2022학년도 인하대학교 수시모집 논술전형 모의고사 01회

[예상문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 평균값정리 : 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(나) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
① $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.
② $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

(다) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ (α는 실수)일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

(라) 정적분과 급수의 합 사이의 관계
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$$

(1-1)

(a) 평균값 정리를 이용하여 $f'(x)>0$이면 증가함수이고, $f'(x)<0$이면 감소함수임을 증명하시오.

(b) (a)을 이용하여 $0<x<1$일 때, $\sin(x^2)$과 $(\sin x)^2$의 대소를 비교하시오.

(1-2)

(a) $x>1$일 때, 다음 부등식이 성립되는 것을 증명하시오.

$$\frac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1) < \frac{1}{x-1}$$

(b) (a)를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}- \quad \cdots \quad +(-1)^{2n-1}\frac{1}{2n}\right)$를 구하여라.

【예시답안】

(1-1)

(a) 먼저 $x_1 < x_2$를 만족하는 구간에 속하는 두 수 x_1과 x_2를 생각하자. 증가함수의 정의에 의해 $f(x_1) < f(x_2)$를 증명하면 된다.

$f'(x) < 0$에서 $f(x)$는 구간 $[x_1, x_2]$에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하면, 다음을 만족하는 x_1과 x_2 사이의 수 c가 존재한다.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

한편 $x_2 - x_1 > 0$이고 가정에 의해 $f'(c) > 0$이다. 따라서 방정식의 오른쪽은 양수가 되고 $f(x_2) - f(x_1) > 0$이 성립한다.

이는 $f(x)$가 증가함수임을 의미한다.

증가함수라는 사실에서 증명한 방법과 비슷하게 $f(x)$는 주어진 구간에서 감소함수라고 할 수 있다.

(b) $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2$이라고 놓으면 (단, $0 < x < 1$)
$f'(x) = 2x\cos(x^2) - 2\sin x\cos x = 2(x\cos(x^2) - \sin x\cos x)$가 된다.
여기서 $0 < x < 1$이므로 $x > \sin x$이고 $0 < x^2 < x < 1$이므로 $\cos(x^2) > \cos x$이다.

그러므로 $x\cos(x^2) > \sin x\cos x$이다. 이로부터 $f'(x) > 0$이다.

한편 $f(0) = 0$이므로 $f(x) > 0$, 따라서 $\sin(x^2) > (\sin x)^2$이 된다.

(1-2)

(a) $f(x) = \ln x$이라 하면 $f(x)$는 $x > 1$인 모든 x에 대하여 미분가능하고, 연속인 함수이다. 따라서 $f(x)$는 폐구간 $[x-1,\ x]$에서 연속이고, 개구간 $(x-1,\ x)$에서 미분가능하므로 함수 $f(x) = \ln x$의 폐구간 $[x-1,\ x]$에 평균값의 정리를 이용하면

$$\frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f'(c) = \frac{1}{c}$$

를 만족하는 c가 $x-1$과 x사이에 존재한다. 즉 $x - 1 < c < x$를 만족한다.

따라서, $\frac{1}{x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x-1}$를 만족한다. (단, $x > 1$) 그리고 $\ln x - \ln(x-1) = \frac{1}{c}$를 만족하므로 $\frac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1) < \frac{1}{x-1}$을 만족한다. 즉, 따라서 $x > 1$에서

$$\frac{1}{x} < \ln\frac{x}{x-1} < \frac{1}{x-1}$$

를 만족한다.

(별해)

$f(x) = \frac{1}{x-1} - \{\ln x - \ln(x-1)\}$라고 하면 $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x(x-1)^2} < 0$

왜냐하면 $x > 1$이기 때문이다. 따라서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x-1} - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right\} = 0$이므로 $x > 1$일 때, $f(x) > 0$, 곧 $\ln x - \ln(x-1) < \frac{1}{x-1}$라 할 수 있다.

$\dfrac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1) < \dfrac{1}{x-1}$

$g(x) = \dfrac{1}{x} - \{\ln x - \ln(x-1)\}$라고 하면 $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x^2(x-1)} > 0$ 왜냐하면 $x > 1$이기 때문이다. 그러므로 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{1}{x} - \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right\} = 0$이므로 $x > 1$일 때, $g(x) < 0$, 곧 $\dfrac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1)$이 된다.

그러므로 $\dfrac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1) < \dfrac{1}{x-1}$이 성립한다.

(b) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \quad \cdots \quad + (-1)^{2n-1}\dfrac{1}{2n}$

$= \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right) - 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$

$= \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right) - \left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$

$= \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$

(a)에 의해서 $\dfrac{1}{x} < \ln\dfrac{x}{x-1} < \dfrac{1}{x-1}$를 만족하므로

$\dfrac{1}{x} < \ln\dfrac{x}{x-1}$ 일 때, $\dfrac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1)$이고, $\ln\dfrac{x}{x-1} < \dfrac{1}{x-1}$ 일 때, $\dfrac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x$ 이다. 따라서, $\ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1)$이다.

여기서, $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$이므로

$$\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln(k+1) - \ln k) < \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} < \sum_{k=n+1}^{2n}(\ln k - \ln(k-1))$$

가 성립한다. 따라서,

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} < \ln 2n - \ln(2n-1)$$

가 성립한다. 즉, $\ln\dfrac{2n+1}{n+1} < \sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k} < \ln\dfrac{2n}{2n-1}$이다.

이 식에 극한을 취하면

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \le \lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n}{2n-1}$$

이다. 그리고, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{2n}{2n-1} = \ln 2$이므로 압착정리에 의해서

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \quad \cdots \quad + (-1)^{2n-1}\frac{1}{2n}\right) = \ln 2$$

가 성립한다.

[예상문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로 접선의 방정식은 다음과 같다. $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(나) 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(다) 평면에서 서로 다른 두 점 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$일 때,

두 점 사이거리 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

(2-1) 곡선 $y=x^2$ 위의 두 점을 $\mathrm{P}(\mathrm{a},\ \mathrm{a}^2),\ \mathrm{Q}(\mathrm{b},\ \mathrm{b}^2)$라 한다. 다음 물음에 답하여라. 단, $a<b,\ a+b\neq 1$이다.

(a) 원점 O와 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$를 지나는 직선과 두 점 P,Q를 지나는 직선의 교점 G의 좌표를 $s=a+b,\ t=ab$를 써서 나타내어라.

(b) 두 점 P,Q가 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$를 만족시키면서 P가 O에 한없이 접근할 때, 교점 G가 가까워지는 점의 좌표를 구하여라.

(2-2) 포물선 $C:y=x^2$와 , 정점 (x_0,y_0)을 지나는 기울기 m의 직선의 교점 A,B가 있다. 곡선 C의 호 AB위에 점 Q가 있다. 단, $y_0-x_0^2>0$이다.

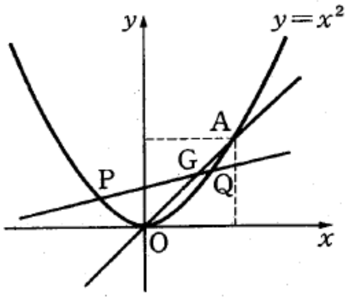
(a) m값을 고정했을 때, $\triangle AQB$의 면적이 최대가 되는 점 Q의 x좌표 $x=x_i$를 구하라.

(b) m이 모두 실수 값일 때, (1)의 최대값을 최소로 하는 m값을 구하라.

【예시답안】

(2-1)

(a) 두 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2),\ \mathrm{Q}(\mathrm{b},\ \mathrm{b}^2)$를 지나는 직선 PQ의 방정식은



$$y = \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)+a^2$$

$$= (a+b)(x-a)+a^2$$

$$= (a+b)x-ab$$

$s=a+b,\ t=ab$이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y = sx-t$$

또, 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1)$를 지나는 직선 OA의 방정식은

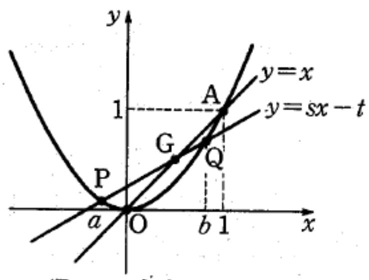
$$y=x$$

$y=sx-t,\ y=x$를 연립시켜 풀면, $x=y=\dfrac{t}{s-1}$

$\therefore$ 두 직선의 교점의 좌표는 $\mathrm{G}\left(\dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{s}-1},\ \dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{s}-1}\right)$ [답]

(b) 두 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2),\ \mathrm{Q}(\mathrm{b},\ \mathrm{b}^2)$에 대하여

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2+(\mathrm{b}^2-\mathrm{a}^2)^2} = \sqrt{(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2+(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2(\mathrm{b}+\mathrm{a})^2}$



(P → O이면 Q → A)

$$\therefore\ (b-a)\sqrt{1+(b+a)^2} = \sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

이 때, $s=a+b,\ t=ab$이고

$$(b-a)^2 = (a+b)^2-4ab$$

$$\therefore\ (b-a)^2 = s^2-4t \qquad \cdots\cdots ②$$

①에서 $(b-a)^2\{1+(b+a)^2\} = 2$

이것을 $s,\ t$를 써서 나타내면

$$(s^2-4t)(1+s^2) = 2$$

$\therefore\ s^2-4t = \dfrac{2}{1+s^2}$ 에서 $4t = s^2-\dfrac{2}{1+s^2},\ t=\dfrac{1}{4}\left(s^2-\dfrac{2}{1+s^2}\right)$

교점 $\mathrm{G}\left(\dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{s}-1},\ \dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{s}-1}\right)$이므로 $\dfrac{t}{s-1}$를 s에 관한 식으로 변형시킨다.

$$\frac{t}{s-1} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{4}\left(s^2-\frac{2}{1+s^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4(s-1)}\cdot\frac{s^4+s^2-2}{1+s^2} = \frac{(s-1)(s+1)(s^2+2)}{4(s-1)(1+s^2)}$$

그런데, 점 P가 원점 O에 한없이 접근하면 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{PQ}}$이므로, 점 Q는 점 A로 한없이 접근한다.

따라서, $\mathrm{P}\rightarrow\mathrm{O}$일 때 $\mathrm{P}(\mathrm{a},\ \mathrm{a}^2),\ \mathrm{Q}(\mathrm{b},\ \mathrm{b}^2)$에서

$a\rightarrow 0,\ b\rightarrow 1$이고 $s=a+b\rightarrow 1$

$$\lim_{s\to 1}\frac{t}{s-1} = \lim_{s\to 1}\frac{(s-1)(s+1)(s^2+2)}{4(s-1)(1+s^2)} = \lim_{s\to 1}\frac{(s+1)(s^2+2)}{4(1+s^2)} = \frac{3}{4}$$

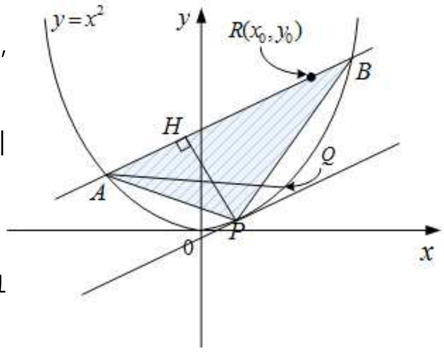
따라서, 두 직선의 교점 G가 가까워지는 점의 좌표는

$G\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$ [답]

(2-2)

(a) $y=x^2$ …… ① $R(x_0, y_0)$라 한다.

직선 AB의 방정식은 $y=m(x-x_0)+y_0$ …… ②



①, ②에서 y를 소거하면,

$x^2-mx+mx_0-y_0=0$ …… ③

$A(\alpha, \alpha^2),\ B(\beta, \beta^2), \alpha<\beta$라 놓으면 α, β는 방정식 ③의 실근.

$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=mx_0-y_0,\ D=m^2-4(mx_0-y_0)>0$

①위의 점 $P(t, t^2)$에서 직선 AB에서 평행한 접선을 그으면

①에서 $y'=2x$이므로, 접선의 기울기는 $2t$

$\therefore 2t=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta=m\quad \therefore P\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{4}\right)$

점Q가 P에 일치할 때, $\triangle ABQ$의 면적은 최대가 된다.

$x_1=\frac{m}{2}$

(b) A, B의 y좌표는 각각 $m(\alpha-x_0)+y_0, m(\beta-x_0)+y_0$이므로,

$AB=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+m^2(\alpha-\beta)^2}=(\beta-\alpha)\sqrt{1+m^2}$

$\triangle PAB$의 높이는 P와 직선 AB : $mx-y-mx_0+y_0=0$와의 거리를 구하여,

$$PH=\frac{\left|\frac{m^2}{2}-\frac{m^2}{4}-mx_0+y_0\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\left|\frac{m^2}{4}-mx_0+y_0\right|}{\sqrt{1+m^2}}$$

$\triangle APQ$의 면적 S는

$$S=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\sqrt{1+m^2}\times\frac{\left|\frac{m^2}{4}-mx_0+y_0\right|}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$=\frac{1}{8}(\beta-\alpha)\left\{m^2-4(mx_0-y_0)\right\}$$

한편, $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4(mx_0-y_0)$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-4(mx_0-y_0)}$

$$\therefore S=\frac{1}{8}\left\{m^2-4(mx_0-y_0)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{(m-2x_0)^2+4(y_0-x_0^2)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

그러므로, $m=2x_0$ 일 때 S는 최소이다.

따라서, $m=2x_0$

[예상문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

(나) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$이고, $r \neq 1$일 때 첫째항부터 제 n항까지의 합은 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$이다. 또한 $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$이다.

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분 가능하고, 두 도함수 $f'(x), g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음 등식이 성립한다. $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

(3-1) 양의 정수 n에 대하여 $I_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$라 한다. 이때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} I_n$을 구하여라.

(3-2) 함수 $f(x) = ([2x]-2[x])|\cos\pi x|\ (x \geqq 0)$가 있다. 단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. 곡선 $y=e^{-x}f(x)$와 두 직선 $y=0, x=k$ (k는 자연수)로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_k라 한다.

(a) $0 \leqq x \leqq 4$에서 $y=f(x)$의 그래프를 그려라.

(b) $a_n = \sum_{k=1}^{2n} S_k\ (n=1,2,3,\ldots\ldots)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하여라.

(3-3) 구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \infty\right)$에서 곡선 $y=|e^{-x}\cos 2x|$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 왼쪽에서부터 차례로 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$라고 하자. 이때, 일반항 S_n을 구하고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하시오.

【예시답안】

(1-1)

$$I_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} e^{-t-k\pi}|\sin(t+k\pi)|\,dt \quad (x-k\pi = t\text{라 치환})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt \qquad \text{......①}$$

여기서 $\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = \left[-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{2}$

이것을 ①에 대입하면

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\pi}\cdot\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)} \quad \text{......답}$$

(1-2)

(a) $f(x+1) = ([2x+2]-2[x+1])|\cos(\pi x+\pi)|$

$= ([2x]+2-2[x]-2)|-\cos(\pi x)|$

$= f(x)$

이므로 $f(x)$는 주기 1인 주기함수이다.

주기 p인 함수 $f(x)$는

$f(x+p) = f(x)$

를 만족한다.

$0 \leqq x < \frac{1}{2}$일 때

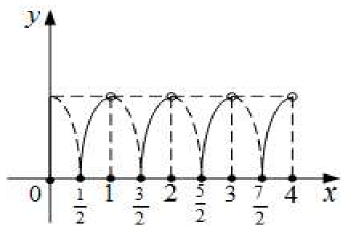
$[2x] = [x] = 0$에서 $f(x) = 0$

$\frac{1}{2} \leqq x < 1$일 때

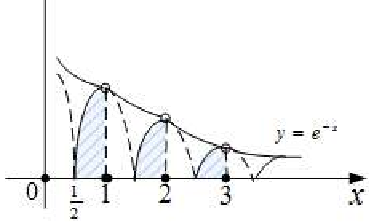
$[2x] = 1,\ [x] = 0$에서

$f(x) = |\cos\pi x| = -\cos\pi x$

따라서, $0 \leqq x \leqq 4$에서 그래프의 개형은 오른쪽 그림의 실선부분이다.



(b) 곡선 $y = e^{-x}f(x)$의 개형은 오른쪽 그림과 같고, S_1, S_2, S_3는 빗금친 부분의 넓이이다.



$$S_k = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k} e^{-x}|\cos\pi x|\,dx$$

$$= \left|\int_{k-\frac{1}{2}}^{k} e^{-x}\cos\pi x\,dx\right|$$

(a)에서

$$S_k = \left| \left[\frac{e^{-x}}{1+\pi^2}(\pi \sin \pi x - \cos \pi x) \right]_{k-\frac{1}{2}}^{k} \right|$$

$\Leftarrow \int e^{-x} \cos \pi x \, dx = \frac{e^{-x}}{\pi^2+1}(\pi \sin \pi x - \cos \pi x) + C$

$$= \frac{e^{-k}}{\pi^2+1} \left| \pi \sin(\pi k) - \cos(\pi k) - \sqrt{e}\,\pi \sin\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{e} \cos\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right) \right|$$

$$= \frac{e^{-k}}{\pi^2+1} \left| -(-1)^k - \sqrt{e}\,\pi (-1)^{k-1} \right| = \frac{e^{-k}}{\pi^2+1}(-1+\sqrt{e}\,\pi) = \frac{\sqrt{e}\,\pi - 1}{1+\pi^2} \cdot e^{-k}$$

$$\therefore a_n = \sum_{k=1}^{2n} S_k = \frac{\sqrt{e}\,\pi - 1}{\pi^2+1} \sum_{k=1}^{2n} e^{-k} = \frac{\sqrt{e}\,\pi-1}{\pi^2+1} \cdot \frac{e^{-1} - e^{-2n-1}}{1-e^{-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{e}\,\pi - 1}{\pi^2+1} \cdot \frac{1-e^{-2n}}{e-1}$$

따라서, $\lim_{n\to\infty} e^{-2n} = 0$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{e}\,\pi - 1}{(\pi^2+1)(e-1)}$ ......답

(3-3) 그래프를 그려서 $f(x) = |e^{-x}\cos 2x|$의 부호를 확인하면 $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$에서 $f(x) \le 0$, $\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$에서 $f(x) \ge 0$, $\frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$에서 $f(x) \le 0$, $\frac{7\pi}{4} \le x \le \frac{9\pi}{4}$에서 $f(x) \ge 0$로 일반화하면

$\frac{(2n-1)\pi}{4} \le x \le \frac{(2n+1)\pi}{4}$에서 $f(x) = (-1)^n e^{-x} \cos 2x$이다.

따라서, $S_n = \int_{\frac{(2n-1)\pi}{4}}^{\frac{(2n+1)\pi}{4}} (-1)^n e^{-x} \cos 2x \, dx = (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{4}}^{\frac{(2n+1)\pi}{4}} e^{-x} \cos 2x \, dx$ 이다.

부분적분을 이용하면

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -e^{-x}\cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x - 4 \int e^{-x} \cos 2x \, dx$$

이고 이를 정리하면

$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{5} e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) + C$이다.

$$S_n = \frac{(-1)^n}{5} \left[e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x) \right]_{\frac{(2n-1)\pi}{4}}^{\frac{(2n+1)\pi}{4}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{5} \left[e^{-\frac{(2n+1)\pi}{4}} \left(2\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} - \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) - e^{-\frac{(2n-1)\pi}{4}} \left(2\sin \frac{(2n-1)\pi}{2} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \right]$$

$\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} = 0$이고 $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = (-1)^n$, $\sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n-1}$이므로

$$S_n = \frac{(-1)^n}{5}\left[2(-1)^n \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi}{4}} - 2(-1)^{n-1} \cdot e^{-\frac{(2n-1)\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{5}\left[2(-1)^n \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi}{4}} + 2(-1)^n \cdot e^{-\frac{(2n-1)\pi}{4}}\right] = \frac{2}{5}e^{-\frac{(2n-1)\pi}{4}}\left(1+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$ 이다.

따라서, 첫째항이 $S_1 = \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\left(1+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$이고 공비가 $e^{-\frac{\pi}{2}}$인 등비수열이다.

$0 < e^{-\frac{\pi}{2}} < 1$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\left(1+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)}{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}$

2022학년도 인하대학교 수시모집 논술전형 모의고사 02회

[예상문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다. 또 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다. 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 열린구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 열린구간에서 감소한다.

(나) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ (α는 실수)일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

(다) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (단, x의 단위는 라디안)

(가) 평면 위에 점 O를 중심으로 하는 반지름 n인 원 $R_n (n = 1,2,3,\cdots)$이 주어져 있다.

(나) R_1에 지름 1인 원 두 개를 서로 겹치지 않게 내접시킨다.

(다) 다음에 지름 1인 원을 서로 겹치지 않게 가능한 많이 R_2에 내접시킨다. 이하 같은 방법으로 그림과 같이 $R_3, R_4, \cdots$로 지름 1인 원을 배열한다.

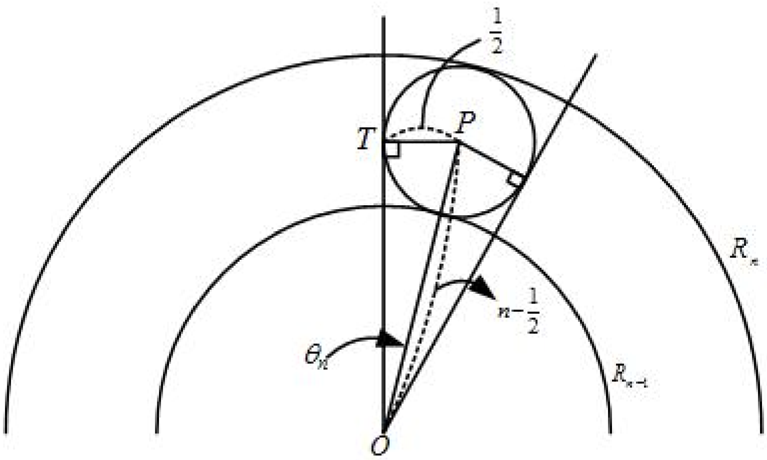
다음 물음에 답하시오.

(1-1) R_n에 내접하고 R_{n-1}에 외접하는 지름 1인 원의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$을 구하여라.

(1-2) $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때, $0 < \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\theta} < 1$임을 증명하여라.

(1-3) R_n의 안에 있는 모든 지름 1인 원의 면적의 총합을 S_n이라 하자. $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때, $0 < \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\theta} < 1$임을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\pi n^2}$을 구하여라.

【예시답안】



(1-1) 그림과 같이 R_n과 R_{n-1}사이 부분에 있는 원의 중심을 P, 접점을 T, $\angle POT=\theta_n$라 하면

$$\sin\theta_n=\frac{\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}} \cdots\cdots ①$$

여기서, ①로부터 $n\to\infty$ 일 때 $\sin\theta_n\to 0$이다.

$0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$라 생각해도 좋으므로 $\theta_n\to 0(n\to\infty)\cdots$ ②

따라서, ①의 양변을 θ_n로 나누면

$$\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}=\frac{1}{2n\theta_n-\theta_n} \quad \text{즉, } n\theta_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}+\theta_n\right)$$

②에서 $n\to\infty$ 일 때 $\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\to 1$이므로 $n\theta_n\to\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ③

R_n과 R_{n-1}사이 부분에 있는 원의 최대 개수가 a_n개 이므로

$$2\theta_n\cdot a_n\le 2\pi<2\theta_n\cdot(a_n+1) \quad \cdots\cdots (*)$$

즉,

$$\frac{\pi}{\theta_n}-1<a_n\le\frac{\pi}{\theta_n} \quad \cdots\cdots ④ \qquad \frac{\pi}{n\theta_n}-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}\le\frac{\pi}{n\theta_n}$$

$n\to\infty$ 일 때, $\frac{1}{n}\to 0$. 이것과 ③에서 $\frac{a_n}{n}\to 2\pi$

따라서

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{2\pi}{2\pi} \cdot 1 = 1 \quad (n \to \infty)$$

(1-2)

여기서, $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때, $\theta > \sin\theta$임을 증명해 보자.

$f(x) = x - \sin x$이므로 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$이다.

$\therefore$ $f(x)$는 증가함수이므로 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$일 때, $0 = f(0) < f(x)$이다. 따라서, $\theta > \sin\theta$가 성립한다. 즉,

$\theta,\ \sin\theta > 0$이므로 $\frac{1}{\sin\theta} > \frac{1}{\theta}$이다.

(2) 함수 $f(\theta) = \theta - \sin\theta - \theta\sin\theta$을 생각하자.

$f(0) = 0,\ f'(\theta) = 1 - \cos\theta - \sin\theta - \theta\sin\theta$이다. $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때, $f'(\theta) < 0$이다.

$\therefore$ $f(\theta)$는 감소함수

$0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $f(\theta) < f(0) = 0$이다. $f(\theta) < f(0) = 0$이다.

$\theta,\ \sin\theta > 0$이므로 양변을 $\theta\sin\theta$로 나누면 $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\theta} - 1 < 0$이 성립한다.

따라서, $0 < \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\theta} < 1$가 성립한다.

(1-3) $S_n = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\because \text{원의 반지름 } \frac{1}{2}\right)$

④에서, n을 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$으로 하여 변끼리 더하면,

$$\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k} - n < \sum_{k=1}^{n} a_k \le \pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k}$$

$$\frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k} - \frac{\pi}{4} \cdot n < \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k \le \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k}$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k} - \frac{\pi}{4} \cdot n < S_n \le \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k} - \frac{1}{4n} < \frac{S_n}{\pi n^2} \le \frac{\pi}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\theta_k} \cdots\cdots ⑤$$

여기서, $0 < \theta_n \le \frac{\pi}{2}$라고 생각되므로

$0 < \frac{1}{\sin\theta_n} - \frac{1}{\theta_n} < 1$즉, $\frac{1}{\sin\theta_n} - 1 < \frac{1}{\theta_n} < \frac{1}{\sin\theta_n}$

①을 대입하면 $2n - 2 < \frac{1}{\theta_n} < 2n - 1$

따라서

$$\frac{\pi}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-2)-\frac{1}{4n}<\frac{S_n}{\pi n^2}<\frac{\pi}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\ (\because ⑤)$$

$$\frac{\pi}{4n^2}\cdot n(n-1)-\frac{1}{4n}<\frac{S_n}{\pi n^2}<\frac{\pi}{4n^2}\cdot n^2$$

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{4n}<\frac{S_n}{\pi n^2}<\frac{\pi}{4}$$

$n\to\infty$ 일 때, $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{4n}\to\frac{\pi}{4}$ 로부터

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\pi n^2}=\frac{\pi}{4}$$

[예상문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다. 또 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다. 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 열린구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 열린구간에서 감소한다.

(나) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a) = 0$일 때, $x = a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대이고 극댓값 $f(a)$를 갖는다.
음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이고 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

(2-1)

(a) 함수 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$의 증감 상태 및 극값을 구하시오. (단, 로그는 자연로그)

(b) (a)의 결과를 써서 $e < \alpha < \beta$ (e는 자연로그의 밑)일 때 부등식 $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta} < \dfrac{\beta}{\alpha}$가 성립하는 것을 증명하시오.

(1-2)

수열 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$, $\cdots$, $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$, $\cdots$에서 최소가 되는 항을 구하시오.

【예시답안】

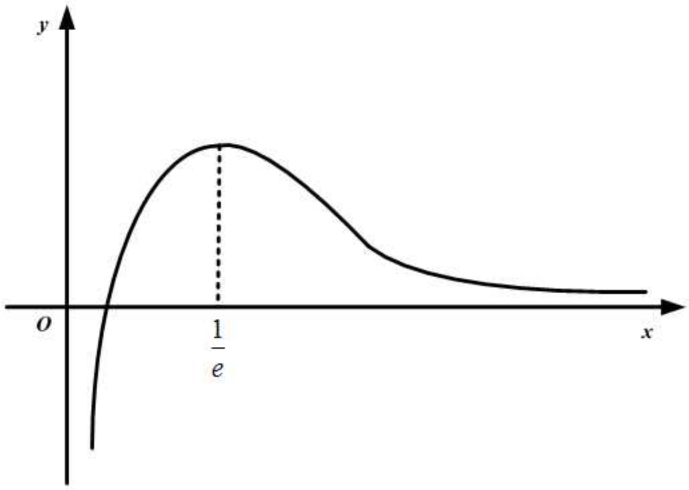
(2-1)

(a) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$이므로 $f(x)$의 증감은 오른편과 같으며

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

$0<x<e$에서 단조증가, $e<x$에서 단조감소, 극값은 $f(x)=\dfrac{1}{e}$로 극대값이다.

그리고, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$이므로 점근선은 y축과 x축이다.



(b) $e<\alpha<\beta$ 일 때 (1)의 결과에 의하여, $f(x)$는 감소함수이다.

$f(\alpha)>f(\beta)$이므로 $\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}>\dfrac{\ln\beta}{\beta}$이다. 즉, $\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}$가 성립한다.

그리고, $\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$일 때, $f(x)$는 증가함수이다. $\dfrac{\ln\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}}>\dfrac{\ln\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta}}$이다. 즉, $\dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}<\dfrac{\beta}{\alpha}$가 성립한다.

(2-2)

일반항 $f(x)=x^{-\frac{1}{x}}$이다. 식 $y=x^{-\frac{1}{x}}$에 양변에 $\ln$를 취하면 $\ln y=-\dfrac{1}{x}\ln x$가 성립하고, 이 식을 미분하며

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=-\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)\\&=\frac{1}{x^2}(\ln x-1)\end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서

$$y' = \frac{x^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(\ln x - 1)$$

$$= x^{-\frac{1}{x}-2}(\ln x - 1) \quad (\text{단, } x > 0)$$

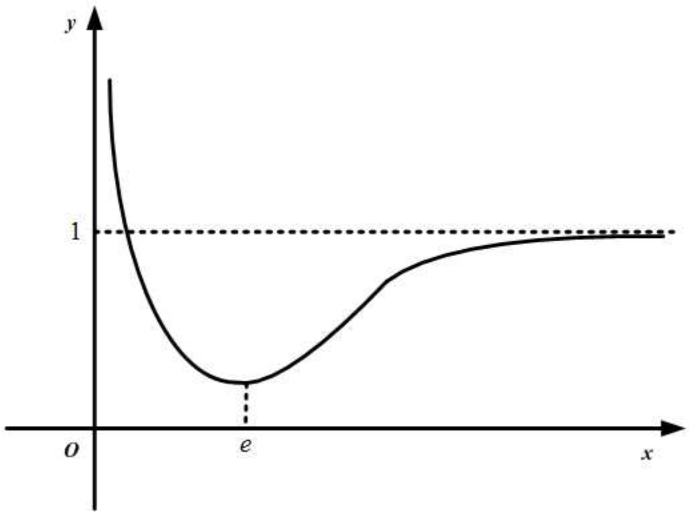
이다. 아래의 증감표를 보면

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	1

$y' = 0$이면 $x = e$에서 극소이자 최소. 따라서 최소가 되는 항은 $f(e) = \sqrt[e]{\frac{1}{e}}$이다. 따라서, $e < x$에서 $f(x)$는 증가이므로 $f(e) < f(3) < f(4) < f(5) < \cdots$이고, $f(2) = 2^{-\frac{1}{2}} = f(4) = 4^{-\frac{1}{4}}$이다. 따라서, $f(e) < f(3) < f(4) = f(2) < f(5) < \cdots$이므로 최소가 되는 항은 $f(3) = 3^{-\frac{1}{3}}$이다.

주의) $\ln y = -\frac{1}{x}\ln x$을 이용하여 점근선을 구해보자.

$\lim_{x \to +0} -\frac{1}{x}\ln x = \infty$이므로 $y \to \infty$로 발산하고, $\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x}\ln x = \lim_{t \to \infty} -\frac{t}{e^t} = 0$(여기서, $t = \ln x$로 치환)이므로 $y \to 1$로 수렴한다.



[예상문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값 $f(a)$를 갖는다.
음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

(나) 함수 $f(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분 가능하고, 두 도함수 $f'(x), g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음 등식이 성립한다. $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(3-1)

(a) n이 자연수일 때, $f(x)=\frac{x^{n+1}}{e^x}$ $(x>0)$의 최대값을 구하시오.

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$의 값을 구하시오.

(c) 함수 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$이 $x=0$에서 미분가능함을 보이시오.

(3-2) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 폐구간 $[0, a]$에서 연속함수이고 $g(a)=0$이고 $g'(x)=-1$ 일 때, $\int_0^a g(x)f(x)\,dx=0$을 만족한다. $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ $(0\le x\le a)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) 아래 방정식이 성립함을 증명하여라.

$$\int_0^a F(x)\,dx = 0$$

(b) (a)을 이용하여 아래 등식을 만족하는 s가 존재함을 증명하여라.

$$\int_0^s f(x)\,dx = 0 \quad (0<s<a)$$

【예시답안】

(3-1)

(a) $f(x)=\dfrac{x^{n+1}}{e^x}$ $(x>0)$를 미분하면

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n e^x - x^{n+1}e^x}{(e^x)^2}$$
$$= \frac{x^n e^x((n+1)-x)}{(e^x)^2}$$

아래의 증감표를 보면

x	0		$n+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$	$\searrow$	

$x=n+1$에서 극대이자 최대값을 가진다.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$를 구하기 위해서는 (a)를 이용하면 $f(x)$의 최대값을 M이라 하면,

$$f(x)=\frac{x^{n+1}}{e^x} \le M$$

가 성립하고, 부등식 $0<\dfrac{x^n}{e^x} \le \dfrac{M}{x}$이 성립한다. (단, $x>0$)

양변에 극한을 취하면

$$\lim_{x\to\infty}0 \le \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} \le \lim_{x\to\infty}\frac{M}{x}$$

가 성립한다. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{M}{x}=0$이므로 압착정리에 의해 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$이 성립한다.

(c) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}$의 값을 구하기위해서 부등식 $0<\dfrac{t}{e^t}\le\dfrac{t^n}{e^t}$이 성립하여

양변에 극한을 취하면

$$\lim_{t\to\infty}0 \le \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} \le \lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^t}$$

(b)의 결과 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^n}{e^t}=0$를 이용하면 압착정리에 의해서 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$를 가진다.

따라서, $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$에서 $x=0$에서 미분가능함을 보이기 위해 $f'(0)$가 존재해야 하므로 좌미분계수와 우 미분계수가 같아야 한다.

$$좌미분계수 = \lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad (\because\ f(0)=0)$$
$$= \lim_{h\to -0}\frac{f(h)}{h} \quad (\because\ f(h)=0,\ h\le 0)$$
$$= 0$$

그리고,

$$우미분계수 = \lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad (\because\ f(0)=0)$$
$$= \lim_{h\to +0}\frac{f(h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} \quad (\because\ f(h)=e^{-\frac{1}{h}},\ h>0)$$

여기서, $t=\dfrac{1}{h}$라 놓으면 $\lim\limits_{h\to +0}$은 $\lim\limits_{t\to +\infty}$이다. 따라서,

$$우미분계수 = \lim_{h\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}$$
$$= \lim_{t\to +\infty}\frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}}$$
$$= \lim_{t\to +\infty}\frac{t}{e^{t}}$$
$$= 0$$

(3-2)

(a) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \quad (0\le x\le a)$이라 할 때, $F'(x)=f(x),\ F(0)=0$이 성립한다. 조건 $\int_0^a g(x)f(x)\,dx=0$이 성립한다.

$$\int_0^a g(x)f(x)\,dx = \int_0^a g(x)F'(x)\,dx$$
$$= [g(x)F(x)]_0^a - \int_0^a g'(x)F(x)\,dx \quad (\because g'(x)=-1)$$
$$= g(a)F(a)-g(0)F(0)+\int_0^a F(x)\,dx = \int_0^a F(x)\,dx \quad (\because\ \int_0^a g(x)f(x)\,dx=0)$$

따라서 $\int_0^a F(x)\,dx=0$이 성립한다.

(b) (a)에서 구한 $\int_0^a F(x)\,dx=0$을 이용하면 $0<x<a$에서 항상 $F(x)>0$ 이거나 항상 $F(x)<0$이면 $\int_0^a F(x)\,dx>0$ 또는 $\int_0^a F(x)\,dx<0$가 되어 $\int_0^a F(x)\,dx=0$에 모순이다. 따라서, $F(s)=0\ (0<s<a)$이 되는 s가 존재해야 한다.

2022학년도 인하대학교 수시모집 논술전형 모의고사 03회

[예상문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로 접선의 방정식은 다음과 같다. $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(나) 3차함수 $f(x)$가
서로 다른 3실근 (극댓값)(극소값) < 0
서로 다른 2실근(중근포함) (극댓값)(극소값) $= 0$
한 개의 실근 (극댓값)(극소값) > 0

(다) 평면에서 서로 다른 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$일 때,
무게중심 $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

(1-1) xy평면에서 3차 함수 $y=x^3-x$의 그래프를 C라고 하고, 부등식

$$x^3-x > y > -x$$

이 나타내는 영역을 D라고 한다. 또한, P를 D의 점이라고 한다.

여기서, P를 지나고 C에 접하는 직선이 3개 존재하는 것을 보이시오.

(1-2) xy평면에 3차 곡선 $C: y=x^3-x$와 점 P가 있다.

(a) P를 지나는 C의 접선이 한 개가 되는 P의 영역을 도시하라.

(b) P를 지나는 C의 접선이 세 개가 되는 P의 영역을 D라 한다. P가 D의 x축 위를 움직일 때, P가 지나는 C의 세 개의 접선의 접점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 자취의 방정식을 구하라.

【예시답안】

(1-1) $\mathrm{P}(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$라고 두면

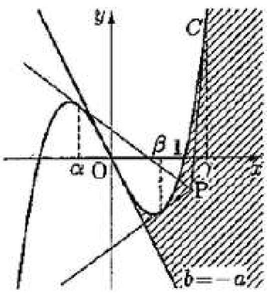
$$a^3 - a > b > -a$$

C의 $(t,\ t^3 - t)$에서의 접선의 방정식은

$$y = (3t^2-1)(x-t) + t^3 - t$$
$$= (3t^2-1)x - 2t^3 \quad \cdots\cdots ②$$

②가 P를 지나는 조건은

$$b = (3t^2-1)a - 2t^3$$
$$\therefore\ 2t^3 - 3at^2 + a + b = 0 \quad \cdots\cdots ③$$



②의 y절편은 t의 감소함수이기 때문에,

P로부터 C에 그은 접선의 개수는 ③의 서로 다른 실수해의 개수와 같다.

③의 좌변을 $f(t)$라고 둔다.

$$f'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t-a)$$

이고, ①로부터

$$f(0) \cdot f(a) = (a+b)(-a^3+a+b) < 0$$

따라서 ③은 $t < 0,\ 0 < t < a,\ t > a$의 범위에 1개씩 해를 가진다. 그러므로 P를 지나고 C에 접하는 직선은 3개 존재한다.

(1-2)

(a) $C: y = x^3 - x$에서 $y' = 3x^2 - 1$, 곡선 C 위의 점 $(t, t^3 - t)$에서의 접선의 방정식은

$y = (3t^2-1)(x-t) + t^3 - t \cdots ①$

점P의 좌표를 (a,b)라 하면 ①이 P를 지나는 조건은

$b = (3t^2-1)(a-t) + t^3 - t \qquad \therefore b = (3t^2-1)a - 2t^3 \cdots ②$

P를 지나는 접선의 개수가 1개 이므로 ②를 만족하는 실수 t는 1개 존재한다.

$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$에서 $f'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t-a)$

$a = 0$일 때, $f'(t) = 6t^2 \geq 0$이므로 $f(t)$는 단조증가하고

$f(t) = 0$은 1개의 실수해를 가진다.

$a \neq 0$일 때, $f(t)$는 극대값과 극소값을 가지므로

$f(t) = 0$이 1개의 실수해를 가질 조건은

$(\text{극대값}) \times (\text{극소값}) > 0$이다.

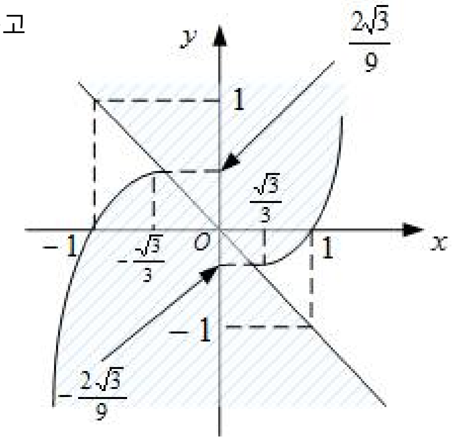
따라서 $f(0)f(a) > 0$

이상에서 점 P의 영역은 $a = 0$ 또는

$(a+b)(-a^3+a+b) > 0,\ (a,b) \to (x,y)$로

바꾸면 오른쪽 그림과 같다.

(단, 경계는 포함하지 않고, 원점은 포함)



(b) (a)과 같이 생각하면 $f(t) = 0$이 서로 다른 3개의 실수해를 가지면 된다.

$a \neq 0, f(0)f(a) < 0$에서 $a \neq 0,\ (a+b)(-a^3+a+b) < 0$ p는 x축 위를 움직이므로 $b = 0$

$\therefore a(-a^3+a) < 0 \qquad \therefore a < -1, a > 1 \cdots ③$

$2t^3 - 3at^3 + a = 0$의 3개의 접점의 x좌표를 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}a,\ \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=0,\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{a}{2}\cdots$ ④

한편 3개의 접점 $(\alpha, \alpha^3-\alpha)$, $(\beta, \beta^3-\beta)$, $(\gamma, \gamma^3-\gamma)$를 꼭지점으로 하는 삼각형의 중심을 (x,y)라 하면 $x=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, $y=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-(\alpha+\beta+\gamma)}{3}$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\}+3\alpha\beta\gamma$

④에서 $x=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}a=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{3}{2}a\right)^3-\dfrac{3}{2}a-\dfrac{3}{2}a\right\}=\dfrac{9}{8}a^3-a$

a를 소거하면 $y=9x^3-2x$, $\left(x<-\dfrac{1}{2}, x>\dfrac{1}{2}\right)$

[예상문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(나) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ (α는 실수)일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

(다) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (단, x의 단위는 라디안)

a는 $0<a<\frac{\pi}{2}$를 만족하는 양수이고, 방정식

$$x(1-\cos x)=\sin(x+a)$$

을 생각해보자.

(2-1) n은 자연수라고 할 때, 위의 방정식은 $2n\pi < x < 2n\pi+\frac{\pi}{2}$의 범위에서 단 1개의 해를 가짐을 보여라.

(2-2) (2-1)의 해를 x_n라고 둔다. 극한 $\lim_{n\to\infty}(x_n-2n\pi)$을 구하여라.

(2-3) 극한 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(x_n-2n\pi)$을 구하여라.

【예시답안】

(2-1) 방정식

$$x(1-\cos x)=\sin(x+a)\ \left(2n\pi<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\qquad\cdots\cdots①$$

을, $x=t+2n\pi$라고 두고 다시 쓰면,

$$(t+2n\pi)(1-\cos(t+2n\pi))=\sin(t+2n\pi+a),$$

즉,

$$(t+2n\pi)(1-\cos t)=\sin(t+a)\ \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)\qquad\cdots\cdots②$$

이 된다. [①이 단 1개의 해를 가진다]는 것과 [②가 단 1개의 해를 가진다]는 것은 같은 의미이다. 여기서,

$$f(t)=(t+2n\pi)(1-\cos t)-\sin(t+a)$$

(정의역은 실수전체)라고 두면,

$$f'(t)=(1-\cos t)+(t+2n\pi)\sin t-\cos(t+a),$$
$$f''(t)=2\sin t+(t+2n\pi)\cos t+\sin(t+a)$$

이 된다. $n>0,\ 0<a<\frac{\pi}{2}$이므로,

$$f''(t)>0\ \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

이기 때문에, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$에 있어서 $f'(t)$은 증가한다.

그래서,

$$f'(0)=-\cos a<0,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{\pi}{2}+2n\pi+\sin a>0$$

이므로, $f'(\alpha)=0$을 만족하는 $\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$가 오직 1개 존재하고,

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

$$f(0)=-\sin a<0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+2n\pi-\cos a>\frac{\pi}{2}+2n\pi-1>0$$

이 된다. $f(t)=0$을 만족하는 $t\ \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$가 오직 한 개 존재하고, 방정식 ②는 단 1개의 해를 가진다. 따라서, ①은 단 1개의 해를 가진다.

(2-2) ②의 해를t_n라고 두면, $t_n=x_n-2n\pi$이고,

$$(t_n+2n\pi)(1-\cos t_n)=\sin(t_n+a)\qquad\cdots\cdots③$$

가 성립한다. ③을

$$1-\cos t_n=\frac{\sin(t_n+a)}{t_n+2n\pi},\qquad\cdots\cdots④$$

$$\cos t_n = 1 - \frac{\sin(t_n + a)}{t_n + 2n\pi}$$

라고 다시 정리하면,

$$\left| \frac{\sin(t_n + a)}{t_n + 2n\pi} \right| < \frac{1}{2n\pi} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

이므로,

$$\lim_{n\to\infty} \cos t_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\sin(t_n + a)}{t_n + 2n\pi} \right) = 1$$

이 된다. $0 < t_n < \frac{\pi}{2}$ 로부터

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0, \text{ 즉, } \lim_{n\to\infty} (x_n - 2n\pi) = 0$$

(2-3) ④의 양변에 $1 + \cos t_n$을 곱하면

$$(\sin t_n)^2 = \frac{\sin(t_n + a)(1 + \cos t_n)}{t_n + 2n\pi}$$

이 되므로,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sin t_n)^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{n \sin(t_n + a)(1 + \cos t_n)}{t_n + 2n\pi} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(t_n + a)(1 + \cos t_n)}{\frac{t_n}{n} + 2\pi} \\
&= \frac{2\sin a}{2\pi} = \frac{\sin a}{\pi}
\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, t_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sin t_n} \sqrt{n(\sin t_n)^2} \\
&= 1 \cdot \sqrt{\frac{\sin a}{\pi}} = \sqrt{\frac{\sin a}{\pi}}
\end{aligned}$$

즉, $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(x_n - 2n\pi) = \sqrt{\frac{\sin a}{\pi}}$.

[예상문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다. 또 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(다) 함수 $f(x)$가 위로 볼록일 때, 폐구간 $[a,\ b]$의 임의의 두 점을 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$에 대하여 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$이면 된다.

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$와 두 직선 $x = a, x = b$로 둘러사인 도형의 넓이 S는 다음과 같다. $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

(3-1) $f(x) = x^n + nx - n$ (n은 자연수)에 대하여 방정식 $f(x) = 0$은 $x > 0$에서 오직 하나의 실근 α_n을 가지고 $0 < \alpha_n < 1$임을 보여라.

(3-2)와 (3-3)에 답하여라. $f(x)$는 폐구간 $[a,\ b]$에서 정의된 연속함수이고 $f''(x) < 0$ $(a < x < b)$이라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$ $(a < k < b)$에서의 접선의 방정식 $y = g(x)$라 할 때, 다음 논제에 답하여라.

(3-2)

(a) $f'(x) < 0$은 폐구간 $[a,\ b]$에서는 $f(x)$가 감소하는 것을 증명하시오.

(b) 함수 $f(x)$가 위로 볼록함을 증명하여라.

(3-3)

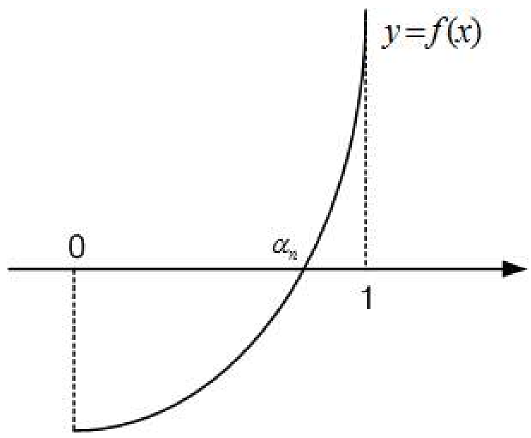
(a) 폐구간 $[a,\ b]$에서 $g(x) \geq f(x)$임을 증명하여라.

(b) 곡선 $y = f(x)$과 접선의 방정식 $y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a,\ x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 최소가 되게 하는 k의 값을 구하여라.

【예시답안】

(3-1) $f(x) = x^n + nx - n$에서 $f'(x) = nx^{n-1} + n$이 된다. $x > 0$에서 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다. $f(0) = -n,\ f(1) = 1$이므로, 중간값 정리에 의해 방정식 $f(x) = 0$은 $x > 0$에서

오직 하나의 실근 α_n을 가지고 $0 < \alpha_n < 1$이다.



(3-2) (a) $f'(x) < 0$일 때, 폐구간 $[a,\ b]$에서는 $f(x)$가 감소함수라는 것을 평균값의 정리를 이용해 증명해 보자. 폐구간 $[a,\ b]$의 임의의 두 점을 $x_1, x_2\quad (x_1 < x_2)$라 하면 폐구간 $[x_1, x_2]$에서 평균값의 정리가 적용되므로, 어떤 $t\ (x_1 < t < x_2)$에 대하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(t)$$

이 성립한다. 따라서 폐구간 $[x_1, x_2]$에서 $f'(t) < 0$이므로 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$이다. 주어진 조건에 의해서 $x_2 - x_1 > 0$이므로 $f(x_2) - f(x_1) < 0$이다. 즉, 폐구간 $[a,\ b]$의 임의의 두 점 $x_1,\ x_2\ (x_1 < x_2)$에 대하여 $f(x_2) < f(x_1)$의 관계가 성립하므로 $f(x)$는 감소함수이다. 특히, 실수 구간에서 감소함수나 증가함수는 실근이 존재한다면, 그 근은 유일하게 존재한다.

(b) 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가 두 번 미분가능하고, 폐구간 $[a,\ b]$에 대하여$f''(x) < 0$이라고 할 때, 다음을 증명하면 된다.

"폐구간 $[a,\ b]$의 임의의 두 점을 $x_1, x_2\quad (x_1 < x_2)$에 대하여 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 이면 된다."

평균값 정리에 의하여 $t_1 \in (x_1,\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2))$인 t_1이 존재하여

$$\frac{f(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)) - f(x_1)}{\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - x_1} = f'(t_1)$$

또한, $t_2 \in (\frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ x_2)$인 t_2가 존재하여

$$\frac{f(x_2) - f(\frac{1}{2}(x_1 + x_2))}{x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)} = f'(t_2)$$

여기서 $f''(x) < 0$이므로 $f'(x)$는 감소함수이다. 따라서 $f'(t_2) < f'(t_1)$이 성립하므로

$\dfrac{f(\frac{1}{2}(x_1+x_2))-f(x_1)}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_1} > \dfrac{f(x_2)-f(\frac{1}{2}(x_1+x_2))}{x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}$에서 식을 간단히 하면 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2}) > \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이 성립함을 알 수 있다.

(3-3) (a) $h(x) = g(x)-f(x)$라 놓으면
우선, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$ $(a<k<b)$에서의 접선의 방정식 $y=g(x)$을 구하면

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(k)(x-k)+f(k) \\ &= xf'(k)-kf'(k)+f(k) \end{aligned}$$

이 된다. 식 $h(x) = g(x)-f(x)$에 $g(x)$를 대입하면

$$h(x)=xf'(k)-kf'(k)+f(k)-f(x)$$

이 된다. 그리고 식 $h(x)$를 미분하면

$$h'(x)=f'(k)-f'(x)$$

이고, 식 $h'(x)$를 미분하면

$$f''(x) = -f''(x)>0$$

이 되어 $h'(x)$는 증가함수이다. 여기서, $h'(k)=0$에서 $x<k$일 때, $h'(x)<0$, $x>k$일 때, $h'(x)>0$이 되어 $h(x)$는 $x=k$에서 극소이며 최소값을 가진다. 따라서, $h(x) \ge h(k)=0$이므로 $h(x) = g(x)-f(x) \ge 0$이 된다. 즉, $g(x) \ge f(x)$가 성립된다. (단, 등호조건은 $x=k$일 때 성립)

(b) 도형의 넓이를 $S(k)$라 하면,

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_a^b |g(x)-f(x)|dx \\ &= \int_a^b g(x)-f(x)dx \ \ (\because\ g(x)>f(x)) \\ &= \int_a^b (xf'(k)-kf'(k)+f(k)-f(x))dx \ \ (\because\ g(x)=xf'(k)-kf'(k)+f(k)) \\ &= \left[\frac{x^2}{2}f'(k)-kf'(k)x+f(k)x\right]_a^b - \int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}f'(k)+(f(k)-kf'(k))(b-a) - \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

이다.
구한 도형의 넓이 $S(k)$를 미분하면

$$\begin{aligned} S'(k) &= \frac{b^2-a^2}{2}f''(k)+(f'(k)-f'(k)-kf''(k))(b-a) \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}f''(k)-kf''(k)(b-a) \\ &= f''(k)(b-a)\left(\frac{(a+b)}{2}-k\right) \end{aligned}$$

으로 표현된다.

여기서, $f''(k)<0,\ b-a>0$에서 $S(k)$는 아래의 증감표로부터

k	a	$\cdots$	$\frac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

$k=\dfrac{a+b}{2}$에서 극소이며 최소가 된다.

