선이 두 개일 때, t 의 값을 모두 구하시오.

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. $0 \le a < b \le \pi$ 인 실수 a, b 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b(\sin b-\sin x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$$

2. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=\int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left|e^{-x}\cos x\right|dx$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 의 합을 구하시오.

3. 자연수 n 에 대하여 $b_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$ 일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}$ 를 구하시오.

55) 한양대학교 홈페이지

• 풀어보기

문제1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_0^x f'(t)dt = \sin^2 x$
(나) $\{f'(x)\}^2 - f(2x) - 1 = 0$

모든 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + n$$

이라 하고

$$a_n = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \{g(x) - (-1)^n f(x)\}dx$$

라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} a_k = p\pi$일 때, p의 값을 구하시오.(2016. 전국연합)

• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 225

(가)에서 $\int_0^x f'(t)dt = \sin^2 x$ 이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ 이고 $f'(0) = 0$

$\int_0^x f'(t)dt = \sin^2 x$ 에서 $f(x) - f(0) = \sin^2 x$

(나)에 $x = 0$을 대입하면 $\{f'(0)\}^2 - f(0) - 1 = 0$ 이므로

$f(0) = -1$ 이고 $f(x) = \sin^2 x - 1$

(i) n이 홀수인 경우

$$g(x) = f\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + n = \sin^2\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) - 1 + n = \cos^2 x - 1 + n$$

$$a_n = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \{g(x) - (-1)^n f(x)\}dx = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} (n-1)dx = \frac{\pi}{2}(n-1)$$

(ii) n이 짝수인 경우

$$g(x) = f\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + n = \sin^2\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) - 1 + n = \sin^2 x - 1 + n$$

$$a_n = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \{g(x) - (-1)^n f(x)\}dx = \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} n\,dx = \frac{\pi}{2}n$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{15} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{15} a_{2k} = \sum_{k=1}^{15} \frac{\pi}{2}\{(2k-1)-1\} + \sum_{k=1}^{15} \frac{\pi}{2}(2k) = \pi\sum_{k=1}^{15}(2k-1) = 225\pi$$

이므로 $p = 225$

[문제1] 대학발표 예시답안

문항 1.

포물선의 방정식을 정리하면 $(y-1)^2 = 4(x-3)$

$(y-1)^2 = 4(x-3)$ 을 x 축 방향으로 -3 만큼, y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동하여 얻는 새로운 포물선 $y^2 = 4x$ 를 고려하자.

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 (x_0, y_0) 에서의 접선의 방정식은 $x - \frac{y_0^2}{4} = x - x_0 = \frac{y_0}{2}(y - y_0)$, 즉,

$$x = \frac{y_0}{2}(y - y_0) + \frac{y_0^2}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

이 접선이 (a, b)를 지난다면 $a = \frac{y_0}{2}(b - y_0) + \frac{y_0^2}{4}$ 이고 정리하면 y_0 에 대한 이차 방정식

$y_0^2-2by_0+4a=0$ 을 얻는다. 이를 ②라 하자.

(다른 풀이) 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 (x_0,y_0) 에서의 접선의 방정식은 $y_0y=2(x+x_0)$ 이고 $y_0^2=4x_0$ 이므로, $y_0y=2x+\frac{y_0^2}{2}$ 이다. (a,b)를 대입하여 정리하면 $y_0^2-2by_0+4a=0$ 을 얻는다.

점 (a,b)에서 포물선 $y^2=4x$ 에 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, 접선과 포물선의 접점을 각각 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$ 라 하면 y_1 과 y_2 는 ②의 해이고 근과 계수와의 관계에 의해 $y_1y_2=4a$ ……③

한편, 두 접선이 수직으로 만나면 $y_1y_2\neq 0$ 이고, 점 P, Q 에서의 접선의 기울기는 ①에 의해 각각 $\frac{2}{y_1}$, $\frac{2}{y_2}$ 이다.

따라서 $\frac{4}{y_1y_2}=-1$. 즉, $y_1y_2=-4$ ……④

③과 ④를 연립하면 $a=-1$ 을 얻는다.

이제 원래의 포물선을 다루기 위해 $a=-1$ 를 x 축 방향으로 3 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동하면 $a=2$ (b 는 임의의 실수)가 우리가 원하는 점 (a,b)의 집합이 됨을 알 수 있다.

(나침반 다른 풀이)

포물선 $y^2=4x$ 에 접하는 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx+\frac{1}{m}$ 이다. 점 (x_1,y_1) 에서 포물선 $y^2=4x$ 에 그은 두 접선이 수직이 된다고 하면

$$y_1=mx_1+\frac{1}{m},\ m^2x_1-my_1+1=0$$

을 만족하는 실수 m이 두 개 존재해야 하고 그 두 실수의 곱이 -1이 되어야 한다. 그러므로

$$\frac{1}{x_1}=-1,\ x_1=-1$$

이어야 한다. 따라서 직선 $x=-1$ 위의 점에서 포물선 $y^2=4x$ 에 그은 두 접선은 서로 수직이다.

이제 원래의 포물선을 다루기 위해 포물선 $y^2=4x$ 와 $x=-1$을 x 축 방향으로 3 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동하면 $a=2$ (b 는 임의의 실수)가 우리가 원하는 점 (a,b)의 집합이 됨을 알 수 있다.

문항 2.

타원 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 (x_0,y_0) 에서의 접선의 방정식은 $x_0x+\frac{y_0y}{9}=1$

$y_0 \neq 0$ 이면 $y = -\dfrac{9x_0}{y_0}x + \dfrac{9}{y_0}$ (점 $(-2, s)$에서 타원 $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 에 그은 접선의 접점 (x_0, y_0) 은 $y_0 \neq 0$ 을 만족한다.)

$m = -\dfrac{9x_0}{y_0}$ 라 하자. $81x_0^2 + 9y_0^2 = 81$의 양변을 y_0^2으로 나누면 $m^2 + 9 = \dfrac{81x_0^2}{y_0^2} + 9 = \dfrac{81}{y_0^2}$ 가 되므로 $\dfrac{9}{y_0} = \pm\sqrt{m^2+9}$

따라서 기울기가 m 인 타원 $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 의 접선의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{m^2+9}$

이 식이 점 $(-2, s)$를 지나면 $s = -2m \pm \sqrt{m^2+9}$ 이고, 이를 정리하면

$$3m^2 + 4sm + (s^2 - 9) = 0$$

점 $(-2, s)$를 지나는 접선의 방정식의 기울기를 m_1, m_2라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여

$$m_1 + m_2 = -\frac{4s}{3},\ m_1 m_2 = \frac{s^2 - 9}{3}$$

이고, 이로부터

$$|m_1 - m_2| = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2} = \frac{2}{3}\sqrt{s^2 + 27}$$

을 얻는다.

기울기 m_1, m_2 인 두 직선이 이루는 각을 θ 라 하면 $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

따라서 $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{s^2+27}}{s^2 - 6}$ ($s > \sqrt{6}$)

문항 3.

쌍곡선 $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 (x_0, y_0) 에서의 접선의 방정식은 $x_0 x - \dfrac{y_0 y}{9} = 1$

이 접선이 점 $(t, 6)$을 지나면 $tx_0 - \dfrac{2y_0}{3} = 1$ ……⑤

이를 $x_0^2 - \dfrac{y_0^2}{9} = 1$ 과 연립하면 $(t^2 - 4)x_0^2 - 2tx_0 + 5 = 0$ ……⑥

점 $(t, 6)$에서 쌍곡선 $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 에 그을 수 있는 접선의 개수가 2 이기 위해서는 ⑥이 x_0에 대한 이차 방정식으로써 두 개의 실근을 가져야 한다. 이 때 y_0 는 ⑤에 의해 유일하게 결정되며 x_0 는 $x_0 \leq -1$ 또는 $x_0 \geq 1$ 을 만족한다.

경우1) $t = \pm 2$ 일 때 ⑥은 x_0 에 대한 일차 방정식이고 하나의 실근만을 갖는다.

경우2) $t \neq \pm 2$ 이라 가정하자. ⑥의 판별식이 양수이면, 즉,

$D/4 = t^2 - 5(t^2-4) = 4(5-t^2) > 0$ 이면 두 개의 실근을 갖는다. 따라서

$-\sqrt{5} < t < -2$, $-2 < t < 2$, $2 < t < \sqrt{5}$ 일 때 쌍곡선 $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 에 그을 수 있는 접선의 개수가 2 이다.

[문제 2] 대학발표 예시답안

문항 1.

함수 $f(x) = \sin x$ 는 미분 가능하므로,

평균값 정리에 의해 $a < x < b$ 인 실수 x 에 대하여 $\sin b - \sin x = (\cos\alpha)(b-x)$ 인 $\alpha \in (x, b)$ 가 존재한다.

또한, $f'(x) = \cos x$ 는 구간 $[0, \pi]$ 에서 감소하므로, $\cos a \ge \cos\alpha \ge \cos b$ 가 성립한다.

그런데, $b - x > 0$ 이므로, $(b-x)\cos a \ge (b-x)\cos\alpha = \sin b - \sin x \ge (b-x)\cos b$ 이다.

각 변을 a 에서 b 까지 적분하면,

$$\int_a^b (b-x)\cos b\,dx \le \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \int_a^b (b-x)\cos a\,dx$$

이다. 그러므로 $\dfrac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \displaystyle\int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \dfrac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 이다.

문항 2.

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x - \left[-e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx\right]$$

$$\therefore \int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x).$$

① $\displaystyle\int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} = (-1)^k\frac{1}{2}\left(e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} + e^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$

② $a_n = \displaystyle\int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} \left|e^{-x}\cos x\right| dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} e^{-x}\cos x\,dx, & k = \text{짝수} \\ -\displaystyle\int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} e^{-x}\cos x\,dx, & k = \text{홀수} \end{cases}$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} + e^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$$

따라서 급수의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi} + e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(e^{-\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{3}{2}\pi}\right) + \left(e^{-\frac{3}{2}\pi} + e^{-\frac{5}{2}\pi}\right) + \cdots + \left(e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} + e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}+2\left(e^{-\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{5}{2}\pi}+\cdots+e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}\right)+e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}+2\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}\left(1-e^{-(n-1)\pi}\right)}{1-e^{-\pi}}+e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi}+\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

문항 3.

$b_1=\frac{3}{2}$, $b_k-b_{k-1}=\frac{1}{k+1}$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{k}-\frac{b_k}{k+1}\right)=\left(b_1-\frac{b_1}{2}\right)+\left(\frac{b_2}{2}-\frac{b_2}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{b_n}{n}-\frac{b_n}{n+1}\right)$$

$$=b_1+\frac{1}{2}(b_2-b_1)+\frac{1}{3}(b_3-b_2)+\cdots+\frac{1}{n}(b_n-b_{n-1})-\frac{b_n}{n+1}$$

$$=\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{b_n}{n+1}$$

$$=2-\frac{1}{n+1}-\frac{b_n}{n+1}$$

부등식 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\le b_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\le 1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=1+\ln(x+1)$ 이 성립하므로, 각 변을 $n+1$로 나누고 극한($n\to\infty$)을 취하면,

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}=0$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}=2$ 이다.

56 한양대학교(의학계) 수시[56)]

출제범위	수능 최저기준	출제 분야	시험 시간
고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이면 해결할 수 있는 논술형	없음	수학(2문제, 6문항)	90분

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

좌표평면 위에 다음 세 직선 l_1, l_2, l_3 이 있다.

$$l_1 : 3x-4y=0\ ,\quad l_2 : 12x-5y=0\ ,\ l_3 : x+y-1=0$$

직선 l_1 과 l_2 에 의해 좌표평면이 4 개의 영역으로 분할된다. 이들 중 점 $(1,0)$ 을 포함하는 것을 A_1 이라 하고, 나머지 영역들을 A_1 으로부터 시계반대방향으로 A_2, A_3, A_4 라 하자. 양의 실수 a, b 가 주어졌을 때, 좌표평면 위의 원 중에서 직선 l_1, l_2, l_3 을 만나서 이루는 현의 길이가 각각 a, a, b 이고, 그 중심이 이들 직선 위에 있지 않은 원들을 생각하자.

1. 제시문의 원들 중 중심이 영역 A_4 의 내부에 있는 원이 존재하기 위한 필요충분조건을 a 와 b 로 나타내시오.

2. $a=2.57$, $b=1.06$ 일 때 제시문의 원들 중 중심이 영역 A_4 의 내부에 있는 원의 개수를 구하시오.

3. 제시문의 원들 중 중심이 영역 A_4 의 내부에 있는 원은 존재하지 않으며, 중심이 영역 A_2 의 내부에 있는 원은 단 하나 존재하도록 a 와 b 의 값을 선택하였다. 이때 원의 중심들 중 영역 A_2 의 내부에 있는 것의 좌표를 구하시오.

56) 한양대학교 홈페이지

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. $0 \le a < b \le \pi$ 인 실수 a, b 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$$

2. 자연수 n 에 대하여 $d_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$ 일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}$ 를 구하시오.

3. $m, n \ge 2$ 인 자연수 m, n 에 대하여 다항식 $(1-x)^m(1+x)^n$ 의 x^k 의 계수를 a_k $(0 \le k \le m+n)$ 라 하자. $a_k = a_{k+1} = 0$ 을 만족시키는 $k\,(0 \le k \le m+n-1)$ 가 존재하지 않음을 보이시오.

• 풀어보기

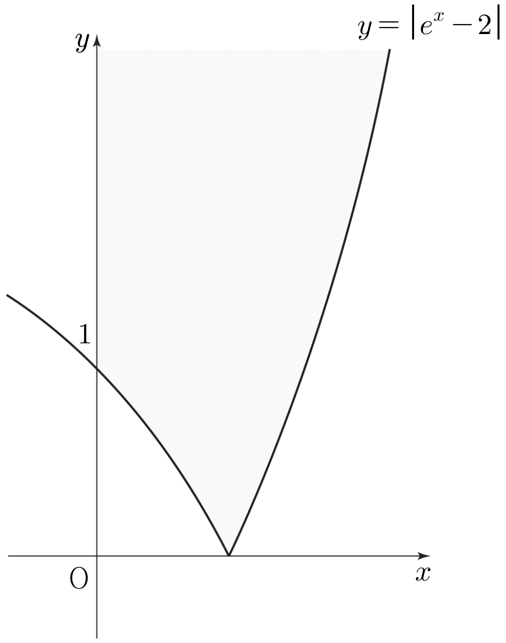
문제1. 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq \left| e^x - 2 \right| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자. 양의 실수 t에 대하여 영역 D의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다. (나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (2016. 전국연합)



• 예시답안

풀어보기(문제1) 정답 71

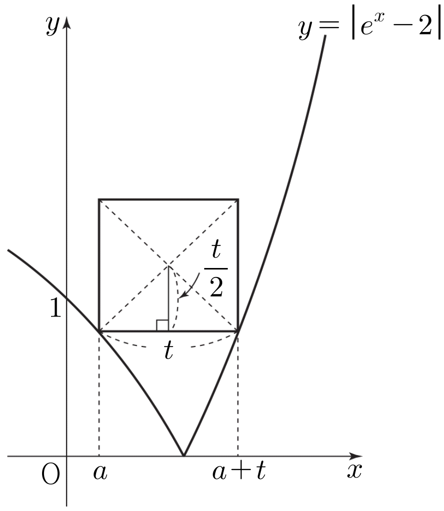
$g(x)=\left|e^x-2\right|$라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 좌표는 $(0,1)$, $(\ln 3, 1)$

$f(t)$는 한 변의 길이가 t인 정사각형의 꼭짓점이 $g(x)$의 그래프와 만날 때 정해진다.

$0<t\le \ln 3$이면 두 점에서 만나고 $t>\ln 3$이면 한 점에서 만날 때이다.

ⅰ) $0<t\le \ln 3$일 때

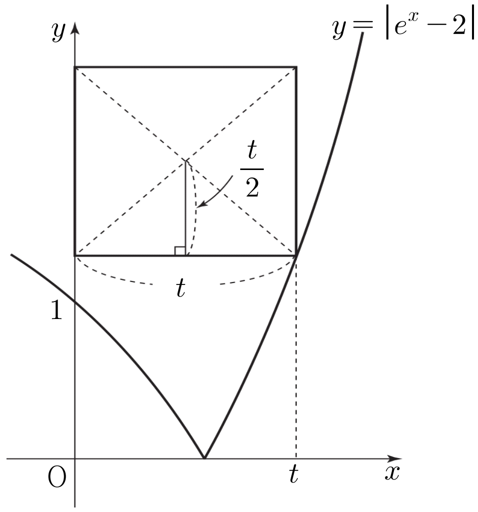


정사각형과 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표를 a와 $a+t$라 하면 두 교점의 좌표는 $(a, 2-e^a)$, $(a+t, e^{a+t}-2)$

두 교점의 y좌표가 같으므로 $e^a=\dfrac{4}{e^t+1}$이고, $f(t)=2-e^a+\dfrac{t}{2}$

$\therefore\ f(t)=2-\dfrac{4}{e^t+1}+\dfrac{t}{2}$

ⅱ) $t>\ln 3$일 때



정사각형과 $y=g(x)$의 교점의 좌표는 $(t,\, e^t-2)$

$\therefore\ f(t)=e^t-2+\dfrac{t}{2}$

그러므로 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} 2-\dfrac{4}{e^t+1}+\dfrac{t}{2} & (0<t\le \ln 3) \\ e^t-2+\dfrac{t}{2} & (t>\ln 3) \end{cases}$$

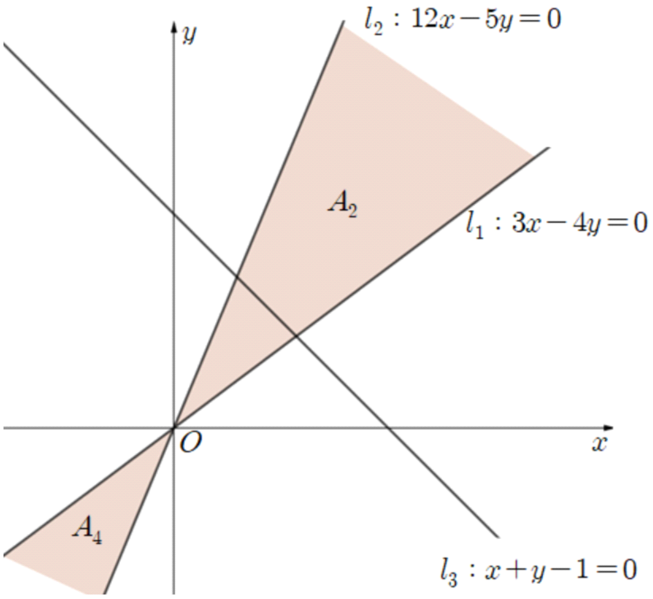
함수 $f(t)$의 도함수 $f'(t)$는

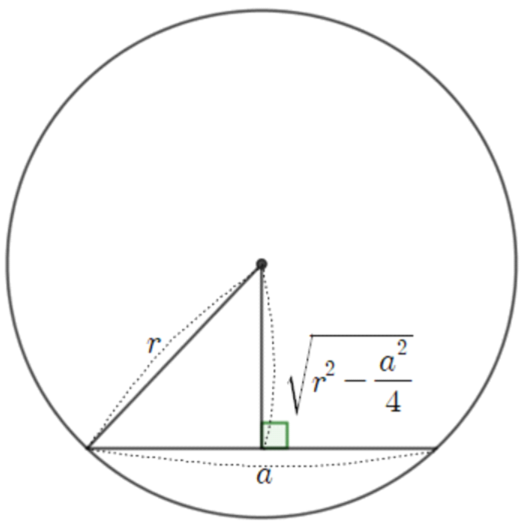
$$f'(t)=\begin{cases} \dfrac{4e^t}{(e^t+1)^2}+\dfrac{1}{2} & (0<t<\ln 3) \\ e^t+\dfrac{1}{2} & (t>\ln 3) \end{cases}$$

$f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\dfrac{25}{18}+\dfrac{11}{2}=\dfrac{62}{9}$

따라서 $p=9,\ q=62$이고 $p+q=71$

[문제1] 대학발표 예시답안





제시문의 조건을 만족하는 원의 중심점을 (x, y), 반지름을 r이라 하고, 점과 직선 사이의 거리 공식을 적용하면,

$$\frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\ \frac{|12x-5y|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\ \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}$$

$$\left(r>\frac{a}{2},\ r>\frac{b}{2}\right)$$

이 성립한다.

위의 세 식들을 연립하여 $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 에 대한 2차방정식을 유도하여 $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 의 값을 살펴보도록 한다.

문항 1.

$(x, y) \in A_4$ 이면 $3x - 4y = 5\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, $12x - 5y = -13\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 이므로 두 식을 연립하면

$x = -\frac{7}{3}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, $y = -3\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 이다.

따라서 $|x + y - 1| = \left|\frac{16}{3}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + 1\right| = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$ 이 성립한다.

위의 등식에서 양변에 3 을 곱한 후 제곱하면,

$256\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right) + 96\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + 9 = 18\left(r^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 18\left(r^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 - b^2}{4}\right)$ 이므로

$$238\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right) + 96\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + 9\left(1 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right) = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$X = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 으로 놓으면 위의 방정식(*)은 다음과 같이 변환된다.

$$238X^2 + 96X + \frac{9}{2}(2 + b^2 - a^2) = 0 \cdots\cdots(1)$$

물음의 원이 존재하려면 위의 방정식(1)은 양의 실수해를 가져야 하는데, 1차항의 계수가 양수이므로, <u>양의 실수해가 존재한다면 단 한 개만 가져야하고 이는 $2 + b^2 - a^2 < 0$ 일 때만 가능하다.</u> ⋯⋯★

$$\therefore 2 + b^2 - a^2 < 0$$

문항 2.

$a = 2.57$, $b = 1.06$ 이면 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 이고 $a + b > 1.5$, $a - b > 1.5$ 이므로 $a^2 - b^2 > 2$ 이다. 따라서 $a = 2.57$, $b = 1.06$ 이면 문항1에서 도출된 조건을 만족시키는데, ★에 의해 제시문의 원들 중 중심이 영역 A_4 의 내부에 있는 원은 1개다.

문항 3.

$(x, y) \in A_2$ 이면 $3x - 4y = -5\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, $12x - 5y = 13\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 이므로, 두 식을 연립하면

$$x = \frac{7}{3}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}, \ y = 3\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \text{ 이다. } \cdots\cdots(2)$$

따라서 $|x + y - 1| = \left|\frac{16}{3}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} - 1\right| = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$,

$$256\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)-96\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+9=18\left(r^2-\frac{b^2}{4}\right)=18\left(r^2-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2-b^2}{4}\right),$$

$$238\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)-96\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+9\left(1+\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\right)=0$$

$X=\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}$ 으로 놓으면 다음의 이차방정식을 얻는다.

$$238X^2-96X+\frac{9}{2}\left(2+b^2-a^2\right)=0\cdots\cdots(3)$$

한편 $(x,y)\not\in A_4$ 이므로 문항1에서 도출된 조건에 의해 $2+b^2-a^2\ge 0$이 성립해야 한다. 그러므로 방정식(3)의 양인 실수해는 다음의 두 가지 경우로 나누어서 구할 수 있다.

경우1) $2+b^2-a^2=0$일 때

$238X^2-96X+0=0$이므로 $\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}=X=\dfrac{48}{119}$ 이고,

이를 식 (2)에 대입하면 $x=\dfrac{16}{17}$, $y=\dfrac{144}{119}$ 이다.

경우2) $2+b^2-a^2>0$일 때

문항에서는 중심이 영역 A_2안에 있는 원이 단 하나 존재하도록 a, b가 선택되었다 했으므로, 방정식 (3)의 양의 실수해는 하나만 존재해야 한다. 방정식 (3)의 상수항은 양수이고 일차항의 계수가 음수이므로 양의 실수해가 하나만 존재하기 위해서는 방정식(3)은 중근을 가져야 한다.

따라서, $\sqrt{r^2-\dfrac{a^2}{4}}=X=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{96}{238}=\dfrac{24}{119}$ 이 성립해야 하고, 이를 식(2)에 대입하면

$x=\dfrac{8}{17}$, $y=\dfrac{72}{119}$

$\therefore$ 문항에서 요구하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{16}{17},\dfrac{144}{119}\right)$이거나 $\left(\dfrac{8}{17},\dfrac{72}{119}\right)$이다.

[문제1] 나침반 풀이

문항 1.

원의 중심 $(X,\ Y)\in A_4$에 대해서 원이 직선 $l_1:3x-4y=0$, $l_2:12x-5y=0$ 와 만나서 이루는 현의 길이가 같으므로 원의 중심에서 각 직선에 이르는 거리는 같다. 또한 $(X,\ Y)\in A_4$ 이므로 $X<0$, $Y<0$, $3X-4Y>0$, $12X-5Y<0$, $X+Y-1<0$이다. 그러므로

$$\frac{|3X-4Y|}{5}=\frac{|12X-5Y|}{5},\ \frac{(3X-4Y)}{5}=-\frac{(12X-5Y)}{5},\ Y=\frac{9}{7}X$$

이다.

원의 중심 $(X,\ Y)$에서 직선 $3x-4y=0$에 이르는 거리를 d_1이라 하면

$$d_1 = \frac{|3X - 4Y|}{5} = \frac{1}{5}\left|3X - 4\left(\frac{9}{7}X\right)\right| = -\frac{3}{7}X$$

이다. 그러므로 원의 반지름 r에 대해서

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{7}X\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9}{49}X^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

또한, 원의 중심 $(X,\ Y)$에서 직선 $x+y-1=0$에 이르는 거리를 d_3이라 하면

$$d_3 = \frac{|X+Y-1|}{\sqrt{2}} = \frac{-X-Y+1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-X - \frac{9}{7}X + 1\right) = \frac{1}{7\sqrt{2}}(-16X+7)$$

이다. 그러므로 원의 반지름 r에 대해서

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{49\times 2}(-16X+7)^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

이다. 식 (1)과 (2)에 의해서

$$\frac{a^2}{4} + \frac{9}{49}X^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{49\times 2}(-16X+7)^2$$

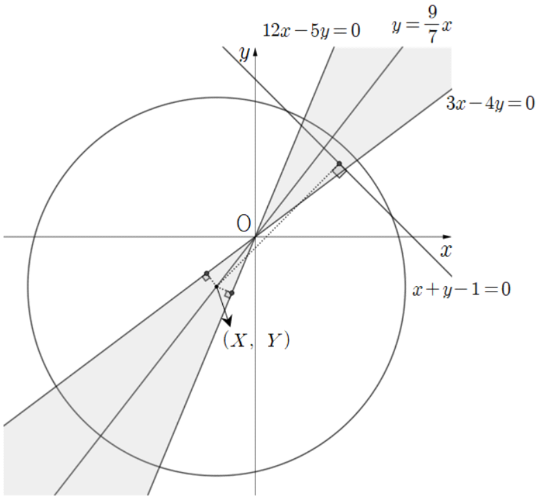
이고 이 식을 정리하면

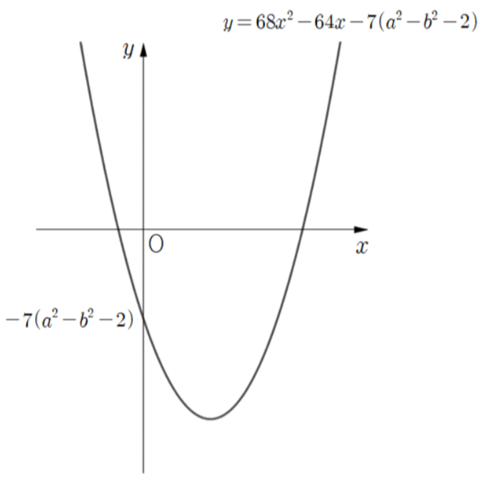
$$476X^2 - (7\times 4\times 16)X - 49(a^2-b^2-2) = 0,\ 68X^2 - 64X - 7(a^2-b^2-2) = 0$$

이다. 이 식을 만족하는 0보다 작은 실수 X가 존재해야 하므로

$$-7(a^2-b^2-2) < 0,\ a^2-b^2-2 > 0$$

이어야 한다. 따라서 제시문의 원들 중 중심이 영역 A_4의 내부에 있는 원이 존재하기 위한 필요충분조건은 $a^2-b^2-2>0$이다.





문항 2.

$a=2.57$, $b=1.06$이면 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$이고 $a+b>3$, $a-b>1$이므로 $a^2-b^2>2$이다. 그러므로 $a=2.57$, $b=1.06$이면 문항1에서 도출된 조건을 만족시키고 $68X^2-64X-7(a^2-b^2-2)=0$을 만족하는 0보다 작은 실수 X가 오직 하나 존재한다. 또

한 문항1에서 원의 중심 $(X,\ Y) \in A_4$에 대해서 $Y = \frac{9}{7}X$이어야 한다. 그러므로 원의 중심 $(X,\ Y) \in A_4$가 오직 하나 존재하며 $r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9}{49}X^2$ (a는 주어진 상수)인 반지름 r도 오직 하나 존재한다. 따라서 구하는 원의 개수는 1이다.

문항 3.
제시문의 원들 중 원의 중심이 $(x, y) \in A_2$인 원이 존재하려면 [문항 1]과 같은 방식에 의해서 $68x^2 - 64x - 7(a^2 - b^2 - 2) = 0$을 만족하는 0보다 큰 실수 x가 오직 하나 존재해야 한다.
한편, [문항 1]에 의해서 제시문의 원들 중 원의 중심이 $(X,\ Y) \in A_4$인 원이 존재하지 않으려면 $a^2 - b^2 - 2 \leq 0$ 이여야 한다.

i) $a^2 - b^2 - 2 = 0$일 때

$$68x^2 - 64x - 7(a^2 - b^2 - 2) = 0,\ 68x^2 - 64x = 0,\ x = \frac{16}{17} \text{ 이고}$$

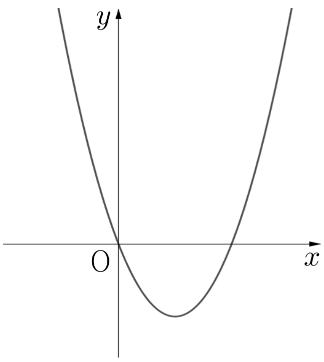
$$y = \frac{9}{7}x = \frac{144}{119}$$

ii) $a^2 - b^2 - 2 < 0$일 때
$68x^2 - 64x - 7(a^2 - b^2 - 2) = 0$이 오직 하나의 양의 실수를 가지려면 이차방정식의 판별식 D가 0이어야 한다. 이때

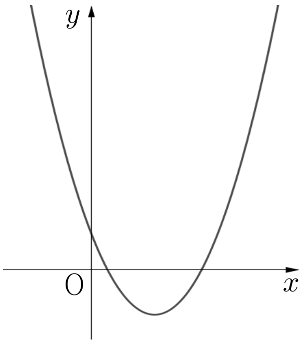
$$x = \frac{64}{2 \times 68} = \frac{8}{17},\ y = \frac{9}{7}x = \frac{72}{119}$$

i)과 ii)에 의해서 구하고자 하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{16}{17}, \frac{144}{119}\right)$이거나 $\left(\frac{8}{17}, \frac{72}{119}\right)$이다.

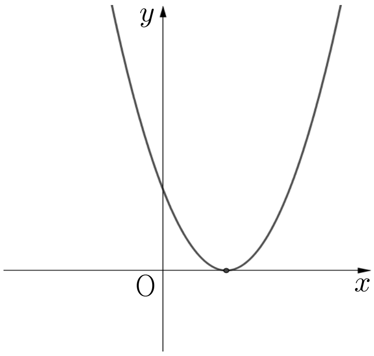
$y = 68x^2 - 64x - 7(a^2 - b^2 - 2)$의 그래프



$a^2 - b^2 - 2 = 0$ 일 때



$a^2 - b^2 - 2 < 0$ 일 때



$D = 0$ 일 때

[문제2] 대학발표 예시답안

문항 1.

함수 $f(x)=\sin x$는 미분 가능하므로,

평균값 정리에 의해 $a<x<b$인 실수 x에 대하여 $\sin b-\sin x=(\cos\alpha)(b-x)$인 $\alpha\in(x,b)$가 존재한다.

또한, $f'(x)=\cos x$는 구간 $[0,\pi]$에서 감소하므로, $\cos a\ \ge\ \cos\alpha\ \ge\ \cos b$가 성립한다.

그런데, $b-x>0$이므로, $(b-x)\cos a\ \ge\ (b-x)\cos\alpha=\sin b-\sin x\ \ge\ (b-x)\cos b$이다.

각 변을 a에서 b까지 적분하면,

$$\int_a^b (b-x)\cos b\,dx\ \le\ \int_a^b(\sin b-\sin x)dx\ \le\ \int_a^b (b-x)\cos a\,dx$$

이다. 그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b\ \le\ \int_a^b(\sin b-\sin x)dx\ \le\ \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$이다.

문항 2.

$d_1=\frac{3}{2}$, $d_k-d_{k-1}=\frac{1}{k+1}$이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d_k}{k}-\frac{d_k}{k+1}\right)=\left(d_1-\frac{d_1}{2}\right)+\left(\frac{d_2}{2}-\frac{d_2}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{d_n}{n}-\frac{d_n}{n+1}\right)$$

$$=d_1+\frac{1}{2}(d_2-d_1)+\frac{1}{3}(d_3-d_2)+\cdots+\frac{1}{n}(d_n-d_{n-1})-\frac{d_n}{n+1}$$

$$=\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{d_n}{n+1}$$

$$=2-\frac{1}{n+1}-\frac{d_n}{n+1}$$

부등식 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\ \le\ d_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\ \le\ 1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=1+\ln(x+1)$이 성립하므로, 각 변을 $n+1$로 나누고 극한($n\to\infty$)을 취하면,

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\ \le\ \lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}\ \le\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}=0$이므로, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}=2$이다.

문항 3.

$q(x)=(1-x)^{m-1}(1+x)^n$의 x^k의 계수를 b_k $(0\le k\le m+n-1)$,

$r(x)=(1-x)^m(1+x)^{n-1}$의 x^k의 계수를 c_k $(0\le k\le m+n-1)$이라 하자.

그러면 $p(x)=q(x)-xq(x)=r(x)+xr(x)$임을 알 수 있다.

위의 등식에서 $x^k\ (0\le k\le m+n)$의 계수를 비교하면, $a_k=b_k-b_{k-1}=c_k+c_{k-1}\cdots\cdots(1)$

$p(x) = \sum_{k=0}^{m+n} a_k x^k = (1-x)^m (1+x)^n$ 라 놓고, 양변을 미분하면

$p'(x) = \sum_{k=0}^{m+n} k a_k x^{k-1} = -m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1-x)^m(1+x)^{n-1} = -mq(x) + nr(x)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+n} k a_k x^{k-1} = -m \sum_{k=0}^{m+n-1} b_k x^k + n \sum_{k=0}^{m+n-1} c_k x^k$

위 등식에서 $x^{k-1}\,(1 \le k \le m+n)$ 의 계수를 비교하면, $ka_k = -mb_{k-1} + nc_{k-1}$ ……(2)

이항정리를 이용하면, $p(x)$ 의 x^{m+n} 의 계수는 $a_{m+n} = (-1)^m \times 1^n = (-1)^m \neq 0$ 임을 알 수 있다.

어떤 $k \in \{0, 1, \cdots, m+n-2\}$ 에 대하여 $a_k = a_{k+1} = 0$ 이라고 가정하자.

$a_k = a_{k+1} = 0$ 인 $k \in \{0, 1, \cdots, m+n-2\}$ 에 대하여, 식 (1)에 의하여

$b_k - b_{k-1} = 0$ ……① $c_k + c_{k-1} = 0$ ……②

$b_{k+1} - b_k = 0$ ……③ $c_{k+1} + c_k = 0$ ……④

식 (2)에 의해, $-mb_{k-1} + nc_{k-1} = 0$ ……⑤, $-mb_k + nc_k = 0$ ……⑥

$mb_k + nc_k = mb_k + n(-c_{k-1})$ ($\because$ ② $c_k = -c_{k-1}$)

$= mb_{k-1} - mb_{k-1} = 0$ ……⑦ ($\because$ ① $b_k = b_{k-1}$ ⑤ $-nc_{k-1} = -mb_{k-1}$)

식 ⑥과 식 ⑦을 연립하여 풀면 $b_k = c_k = 0$ 이고, 식 ③과 식 ④로부터 $b_{k+1} = c_{k+1} = 0$ 임을 알 수 있다.

식 (2)에 의해, $(k+2)a_{k+2} = -mb_{k+1} + nc_{k+1} = 0$. 따라서 $a_{k+2} = 0$ 이다.

$a_{k+1} = a_{k+2} = 0$ 이므로, 같은 방법으로 $b_{k+2} = c_{k+2} = 0$ 과 $a_{k+3} = 0$ 을 얻는다.

같은 방법으로 계속하면, $l \ge k$ 에 대하여 $a_l = 0$ 을 얻는다.

즉, $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{m+n} = 0$ 이다.

그런데, $a_{m+n} \neq 0$ 이므로, 모순이다. 그러므로 $a_k = a_{k+1}$ 인 $k \in \{0, 1, \cdots, m+n-1\}$ 는 존재하지 않는다.

발간을 도와주신 분

기획

전 영 근 부산광역시교육청 교육국장
이 수 한 부산광역시교육청 중등교육과장
김 종 희 부산광역시교육청 중등교육과 장학관
김 현 구 부산광역시교육청 중등교육과 장학사

집필

강 진 희 남산고등학교
김 현 미 부산진여자상업고등학교
박 윤 효 부산국제고등학교
박 혜 정 동래고등학교
심 미 례 사상고등학교
원 태 경 동래고등학교
위 성 미 부산사대부설고등학교
정 경 영 부산사대부설고등학교
조 준 혁 동천고등학교
최 기 원 부산중앙여자고등학교

2018학년도 수리논술 나침반 X

발행처 부산광역시교육청
발행일 2018년 5월 ?일

인쇄처 효민디앤피(051-807-5100)