2022학년도 아주대학교 수시모집 논술전형 모의고사 01회

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하여라.

수열의 일반항이 $a_n = (\sqrt{2}+1)^{2n-1} - (\sqrt{2}-1)^{2n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$일 때,

여기서, $a_1 = (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2$, $a_2 = (\sqrt{2}+1)^3 - (\sqrt{2}-1)^3 = 14$

그리고, $\sqrt{2}+1 = t$라 하면, $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{1}{t}$이므로 $a_n = t^{2n-1} - \dfrac{1}{t^{2n-1}}$

로 나타내어진다. 따라서

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_n &= t^{2n+3} - \frac{1}{t^{2n+3}} + t^{2n-1} - \frac{1}{t^{2n-1}} \\ &= t^{2n+1}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t^{2n+1}}\left(\frac{1}{t^2} + t^2\right) \\ &= \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\left(t^{2n+1} - \frac{1}{t^{2n+1}}\right) = 6a_{n+1} \Leftarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = (\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 6 \end{aligned}$$

에서 $\dfrac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = 6$ (상수) 성질을 가지고 있다.

자연수 n에 대하여 $c_1 = 2,\ d_1 = 1$이고 $c_{n+1} = \dfrac{c_n + d_n}{2},\ d_{n+1} = \dfrac{2c_n d_n}{c_n + d_n}$을 만족시키는 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$을 정한다. 여기서, $c_n d_n$을 구하여라.

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n b_n$$

이것으로부터 $a_n b_n = a_{n-1}b_{n-1} = \ \cdots\ = a_1 b_1$이므로 $a_n b_n = 2$이다.

[문제 1-1] a_n은 모두 정수인 것을 보여라.

[문제 1-2] $a_{n+4} - a_n$이 6의 배수인 것을 보이고, a_{98}을 3으로 나눈 나머지를 구하여라.

[문제 1-3] $c_n > d_n$임을 보여라.

[문제 1-4] 극한값 $\lim\limits_{n \to \infty} c_n$을 구하여라.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하여라.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분 가능할 때, 함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$의 도함수를 구해보자.

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\ &= \frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{g(x+\Delta x)g(x)}\end{aligned}$$

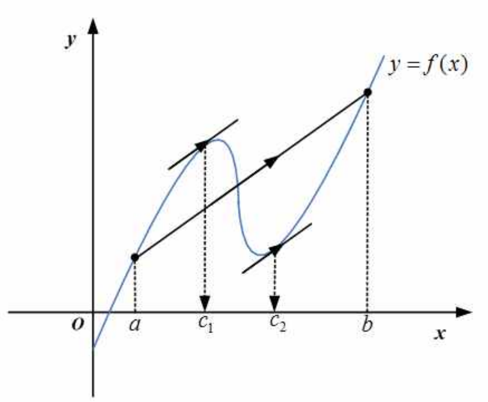
따라서 도함수의 정의에 의해

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\cdot g(x)-f(x)\cdot\left(\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

이다. 그런데 함수 $g(x)$가 연속이므로 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$이다.

따라서 $y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ 이다.

평균값의 정리란 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분가능 할 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ $(a<c<b)$를 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다. 즉, 기하학적으로는 두 점 사이 기울기 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$와 같은 기울기의 접선을 갖는 점이 a, b 사이에 존재한다는 것이다.



여기서, $f'(x)<0$일 때, 폐구간 $[a,\ b]$에서는 $f(x)$가 감소함수라는 것을 평균값의 정리를 이용해 증명해 보자. 폐구간 $[a,\ b]$의 임의의 두 점을 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하면 폐구간 $[x_1, x_2]$에서 평균값의 정리가 적용되므로, 어떤 t $(x_1<t<x_2)$에 대하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(t)$$

이 성립한다. 따라서 폐구간 $[x_1, x_2]$에서 $f'(t)<0$이므로 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$이다. 주어진 조건에 의해서 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)<0$이다. 즉, 폐구간 $[a,\ b]$의 임의의 두 점 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 $f(x_2)<f(x_1)$의 관계가 성립하므로 $f(x)$는 감소함수이다. 특히, 실수 구간에서 감소함수나 증가함수는 실근이 존재한다면 그 근은 유일하게 존재한다.

모든 실수에서 정의되는 함수 $f(x)$가 이계도함수 $f''(x)$를 갖고, $f(0) = 0$이고 $f''(x) > 0 \ (-\infty < x < \infty)$를 만족한다.
함수 $u(x)$를

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x \neq 0) \\ f'(0) & (x = 0) \end{cases}$$

이라 정의한다.

[문제 2-1] $u(x)$는 $x = 0$에서 연속임을 보여라. 그리고 $x \neq 0$일 때 $u'(x)$를 $u'(x) = \dfrac{H(x)}{x^2}$ 형태로 나타내고, $H(x) > 0$임을 보여라.

[문제 2-2] 상수 $\alpha(\alpha \neq 0)$에 대하여 직선 $y = u(\alpha)x$와 곡선 $y = f(x)$의 교점의 x 좌표를 모두 구하라.

[문제 2-3] α가 $0 < \alpha < 1$의 범위에서 움직일 때, $T(\alpha) = \int_0^1 |u(\alpha)x - f(x)|dx$의 값이 최소가 되는 α의 값을 구하라.

【예시답안】

[문제 1-1] 제시문에 의하여 $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n \ (n \geq 1)$ ……①

인 점화식이 성립한다.

모든 자연수 n에 대하여 a_n이 정수임을 수학적 귀납법으로 증명하자.

(i) $n=1, 2$일 때는 (1)에서 성립한다.

(ii) $n=k, k+1$일 때, 성립하면 ①에서 $a_{k+2}=6a_{k+1}-a_k$이므로 a_{k+2}도 정수이다.

(i), (ii)에 의하여 a_n은 모두 정수이다. (증명 끝)

[문제 1-2] ①을 반복하여 이용하면,

$$a_{n+4}=6a_{n+3}-a_{n+2}=6a_{n+3}-(6a_{n+1}-a_n)=6(a_{n+3}-a_{n+1})+a_n$$

$$\therefore\ a_{n+4}-a_n=6(a_{n+3}-a_{n+1})$$

a_{n+3}, a_{n+1}은 정수이므로 $a_{n+4}-a_n$은 6의 배수이다.

여기에서, a_{n+4}와 a_n의 각각을 6으로 나눈 나머지를 각각 r_{n+4}, r_n이라 하면, $r_{n+4}=r_n$이 된다.

따라서, $r_{98}=r_{94}= \cdots =r_2$이고, $a_2=14$에서 $r_2=2$

$\therefore\ r_{98}=2$이고, $0 \leq 2 < 3$이므로 a_{98}을 3으로 나눈 나머지는 2 [답]

[문제 1-3] $c_n > d_n > 0$을 수학적 귀납법을 써서 증명한다.

(i) $n=1$일 때 $c_1=2, d_1=1$이므로, 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $c_k > d_k > 0$임을 가정하면 $c_kd_k=2$이므로

$$c_{k+1}-d_{k+1}=\frac{c_k+d_k}{2}-\frac{4}{c_k+d_k}=\frac{(c_k+d_k)^2-8}{2(c_k+d_k)}=\frac{(c_k-d_k)^2}{2(c_k+d_k)}>0$$

$$(\because\ c_k > d_k > 0)$$

$\therefore\ n=k+1$일 때에도 성립한다.

따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $c_n > d_n$ (증명 끝)

[문제 1-4] $n \geq 2$일 때,

$$c_n-d_n=\frac{c_{n-1}+d_{n-1}}{2}-\frac{4}{c_{n-1}+d_{n-1}}=\frac{(c_{n-1}+d_{n-1})^2-8}{2(c_{n-1}+d_{n-1})}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(c_{n-1}-d_{n-1})^2}{c_{n-1}+d_{n-1}} \quad (\because\ c_{n-1}d_{n-1}=2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{c_{n-1}-d_{n-1}}{c_{n-1}+d_{n-1}}(c_{n-1}-d_{n-1}) \quad \cdots\cdots①$$

위의 조건에서 $c_{n-1} > d_{n-1}(>0)$이므로 $0 < \dfrac{c_{n-1}-d_{n-1}}{c_{n-1}+d_{n-1}} < 1$

가 성립한다. 따라서, ①에서 $\dfrac{c_{n-1}-d_{n-1}}{c_{n-1}+d_{n-1}}$ 대신 1로 바꾸면

$$c_n - d_n < \frac{1}{2}\left(c_{n-1}-d_{n-1}\right) \qquad \cdots\cdots②$$

$n \geq 2$일 때

$$c_n = \frac{c_{n-1}+d_{n-1}}{2} < \frac{c_{n-1}+d_{n-1}}{2} = c_{n-1} \qquad \therefore\ 0 < c_n < c_{n-1}$$

따라서 ②의 좌변에 c_n, 우변에 c_{n-1}을 곱하면

$$0 < c_n^2 - c_n d_n < \frac{1}{2}\left(c_{n-1}{}^2 - c_{n-1}d_{n-1}\right) \Longleftrightarrow c_n^2 - 2 < \frac{1}{2}\left(c_{n-1}{}^2 - 2\right)$$

$$\therefore\ 0 < c_n^2 - 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(c_1^2 - 2\right)$$

여기서 $n \to \infty$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$이므로

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left(c_n^2 - 2\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(c_1^2-2\right) = 0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} c_n^2 = 2$$

$c_n > 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2}$ [답]

[문제 2-1]

위의 조건에 따라 $f(0)=0$이므로, 도함수의 정의에 의해

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

그리고 $u(0)=f'(0)$이므로 $\lim_{x\to 0} u(x) = u(0)$이 성립하므로 $u(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

그리고 $x \neq 0$일 때,

$$u'(x) = \left\{\frac{f(x)}{x}\right\}' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{H(x)}{x^2} \quad \cdots\cdots①$$

이므로 $H(x) = xf'(x) - f(x)\ (x \neq 0)$이다. 여기서, $H(x)$를 x관하여 미분하면

$$H'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) \cdots\cdots②$$

이 된다.

조건에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $x > 0$일 때 $H'(x) > 0$이고, $x < 0$일 때 $H'(x) < 0$이다.

$H(0)=0$이므로 ②로부터 $H(x)$는 모든 실수 x에서 연속인 함수 x와 $f''(x)$의 곱이므로 실수에서 연속이 되고, $x=0$의 좌우에서 $H'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $H(x)$는 $x=0$에서 최소값 0을 갖는다.

따라서 $x \neq 0$일 때, $H(x) > 0$ $\cdots\cdots③$ 가 성립한다.

[문제 2-2]
구하는 점의 x좌표는, x에 관한 방정식

$$f(x) = u(\alpha)x \ \cdots\cdots ④$$

의 실수해이다. $f(0)=0$으로부터 $x=0$은 ④의 해이다.

또한 $x \neq 0$일 때 $f(x) = u(\alpha)x$를 변형하면 $\frac{f(x)}{x} = u(\alpha)$이다. 따라서 $u(x)=\frac{f(x)}{x}$ $(x \neq 0)$이므로

$$u(x) = u(\alpha) \ \cdots\cdots ⑤$$

이 성립한다. ①, ③으로부터

$$u'(x)>0 \ (x \neq 0) \ \cdots\cdots ⑥$$

이고, **논제 1-1**로부터 $u(x)$는 실수에서 연속이므로 단조증가함수이다. 따라서 $x<\alpha$일 때 $u(x)<u(\alpha)$이고, $x>\alpha$일 때 $u(x)>u(\alpha)$이므로 ⑤의 실수해는 $x=\alpha$가 유일하게 존재한다.
그러므로 $f(x) = u(\alpha)x$의 모든 해는 $x=0, \ \alpha$이다. 즉, 모든 교점의 x좌표는 $0, \ \alpha$이다.

[문제 2-3]
$u(x)$는 단조증가 함수이므로
$0<x<\alpha<1$일 때 $u(x)=\frac{f(x)}{x}<u(\alpha)$,
$0<\alpha<x<1$일 때 $u(x)=\frac{f(x)}{x}>u(\alpha)$이 된다.

따라서 $\begin{cases} u(\alpha)x-f(x)>0 \ (0<x<\alpha<1) \\ u(\alpha)x-f(x)<0 \ (0<\alpha<x<1) \end{cases}$이 성립한다.

그러므로
$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \int_0^1 |\, u(\alpha)x - f(x) \,|\, dx \\ &= \int_0^\alpha \{u(\alpha)x-f(x)\}\,dx - \int_\alpha^1 \{u(\alpha)x-f(x)\}dx \\ &= 2\int_0^\alpha \{u(\alpha)x-f(x)\}\,dx - \int_0^1 \{u(\alpha)x-f(x)\}dx \\ &= u(\alpha)\,\alpha^2 - 2\int_0^\alpha f(x)\,dx - \frac{1}{2}u(\alpha) + \int_0^1 f(x)\,dx \end{aligned}$$

그리고 $T(\alpha)$를 α에 관하여 미분하면

$$T'(\alpha) = u'(\alpha)\ \alpha^2 + 2u(\alpha)\ \alpha - 2\,f(\alpha) - \frac{1}{2}\ u'(\alpha) \text{.........⑦}$$

이다. **논제 1-2**로부터 $u(\alpha)\alpha = f(\alpha)$ 이므로 ⑦은 아래와 같이 정리 된다.

$$T'(\alpha) = (\alpha^2 - \frac{1}{2})\ u'(\alpha)$$

즉, ⑥로부터 $u'(\alpha)>0$이므로, $T(\alpha)$를 최소로 하는 α의 값은 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

2022학년도 아주대학교 수시모집 논술전형 모의고사 02회

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하여라.

xy평면에 3차곡선 $C : y = x^3 - x$와 점 P가 있다. P를 지나는 C의 접선이 한 개가 되는 P의 영역을 도시하자.

$C: y = x^3 - x$에서 $y' = 3x^2 - 1$, 곡선 C 위의 점 $(t, t^3 - t)$에서의 접선의 방정식은

$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t \cdots$ ①

점P의 좌표를 (a,b)라 하면 ①이 P를 지나는 조건은

$b = (3t^2 - 1)(a - t) + t^3 - t$ $\quad\quad \therefore b = (3t^2 - 1)a - 2t^3 \cdots$ ②

P를 지나는 접선의 개수가 1개 이므로 ②를 만족하는 실수 t는 1개 존재한다.

$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$에서 $f'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a)$

$a = 0$일 때, $f'(t) = 6t^2 \geq 0$이므로 $f(t)$는 단조증가하고

$f(t) = 0$은 1개의 실수해를 가진다.

$a \neq 0$일 때, $f(t)$는 극대값과 극소값을 가지므로

$f(t) = 0$이 1개의 실수해를 가질 조건은

$(\text{극대값}) \times (\text{극소값}) > 0$이다.

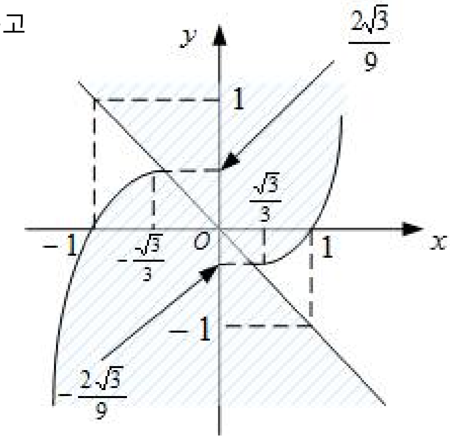
따라서 $f(0)f(a) > 0$

이상에서 점 P의 영역은 $a = 0$ 또는

$(a + b)(-a^3 + a + b) > 0, (a,b) \rightarrow (x,y)$로

바꾸면 오른쪽 그림과 같다.

(단, 경계는 포함하지 않고, 원점은 포함)



[문제 1-1] P를 지나는 C의 접선이 세 개가 되는 P의 영역을 D라 한다. P가 D의 x축 위를 움직일 때, P가 지나는 C의 세 개의 접선의 접점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 자취의 방정식을 구하라.

[문제 1-2] 점 P의 x좌표를 t라 할 때, 점 Q의 x좌표를 t를 써서 나타내어라.

$f(x) = x^3 + ax$ (단, a는 상수)가 주어져 있다. 곡선 $y = f(x)$ 위에 원점이 아닌 점 P에서 접선을 긋는다. 이 접선과 곡선 $y = f(x)$와의 교점 중에서 점 P가 아닌 점을 Q라 한다.

[문제 1-3] 점 P에서의 접선과 점 Q에서의 접선이 직교하도록 점 P를 잡을 수 있는 a의 범위를 구하여라. [문제 1-2]를 참고한다.

[문제 1-4] (1) $2x^3 - 3x^2 - 12x + p = 0$이 서로 다른 2개의 양수해와 1개의 음수해를 가

지도록 p의 값의 범위를 구하여라.

(2) 3차방정식 $x^3-3px+p=0$이 서로 다른 3개의 실수해를 가질 때, p의 값의 범위를 구하여라.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하여라.

양의 정수 n에 대하여, x^{n+1}을 x^2-x-1로 나눈 나머지를 a_nx+b_n이라 하자.

x^{n+1}을 x^2-x-1로 나눈 몫을 $Q_n(x)$로 놓으면,

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n \cdots ①$$

①의 양변에 x를 곱하면,

$$\begin{aligned} x^{n+2}&=x(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx \\ &=x(x^2-x-1)Q_n(x)+a_n(x^2-x-1)+(a_n+b_n)x+a_n \\ &=(x^2-x-1)\{xQ_n(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n \cdots ② \end{aligned}$$

또, ①에서 n대신 $n+1$을 대입하면,

$$x^{n+2}=(x^2-x-1)Q_{n+1}(x)+a_{n+1}x+b_{n+1} \cdots ③$$

②,③에 의하여,

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n\ (n\ge 1)\cdots ④ \\ b_{n+1}=a_n \quad\ \ (n\ge 1)\cdots ⑤ \end{cases} \cdots (\text{답})$$

여기서, n은 양의 정수이다. n차식 x^n을 이차식 $f(x)=x^2-ax+b$로 나눈 나머지를 r_nx+s_n이라고 하자.

[문제 2-1] $n=1,2,3,\cdots$에 대하여, a_n,b_n은 모두 양의 정수임을 보여라.

[문제 2-2] $n=1,2,3,\cdots$에 대하여 a_n과 b_n은 서로 소임을 보여라.

[문제 2-3] 모든 양의 정수 m,n에 대하여 다음 식이 성립함을 보여라.

$$r_{m+n}=r_ms_n+r_ns_m+ar_mr_n,\ s_{m+n}=s_ms_n-br_mr_n$$

[문제 2-4] $(a-x)^n$을 $f(x)$로 나눈 나머지를 t_nx+u_n이라 할 때, 다음 식이 성립함을 보여라.

$$t_n=-r_n,\ u_n=ar_n+s_n$$

【예시답안】

[문제 1-1]

여기서, $f(t)=0$이 서로 다른 3개의 실수해를 가지면 된다. $a\neq 0, f(0)f(a)<0$에서

$a\neq 0, (a+b)(-a^3+a+b)<0$ p는 x축 위를 움직이므로 $b=0$

$\therefore a(-a^3+a)<0$ $\quad\quad\therefore a<-1, a>1\cdots$ ③

$2t^3-3at^3+a=0$의 3개의 접점의 x좌표를 α,β,γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}a,\ \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=0,\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{a}{2}\cdots$ ④

한편 3개의 접점 $(\alpha,\alpha^3-\alpha)$, $(\beta,\beta^3-\beta)$, $(\gamma,\gamma^3-\gamma)$를 꼭지점으로 하는 삼각형의 중심을

(x,y)라 하면 $x=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, $y=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-(\alpha+\beta+\gamma)}{3}$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\}+3\alpha\beta\gamma$

④에서 $x=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}a=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{3}{2}a\right)^3-\dfrac{3}{2}a-\dfrac{3}{2}a\right\}=\dfrac{9}{8}a^3-a$

a를 소거하면 $y=9x^3-2x$, $\left(x<-\dfrac{1}{2}, x>\dfrac{1}{2}\right)$

[문제 1-2] $\quad y=x^3+ax\quad\cdots\cdots$①에서 $y'=3x^2+a$

곡선 ① 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{t},\mathrm{t}^3+\mathrm{at})$에서의 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at)=(3t^2+a)(x-t)\qquad\cdots\cdots②$$

따라서, ①, ②의 교점 Q의 x좌표는

$\begin{cases} y=x^3+ax \\ y=(3t^2+a)x-2t^3 \end{cases}$ 에서 $x^3+ax=(3t^2+a)x-2t^3$

$$\therefore\ x^3-3t^2x+2t^3=0$$

$(x-t)^2(x+2t)=0\qquad x=-2t$ [답]

[문제 1-3] 두 점 P,Q에서의 접선은 y축에 평행이 아니므로, 서로 직교할 조건은

$$f'(t)\cdot f'(-2t)=-1$$

$f'(t)=3t^2+a,\ f'(-2t)=3\cdot 4t^2+a=12t^2+a$에서

$$(3t^2+a)(12t^2+a)=-1$$

$$\therefore\ 36t^4+15at^2+a^2+1=0\qquad\cdots\cdots③$$

이 때, 복이차방정식 ③이 실근 t의 값을 가질 때, 점 P가 존재한다.

$t^2=u$라 놓으면 ③에서 u의 이차방정식

$$36u^2+15au+a^2+1=0\qquad\cdots\cdots④$$

가 $u\geq 0$인 범위에서 근을 가져야 한다.

즉, ④가 실근을 가질 조건에서

판별식$=(15a)^2-4\cdot 36(a^2+1)\geq 0,\ 81a^2-144\geq 0$

$\therefore\ 9(9a^2-16)\geq 0$에서 $a \leq -\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3} \leq a$ ……⑤

④의 두 실근을 α, β라 놓으면

⑤의 조건에서 $\alpha\beta = \dfrac{a^2+1}{36} > 0$이므로, 두 근 α, β의 부호는 서로 같고, 양의 근이 존재하기 위해서 $\alpha > 0, \beta > 0$이다.

$\therefore\ \alpha+\beta = -\dfrac{15a}{36} > 0$에서 $a < 0$ ……⑥

⑤, ⑥의 공통부분은 $a \leq -\dfrac{4}{3}$ [답]

[문제 1-4]

(1) $2x^3-3x^2-12x+p=0$ ……①

①에서 $-2x^3+3x^2+12x=p$

$y=f(x)=-2x^3+3x^2+12x$

로 놓으면

$f'(x)=-6x^2+6x+12$

$=-6(x+1)(x-2)$

따라서, $f(x)$의 증감은 오른쪽 표와 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$x=-1$일 때

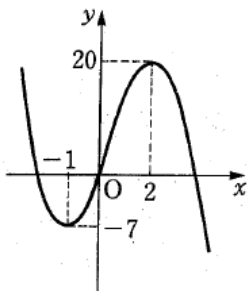
극솟값 $f(-1)=-2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2+12\cdot(-1)$

$=-7$

$x=2$일 때

극댓값 $f(2)=-2\cdot 2^3+3\cdot 2^2+12\cdot 2$

$=20$



따라서, 오른쪽 그림에서와 같이 p의 범위는

$0<p<20$ [답]

(2) $f(x)=x^3-3px+p$

로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3p=3(x^2-p)$

$y=f(x)$가 극값을 가질 조건은, $x^2-p=0$이 2개의 실수해를 가지는 것이므로

$p>0$ ……①

이 때, $f'(x)=3(x+\sqrt{p})(x-\sqrt{p})$

그러므로, $f'(x)$는 $x=\pm\sqrt{p}$일 때 0이 되고, $f(x)$의 증감은 오른쪽 표와 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{p}$	$\cdots$	$\sqrt{p}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값 $f(-\sqrt{p})=(-\sqrt{p})^3-3p(-\sqrt{p})+p=p+2p\sqrt{p}$

극솟값 $f(\sqrt{p})=(\sqrt{p})^3-3p\sqrt{p}+p=p-2p\sqrt{p}$

$f(x)=0$이 서로 다른 3개의 실수해를 가질 조건은

$$f(-\sqrt{p})f(\sqrt{p})<0$$

따라서 $(p+2p\sqrt{p})(p-2p\sqrt{p})=p^2(1-4p)<0$ ……②

①, ②에서 $p>\frac{1}{4}$ [답]

[문제 2-1]

a_n, b_n이 모두 양의 정수임을 보이자

$$x^2=(x^2-x-1)\cdot 1+x+1$$

에서, $a_1=b_1=1$은 모두 양의 정수이다.

1이상의 자연수 n에 대하여 a_n, b_n이 모두 양의 정수이면, ④,⑤에 의하여 a_{n+1}, b_{n+1}도 모두 양의 정수로 된다.

따라서, 모든 n에 대하여 a_n, b_n은 양의 정수이다.

[문제 2-2]

a_n, b_n이 서로소임을 보이자.

2이상인 자연수 n에 대하여, a_n, b_n의 최대공약수를 g라 하고,

$$a_n=kg,\ \ b_n=lg \quad (k,l \text{ : 양의 정수})$$

로 놓으면, ④,⑤에 의하여

$$\begin{cases} a_{n-1}=b_n=lg \\ b_{n-1}=a_n-a_{n-1}=(k-l)g \end{cases}$$

따라서, g는 a_{n-1}, b_{n-1}의 공약수이다.

이하, 같은 조작을 반복하면 g는 a_1, b_1의 공약수가 된다. $a_1=b_1=1$이므로 $g=1$이다.

∴ $n(\geqq 2)$은 임의의 자연수였으므로, 모든 n에 대하여 a_n, b_n 은 서로소 이다.

<참고>

④, ⑤에 의하여 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$로 되어, 피보나치수열이 된다. $a_1=1, a_2=2$인 경우, a_n은 $a_{n-1}(=b_n)$과 서로소이며, 98년 이과(전기) 3번문제와 유사하다.

[문제 2-3] x^n을 $f(x)$로 나눈 몫을 $q_n(x)$라면 $x^n=f(x)q_n(x)+r_nx+s_n$ … ①

$$x^m=f(x)q_m(x)+r_mx+s_m$$

$$\begin{aligned} x^{m+n}&=x^m\cdot x^n \\ &=\{f(x)q_m(x)+r_mx+s_m\}\times\{f(x)q_n(x)+r_nx+s_n\} \\ &=f(x)\,[f(x)q_m(x)q_n(x)+q_m(x)(r_nx+s_n)+q_n(x)(r_mx+s_m)]+(r_mx+s_m)(r_nx+s_n) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} (r_mx+s_m)(r_nx+s_n)&=r_mr_nx^2+(r_ms_n+r_ns_m)x+s_ms_n \\ &=r_mr_n\{f(x)+ax-b\}+(r_ms_n+r_ns_m)x+s_ms_n \end{aligned}$$

$$= r_m r_n f(x) + (r_m s_n + r_n s_m + a r_m r_n)x + s_m s_n - b r_m r_n$$

따라서

$x^{m+n} = f(x)g(x) + (r_m s_n + r_n s_m + a r_m r_n)x + s_m s_n - b r_m r_n$

$\therefore r_{m+n} = r_m s_n + r_n s_m + a r_m r_n$, $s_{m+n} = s_m s_n - b r_m r_n$

[문제 2-4] ①에서 x대신 $a-x$를 대입하면,

$(a-x)^n = f(a-x)q_n(a-x) + r_n(a-x) + s_n$ ⋯ ②

한편 $f(a-x) = (a-x)^2 - a(a-x) + b$

$= x^2 - ax + b = f(x)$ 이므로

$q_n(a-x) = q'(x)$라면

②에서 $(a-x)^n = f(x)q'(x) - r_n x + a r_n + s_n$ $\therefore t_n = -r_n, u_n = a r_n + s_n$

2022학년도 아주대학교 수시모집 논술전형 모의고사 03회

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하여라.

계수가 정수인 다항식을 정수다항식이라 하자. 두 정수 다항식 $f(x)$와 $g(x)$가 주어졌을 때,
$g(x)=f(x)q(x)$인 정수다항식 $q(x)$가 존재하면 $g(x)$는 $f(x)$로 나누어진다고 말한다.
a는 고정된 정수이다. 양의 정수 k가 주어졌을 때, 정수다항식 P_k를 다음과 같이 정의한다.

$$P_k(x)=x^{k-1}+ax^{k-2}+\ \cdots\ +a^{k-2}x+a^{k-1}$$

이 때, 다음 물음에 답하여라.
양의 정수 $m,\ k$가 주어졌을 때 다항식 x^m-a^m은 다항식 $x^{mk}-a^{mk}$ 의 약수임을 보여라.

$$\begin{aligned} x^{mk}-a^{mk} &= (x^m)^k-(a^m)^k \\ &= (x^m-a^m)((x^m)^{k-1}+(x^m)^{k-2}a^m+(x^m)^{k-3}(a^m)^2+\ \cdots\ +(a^{m})^{k-1}) \\ &\Rightarrow \frac{x^m-a^m}{x^{mk}-a^{mk}} \end{aligned}$$

[문제 1-1] 두 정수 $m,\ n\ (m<n)$이 주어졌을 때, 최고차항의 계수가 1이고, $g(0)\neq 0$인 정수다항식 $g(x)$가 $P_m(x)$와 $P_n(x)$를 나누면 $g(x)$는 $P_{n-m}(x)$를 나눔을 보여라.

[문제 1-2] 두 정수다항식이 주어졌을 때 이들을 모두 나누는 1차 이상의 다항식이 없을 때 이들을 서로소라고 한다. $P_6(x)$와 $P_{11}(x)$는 서로소임을 보여라.

[문제 1-3] $x^{20}-16$과 $x^{25}+32$를 모두 나누는 최대차수 정수다항식을 구하여라.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하여라.

수열 $\{x_n\}, \{y_n\}$이 다음과 같이 주어져 있다.

$$x_1 = 2,\ y_1 = 6\,;\, x_{n+1} = x_n + y_n,\ y_{n+1} = 3x_n + y_n\ (n = 1, 2, 3,\ \cdots)$$

$x_{n+1} - x_n = y_n$이므로 $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} y_k$ ⋯ ①

$y_{n+1} - y_n = 3x_n$이므로 $y_n = y_1 + 3\sum_{k=1}^{n-1} x_k$ ⋯ ②

$y_1 = 6$이므로 ②에서 $y_n = 6 + 3\sum_{k=1}^{n-1} x_k = 3(2 + \sum_{k=1}^{n-1} x_k)$

여기서 $2 + \sum_{k=1}^{n-1} x_k = A(n)$이라 하면 $y_n = 3A(n)$ ⋯ ③

따라서 y_n을 3으로 나눈 나머지는 0이다.

$x_1 = 2$이므로 ①, ③에서 $x_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot A(k) = 2 + 3\sum_{k=1}^{n-1} A(k)$

따라서 x_n을 3으로 나눈 나머지는 2이다.

또한, 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$은

$a_1 = 1,\ b_1 = 0\,;\, a_{n+1} = 2a_n - 3b_n,\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n\ (n = 1, 2,\ \cdots)$으로 정의되고, 이것들을 이용하여 함수 $f_n(x) = x^3 + 3a_nx^2 + 9b_n^2x + 1$이라 정의한다.

[문제 2-1] x_n을 n의 식으로 나타내어라.

[문제 2-2] 각 $n(n = 1, 2, 3,\ \cdots)$에 대하여 $(1 + \sqrt{3})^n$을 넘지 않는 최대의 정수를 z_n이라 하자. z_n을 3으로 나누었을 때의 나머지를 구하라.

[문제 2-3] $a_n^2 - 3b_n^2 = 1\ (n = 1, 2, \cdots)$임을 보여라.

[문제 2-4] $f_n(x)$의 극대값과 극소값의 차는 n의 값에 관계없이 일정한 상수임을 보이고 그 상수의 값을 구하라.

【예시답안】

[문제 1-1] $P_n(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$

$= x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{m-1}x^{n-m} + a^m x^{n-m-1} + a^{m+1}x^{n-m-2} + \cdots + a^{n-1}$

$= x^{n-m}(x^{m-1} + ax^{m-2} + \cdots + a^{m-1}) + a^m(x^{n-m-1} + ax^{(n-m-1)-1} + \cdots + a^{n-m-1})$

$= x^{n-m}P_m(x) + a^m P_{n-m}(x)$

$\Rightarrow a^m P_{n-m}(x) = P_n(x) - x^{n-m}P_m(x)$

$g(x) \mid P_n(x),\ g(x) \mid P_m(x)$이므로 $g(x) \mid a^m P_{n-m}(x)$

이 때 $g(x)$와 $P_{n-m}(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x)h(x) = a^m P_{n-m}(x) \qquad \cdots ①$$

라 하면

$$g(x) = -x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \cdots + b_0$$

일 때

$$h(x) = a^m x^{n-m-r} + c_{n-m-r-1}x^{n-m-r-1} + \cdots + c_0$$

꼴이 된다.

이 때

$$g(x)h(x) = a^m x^{n-m} + (a^m b_{r-1} + c_{n-m-r-1})x^{n-m-1} + \cdots$$

에서 ①에 의하여 x^{n-m-1}의 계수 $a^m b_{r-1} + c_{n-m-r-1}$은 a^m의 배수이다.

$$\therefore h(x) = a^m P(x)$$

$$\therefore P_{m-n}(x) = g(x)P(x) \Rightarrow g(x) \mid P_{n-m}(x)$$

[문제 1-2]

$P_{11}(x) = x^{10} + ax^9 + a^2x^8 + \cdots + a^{10}$

$= x^5(x^5 + ax^4 + \cdots + a^5) + a^6x^4 + a^7x^3 + \cdots + a^{10}$

$= x^5 P_6(x) + a^6(x^4 + ax^3 + \cdots + a^4)$

$= x^5 P_6(x) + a^6 P_5(x) \Rightarrow a^6 P_5(x) = P_{11}(x) - x^5 P_6(x)$

$P_6(x) = x^5 + ax^4 + \cdots + a^5 = x(x^4 + ax^3 + \cdots + a^4) + a^5$

$= xP_5(x) + a^5 \quad \Rightarrow \quad a^5 = P_6(x) - xP_5(x)$

$\therefore a^5 \cdot a^6 = a^6 P_6(x) - x(a^6 P_5(x))$

$= a^6 P_6(x) - x(P_{11}(x) - x^5 P_6(x))$

$= (a^6 + x^6)P_6(x) - xP_{11}(x)$

$\therefore P_6(x)$와 $P_{11}(x)$가 서로소가 아니라 하면 1차 이상의 정수다항식 $f(x)$가 $P_6(x)$아 $P_{11}(x)$를 나누므로 $f(x)$는 상수 $a^5 \cdot a^6 = a^{11}$을 나눈다. ⇒모순

[문제 1-3] $x^{20} - 16 = (x^5)^4 - 2^4 = (x^5+2)(x^5-2)(x^{10}+4)$

$= (x^5+2)(x^{15} - 2x^{10} + 4x^5 - 8)$

$x^{25}+32=(x^5)^5+2^5$

$=(x^5+2)((x^5)^4-2(x^5)^3+2^2(x^5)^2-2^3(x^5)+2^4)$

$=(x^5+2)(x^{20}-2x^{15}+4x^{10}-8x^5+16)$

이 때 $x^{20}-2x^{15}+4x^{10}-8x^5+16=x^5(x^{15}-2x^{10}+4x^5-8)+16$

$\Rightarrow\ 16=\underbrace{(x^{20}-2x^{15}+4x^{10}-8x^5)}_{A(x)}-x^5\underbrace{(x^{15}-2x^{10}+4x^5-8)}_{B(x)}$

이 때 $A(x)$, $B(x)$가 서로소가 아니라면 해답 (3) 에서와 마찬가지로 상수 16을 나누는 일차 이상의 정수 다항식이 존재하므로 모순이다.

$\therefore$ $A(x)$, $B(x)$는 서로소 이고, 구하는 최대차수 정수다항식은 x^5+2

[문제 2-1] $y_n=x_{n+1}-x_n\cdots$ ①에서 $y_{n+1}=x_{n+2}-x_{n+1}\cdots$ ② $y_{n+1}=3\cdot x_n+y_n\cdots$ ③

①, ②, ③에서 $x_{n+2}-x_{n+1}=3x_n+(x_{n+1}-x_n)$

즉, $x_{n+2}-2x_{n+1}-2x_n=0\ (n\geq 1)$

$t^2-2t-2=0$에서 $t=1\pm\sqrt{3}$ 또한 $x_1=2, x_2=x_1+y_1=2+6=8$이므로

$$\begin{cases} x_{n+2}-(1+\sqrt{3})x_{n+1}=(1-\sqrt{3})\{x_{n+1}-(1+\sqrt{3})x_n\} \\ x_2-(1+\sqrt{3})x_1=8-(1+\sqrt{3})\cdot 2=-2\sqrt{3}(1-\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+2}-(1-\sqrt{3})x_{n+1}=(1+\sqrt{3})\{x_{n+1}-(1-\sqrt{3})x_n\} \\ x_2-(1-\sqrt{3})x_1=8-(1-\sqrt{3})\cdot 2=2\sqrt{3}(1+\sqrt{3}) \end{cases}$$

따라서 $x_{n+1}-(1+\sqrt{3})x_n=-2\sqrt{3}(1-\sqrt{3})^n\cdots$ ①

$x_{n+1}-(1-\sqrt{3})x_n=2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^n\cdots$ ②

① − ② 에서 $-2\sqrt{3}x_n=-2\sqrt{3}\{(1-\sqrt{3})^n+(1+\sqrt{3})^n\}$

즉 $x_n=(1-\sqrt{3})^n+(1+\sqrt{3})^n$

[문제 2-2]

따라서, $(1+\sqrt{3})^n=x_n-(1-\sqrt{3})^n\ (n\geq 1)$

(1)에서 $x_n=3k+2$ (k는 정수)라 놓는다. 또 $-1<1-\sqrt{3}<0$

i) n이 홀수일 때 $0<-(1-\sqrt{3})^n<1$ $\quad\therefore x_n<x_n-(1-\sqrt{3})^n<x_n+1$

즉 $z_n=x_n=3k+2$ 따라서 z_n을 3으로 나눈 나머지는 2이다.

ii) n이 짝수일 때 $-1<-(1-\sqrt{3})^n<0$ $\therefore x_n-1<x_n-(1-\sqrt{3})^n<x_n$

즉 $z_n=x_n-1=(3k+2)-1=3k+1$ 따라서 z_n을 3으로 나눈 나머지는 1이다.

$\therefore n$이 홀수일 때 2, n이 짝수일 때 1

[문제 2-3]

$a_{n+1}^2-3b_{n+1}^2=(2a_n-3b_n)^2-3(-a_n+2b_n)^2$

$a_{n+1}^2-3b_{n+1}^2=a_n^2-3b_n^2\ (n\geq 1), a_1^2-3b_1^2=1$

$\therefore a_n^2-3b_n^2=a_1^2-3b_1^2=1$

[문제 2-4] $f_n(x)=x^3+3a_nx^2+9b_n^2x+1$에서 $f'(x)=3x^2+6a_nx+9b_n^2$

$f_n{}'(x)=0$에서 $3x^2+6a_nx+9b_n^2=0 \cdots$ ①

①의 판별식 $\frac{D}{4}=a_n^2-3b_n^2$ (1)에서 $\frac{D}{4}=1>0$ 따라서 ①은 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$를 갖는다. $f_n(x)$는 3차항의 계수가 양수이므로 $x=\alpha$에서 극대값 $f_n(\alpha)$, $x=\beta$에서 극소값 $f_n(\beta)$를 갖는다. ①의 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-2a_n \cdots$ ②

$\alpha\beta=3b_n^2 \cdots$ ③

$$|f_n(\alpha)-f_n(\beta)|=|(\alpha^3-\beta^3)+3a_n(\alpha^2-\beta^2)+9b_n^2(\alpha-\beta)|$$
$$=|\alpha-\beta|\,|\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+3a_n(\alpha+\beta)+9b_n^2|$$
$$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\,|(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+3a_n(\alpha+\beta)+9b_n^2|$$

②, ③을 대입하면

$$|f_n(\alpha)-f_n(\beta)|=\sqrt{4a_n^2-12b_n^2}\,|4a_n^2-3b_n^2-6a_n^2+9b_n^2|$$
$$=2\sqrt{a_n^2-3b_n^2}\,|-2\left(a_n^2-3b_n^2\right)|$$

(1)에서 $a_n^2-3b_n^2=1$이므로 $|f_n(\alpha)-f_n(\beta)|=2\cdot1\cdot2\cdot1=4$