■ 서울대학교 2013학년도 기출문제

[문제 1]

구간 $[0, 1]$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

논제 1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록인 구간과 아래로 볼록인 구간을 구하여라.
논제 2. 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그려라.

[풀 이]

논제 1. $f'(x)=\dfrac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}=0$에서 $x=0, \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$을 구할 수 있다. 따라서 구간 $[0, 1]$에서 감소함수이고 $\left(0, \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)$에서 위로 볼록, $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}, 1\right)$에서 아래로 볼록이다.

논제 2. $f(0)=1, f(1)=\dfrac{1}{2}$까지 추가하여 그리면 된다.

[문제 2]

좌표공간에 원판 $D=\{(x, y, 0)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$과 선분 $l=\{(x, 0, 1)\,|\,-1\le x\le 1\}$이 주어져 있다. 선분 l 위의 점 P를 꼭지점으로 하고 원판 D를 밑면으로 하는 원뿔을 C_P라 하자. 점 P가 선분 l 위를 움직일 때, 원뿔 C_P에 의하여 생기는 입체를 C라 하자.

논제 1. 입체 C를 xy평면에 평행한 평면으로 자른 단면의 모양을 설명하여라.
논제 2. 입체 C의 부피를 구하여라.

[풀 이]

논제 1. 원뿔의 밑면에 평행하게 자른 단면의 모양은 원이 된다. $z=t\ (0\le t\le 1)$인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면 $S(t):\pi=(1-t)^2:1$로부터 $S(t)=\pi(1-t)^2$이다.

논제 2. 입체 C의 부피를 V라 하면 $V=\displaystyle\int_0^1 \pi(1-t)^2dt=\frac{\pi}{3}$이다.

[문제 3]

좌표평면 위에 주어진 함수 $y=\dfrac{5}{2x}$의 그래프에 대하여 다음 물음에 답하여라.

논제 1. 위 그래프가 쌍곡선임을 보이고 두 초점 F_1, F_2의 좌표를 구하여라. (단, F_1의 x좌표는 양수이다.)

논제 2. 함수 $y=x$의 그래프와 쌍곡선 $y=\dfrac{5}{2x}$의 교점 중에서 제 1사분면 위에 있는 점을 T라 할 때, 쌍곡선 $y=\dfrac{5}{2x}$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\displaystyle\lim_{P\to T}\frac{\angle PF_1F_2}{\angle PF_2F_1}$를 구하여라. (단, 각의 단위는 라디안이다.)

[풀 이]

논제 1. 함수 $y=\dfrac{5}{2x}$는 $y=x$, $y=-x$ 대칭이므로 두 초점은 $y=x$ 위에 존재한다. 따라서 두 초점의 좌표를 $F_1(a, a), F_2(-a, -a)\ (a>0)$라 놓을 수 있고 $y=x$와 $y=\dfrac{5}{2x}$의 교점을 구하면 $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$이므로 주축의 길이는 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이다.

점근선이 x, y축이므로 초점 사이의 거리는 주축 길이의 $\sqrt{2}$배인 $2\sqrt{10}$이 된다. 따라서 $2\sqrt{2}a=2\sqrt{10}$으로부터 $a=\sqrt{5}$가 된다. 초점의 좌표는 $F_1(\sqrt{5},\ \sqrt{5}), F_2(-\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$이다. 함수를 $-\frac{\pi}{4}$만큼 회전이동할 때 관계식은 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이고 역변환을 구하면 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$이므로 대입하여 정리하면 $x^2-y^2=5$가 된다.

논제 2. 식을 간단히 하기 위하여 회전이동한 쌍곡선의 방정식을 사용하도록 하자. 쌍곡선의 방정식은 $x^2-y^2=5$이고 옮겨진 초점의 좌표는 $F_1(\sqrt{10}, 0), F_2(-\sqrt{10}, 0), T(\sqrt{5}, 0)$이다.

$\angle PF_1F_2=\alpha,\ \angle PF_2F_1=\beta$라 하면 $\tan\alpha=\frac{y}{\sqrt{10}-x}, \tan\beta=\frac{y}{\sqrt{10}+x}$가 된다.

$\lim_{P\to T}\frac{\angle PF_1F_2}{\angle PF_2F_1}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\alpha}{\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\beta}{\beta}\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$인데 α, β는 0으로 수렴하므로

$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\tan\alpha}{\alpha}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\tan\beta}{\beta}=1$이다. 따라서 구하고자 하는 극한값은

$$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\frac{y}{\sqrt{10}-x}}{\frac{y}{\sqrt{10}+x}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}=3+2\sqrt{2}$$이다.

[문제 4]

좌표평면에서 영역 S가 주어져 있다고 하자. (단, $0<S$의 넓이$<\infty$)

S에 포함된 임의의 영역 R에 대하여 다음을 가정한다. 영역 S에서 한 점을 무작위로 택할 때, 그 점이 영역 R에 있을 확률은 $\frac{R\text{의 넓이}}{S\text{의 넓이}}$이다.

이제 좌표평면에서 부등식 $-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$로 주어진 영역에서 한 점 (a, b)를 무작위로 택하여 다음 연립방정식을 만들었다.

$$\begin{cases} 3u-v=a \\ u+v=b \end{cases}$$

이 연립방정식의 해 (u, v)가 $u\ge 0$을 만족시키는 사건을 A, $v\ge 0$을 만족시키는 사건을 B, $v\ge u$를 만족시키는 사건을 C라고 할 때, 다음 질문에 답하여라.

논제 1. 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률 $P(A\cap B)$를 구하여라.

논제 2. 두 사건 A와 C는 서로 독립임을 보여라.

논제 3. a, b가 모두 양수인 사건을 D라 할 때, 조건부확률 $P(D|A\cap B)$를 구하여라.

[풀 이]

연립방정식을 행렬로 표현하면 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$이고 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$이다.

따라서 $u=\frac{1}{4}(a+b), v=\frac{1}{4}(-a+3b)$이다.

$u\ge 0$에서 $b\ge -a$, $v\ge 0$에서 $b\ge\frac{a}{3}$, $v\ge u$에서 $b\ge a$를 얻을 수 있다.

논제 1. 전체 넓이는 4이고 $A\cap B$에 해당하는 영역의 넓이는 $\frac{4}{3}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$이다.

논제 2. $P(A)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{2}$이고 $A\cap C$를 만족하는 영역은 $b\ge a, b\ge -a$이므로 전체 영역의 $\frac{1}{4}$이

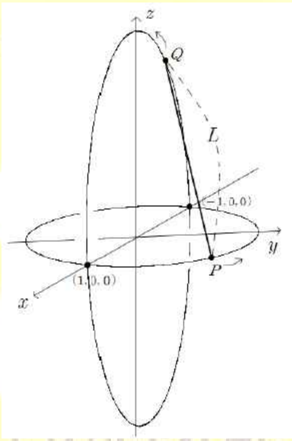
다. 따라서 $P(A\cap C)=\dfrac{1}{4}$이다.

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$가 성립하므로 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

논제 3. $P(D|A\cap B)=\dfrac{P(A\cap B\cap D)}{P(A\cap B)}=\dfrac{1-\dfrac{1}{6}}{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{5}{8}$이다.

[문제 5]

좌표공간에서 xy평면에 놓여 있는 원 $\{(x,y,z)\,|\,x,y,z$는 실수, $x^2+y^2=1,\ z=0\}$을 따라 일정한 방향으로 한 바퀴 도는 점 $P(\cos t,\sin t,0)$을 생각하자. 그리고 양의 상수 a, L과 연속함수 $u(t), v(t)$가 다음의 세 조건을 만족시킨다고 하자.



(가) 매개변수 t가 0에서 2π까지 증가하는 동안 점 $Q(u(t),0,v(t))$가 좌표공간에서 xz평면에 놓여 있는 타원 $\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x,y,z\in R,\ x^2+\dfrac{z^2}{a^2}=1,\ y=0\right\}$을 따라 일정한 방향으로 한 바퀴 돈다.

(나) 구간 $[0,2\pi]$에 속한 모든 t에 대하여 두 점 $P(\cos t,\sin t,0)$, $Q(u(t),0,v(t))$ 사이의 거리가 L로 일정하다.

(다) 구간 $[0,2\pi]$에서 방정식 $u(t)=0$의 해가 정확히 두 개 존재한다.

이 때, 다음 질문에 답하여라.

논제 1. 구간 $[0,2\pi]$에 속한 모든 t에 대하여 $u(t)\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}=L^2-(1+a^2)$이 성립함을 보이고, 이로부터 $L^2=1+a^2$임을 설명하여라.

논제 2. 구간 $[0,2\pi]$에 속한 모든 t에 대하여 $(1-a^2)u(t)=2\cos t$가 성립함을 설명하여라.

논제 3. 상수 a, L과 함수 $u(t), v(t)$를 모두 구하고 그 과정을 설명하여라.

[풀 이]

논제 1. 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면

$(u(t)-\cos t)^2+\sin^2 t+(v(t))^2=L^2$에서 $(v(t))^2=a^2-a^2(u(t))^2$이므로 앞에 식에 대입하면

$(u(t))^2-2\cos t\,u(t)+1+a^2-a^2(u(t))^2=L^2$이고 이를 정리하면

$u(t)\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}=L^2-(1+a^2)$이 성립한다.

제시문 (다)에 의하여 $u(t_0)=0$을 만족하는 t_0가 존재하므로 대입하면 $L^2-1-a^2=0$이므로 $L^2=1+a^2$이 성립한다.

논제 2. 논제 1에 의하여 모든 t에 대하여 $u(t)\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}=0$가 성립한다. 그러면 $u(t)=0$

을 만족하는 $t=\alpha, \beta$를 제외한 모든 t에 대해서 $(1-a^2)u(t)-2\cos t=0$이 성립한다. 만약 $t=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$이면 $\cos t=0$이므로 식에 대입하면 $(1-a^2)(u(t))^2=0$에서 타원이라는 조건으로부터 $a^2 \neq 1$이므로 $u(t)=0$이 된다. 따라서 $t=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$이면 $u(t)=0$가 성립한다. 따라서 모든 t에 대하여 $(1-a^2)u(t)=2\cos t$가 성립한다.

논제 3. $[0, 2\pi]$에서 $u(t)=0$을 만족하는 해가 2개이려면 점 Q는 $(1, 0, 0)$ 또는 $(-1, 0, 0)$에서 출발을 해야 하는데 $(1, 0, 0)$에서 출발하면 $L=0$이 되므로 모순이다. 따라서 점 Q의 출발점은 $(-1, 0, 0)$이다. 즉 $u(t)=\frac{2\cos t}{1-a^2}$에 $t=0$을 대입하면 $u(0)=\frac{2}{1-a^2}=-1$에서 $a=\sqrt{3}$이고 $L=2$이다. 따라서 $u(t)=-\cos t$이고 $v(t)=\pm\sqrt{3}\sin t$이다.

[문제 6]

$[-a, a]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 미분가능이고 $f(-x)=f(x)$를 짝함수, $f(-x)=-f(x)$를 홀함수라 한다.

논제 1. $f(x)$가 짝함수일 때, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$,

$f(x)$가 홀함수일 때, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$임을 설명하시오.

논제 2. $(-\infty, \infty)$에서 $f'(x)$가 연속인 짝함수이고 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx=0$일 때, $f(x)$는 홀함수임을 설명하고, $f(1)=f(-1)=0$임을 설명하시오.

[풀 이]

논제 1. $\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx$ 이므로 $\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx=\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ 이다. $f(x)$가 짝함수이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$f(x)$가 홀함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=-\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$$=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=0$$

논제 2. $f'(x)=f'(-x)$에서 양변을 부정적분하면 $f(x)=-f(-x)+C$

$f(x)+f(-x)=C$이고 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(-x)\,dx=0$이므로 $C=0$이다.

따라서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 홀함수이다. $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이다.

$\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx=0$에서 $f(1)-f(-1)=0$이므로 $f(1)=f(-1)=k$라 하면 $f(x)$는 홀함수이므로 모든 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. 여기에 $x=1$을 대입하면 $k=-k$이므로 $k=0$ 즉 $f(1)=f(-1)=0$이다.

[문제 7]

논제 1. 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 적어도 하나는 0이 아니라고 하자. 또한 독립인 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_n$은 0 또는 1만을 그 값으로 가지며 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이라고 하자. 이때, $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$이 0이 될 확률이 $\frac{1}{2}$을 넘지 않음을 보여라.

논제 2. 1부터 6까지 눈이 나오는 확률이 $p_1, p_2, \cdots, p_6$인 주사위와 1부터 6까지 눈이 나오는 확률이 $q_1, q_2, \cdots, q_6$인 주사위 두 개를 동시에 던졌을 때 눈의 합이 $2, 3, \cdots, 12$가 나올 확률이 다 같게 나오도록 $p_1, p_2, \cdots, p_6$과 $q_1, q_2, \cdots, q_6$을 정할 수 없음을 보여라. (도움말 : 귀류법을 사용하시오.)

[풀 이]

논제 1. 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 0이 아닌 것의 개수를 $k\,(>0)$라 하고 k개에 대응되는 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 중 k개 모두가 0이 될 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$이다. 그러므로 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$이 0이 될 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$을 넘을 수 없다. 따라서 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$이 0이 될 확률 또한 $\frac{1}{2}$을 넘지 않는다.

논제 2. 두 개를 동시에 던졌을 때 눈의 합이 $2, 3, \cdots, 12$가 나올 확률이 다 같데 나오도록 $p_1, p_2, \cdots, p_6$과 $q_1, q_2, \cdots, q_6$을 정할 수 있다고 가정하면 아래의 식이 성립한다.

$p_1q_1 = p_1q_6+p_2q_5+p_3q_4+p_4q_3+p_5q_2+p_6q_1 = \frac{1}{11}$ 에서 $q_1 > q_6$이고

$p_6q_6 = p_1q_6+p_2q_5+p_3q_4+p_4q_3+p_5q_2+p_6q_1 = \frac{1}{11}$ 에서 $q_6 > q_1$이다. 모순이 발생하므로 불가능하다.

[문제 8]

논제 1. n, k는 자연수, $n \geq k$일 때, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$에서 x^k의 개수는?

논제 2. a_n이 다음과 같을 때 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하시오.

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n < k) \\ \left(1+\frac{x}{n}\right)\text{에서 } x^k \text{의 계수} & (n \geq k) \end{cases}$$

[풀 이]

논제 1. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{x}{n}\right)^k$이므로 x^k의 계수는 ${}_nC_k\frac{1}{n^k}$이다.

논제 2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} {}_nC_k\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!}$

[문제 9]

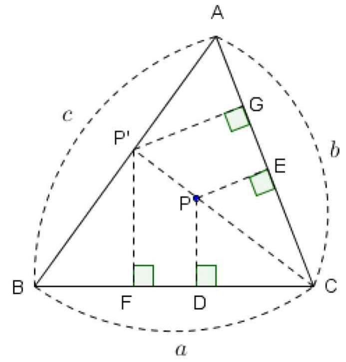
예각 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{CA}=b\ (a<b<c)$라 하고, $\triangle ABC$의 경계 및 내부에 위치한 점을 P라 하자. 점 P와 $\overline{BC}$사이의 거리와 P와 $\overline{CA}$사이의 거리를 합한 값을 $f(P)$라 한다.

논제 1. $f(P)$가 최대가 되는 점 P는 $\overline{AB}$ 위에 있음을 보이시오.

논제 2. P가 어디에 있을 때 $f(P)$가 최대가 되는가? 이 때 $f(P)$의 값을 삼각형의 넓이 S와 a, b, c로 나타내시오.

[풀 이]

논제 1. 다음 그림과 같이 삼각형 ABC의 내부에 임의의점 P를 정하고 선분 CP의 연장선이 선분 AB와 만나는 점을 P'라 하자. 항상 $\overline{PC} < \overline{P'F}, \overline{PE} < \overline{P'G}$를 만족한다. 따라서 $f(P)$의 최대가 되는 점 P는 항상 $\overline{AB}$위에 있다.

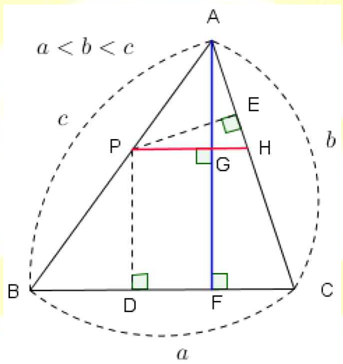


논제 2. 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 F라 두고 점 P에서 선분 AF에 내린 수선이 선분 AF, 선분 AC와 만나는 점을 각각 점 G, 점 H라 두자.

$a<b<c$이고 $\triangle ABC$와 $\triangle APH$는 닮음이므로 $\overline{AG}>\overline{PE}$이다. 또한 $\overline{PD}=\overline{GF}$이므로

$f(P)=\overline{PD}+\overline{PE}<\overline{PD}+\overline{AG}=\overline{AG}+\overline{GF}=\overline{AF}$

이다. 따라서 $f(P)$의 최대가 되는 경우는 점 P가 점 A와 일치할 때이며 $f(P)$의 최댓값은 $\overline{AF}$이다.



$S=\dfrac{1}{2}af(P)$이므로 $f(P)=\dfrac{2S}{a}$이다.