

2022학년도 고려대학교 세종캠퍼스 수시모집 논술전형 모의고사 01회

[문제 1] 쌍곡선

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y' = f'(g(x))g'(x) \text{이다.}$$

(나) (1) 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 차이가 $2a$ ($c > a > 0$)인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $b^2 = c^2 - a^2$)이다. 이때, 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a$ 이다.

(2) 두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 로부터의 거리의 차이가 $2b$ ($c > b > 0$)인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (단, $a^2 = c^2 - b^2$)이다. 이때, 쌍곡선의 주축의 길이는 $2b$ 이다.

실수 a, b, c ($a \neq 0$)에 대하여 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 이고 $H: y^2 = e^{-f(x)} \frac{d^2}{dx^2} e^{f(x)}$ 은 쌍곡선이다.

문제 1. 쌍곡선 H 를 $Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$ 으로 표현할 때, $\frac{A}{B} = -4a^2$ 임을 증명하시오.

문제 2. 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b) 가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.

(1) 쌍곡선 H 는 직선 $x=1$ 과 많아야 한 점에서 만난다.

(2) 쌍곡선 H 는 직선 $y = x + \frac{b}{2a}$ 와 만나지 않는다.

(3) 쌍곡선 H 의 주축의 길이는 4 이하이다.

문제 3. 쌍곡선 H 의 두 초점이 x 축 위에 있을 때, 두 초점을 각각 $F(\alpha, 0)$, $F'(\beta, 0)$ ($\alpha > \beta$)라 하자.

(1) 쌍곡선 H 위의 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 S 라 하자. 점 Q 의 x 좌표가 α 보다 클 때 $\overline{FQ} - \overline{FS} \sqrt{1+4a^2} = |2a|^p$ 이다. p 의 값을 구하시오.

(2) $(\alpha - \beta)^2$ 의 값이 최소가 될 때, a 의 값을 구하시오.

[문제 2] 사잇값 정리, 이차함수, 근과 계수, 판별식

(가) 함수 $g(x)$ 가 구간 I 에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 < x_2$ 일 때 $g(x_1) < g(x_2)$ 이면, 함수 $g(x)$ 는 구간 I 에서 증가한다고 한다.

또 $x_1 < x_2$ 일 때 $g(x_1) > g(x_2)$ 이면, 함수 $g(x)$ 는 구간 I 에서 감소하다고 한다.

(나) 함수 $g(x)$ 가 구간 I 에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

(1) $g'(x) > 0$ 이면 $g(x)$ 는 구간 I 에서 증가한다.

(2) $g'(x) < 0$ 이면 $g(x)$ 는 구간 I 에서 감소한다.

단, 역은 성립하지 않는다.

(다) 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $g(a) \neq g(b)$ 이면, $g(a)$ 와 $g(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $g(c) = k$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

0이 아닌 실수 a 에 대하여 $f(x) = \frac{1}{2a}x^2 + (a-1)x + a-1$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

논제 1. 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0일 때, a 의 값을 구하시오.

논제 2. 함수 $F(x)$ 가 실수 전체에서 증가하도록 하는 a 의 값의 범위는 $\alpha \leq a \leq \beta$ 이다. $\beta - \alpha$ 의 최댓값을 구하시오.

논제 3. 다음 조건을 만족시키는 실수 a 가 열린구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재함을 증명하시오.

(1) 함수 $F(x)$ 는 어떤 구간 (b, c) 에서 감소하고 구간 $(-\infty, b)$ 와 (c, ∞) 에서 증가한다.

(2) $c - b = 9.7$

[문제 3] 순열, 조합, 조건부 확률, 이항분포

(가) (1) 서로 다른 n 개에서 $r(0 < r \leq n)$ 개를 택하는 순열의 수는 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ 이다.

(2) 서로 다른 n 개에서 $r(0 \leq r \leq n)$ 개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 이다. (단, ${}_nC_0 = 1$ 이다.)

(나) 연속확률변수 X 가 $a \leq X \leq b$ 에 속하는 모든 실수의 값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 가 다음의 조건을 만족하면 $f(x)$ 를 X 의 확률밀도함수라고 한다.

(1) $f(x) \geq 0$ (단, $a \leq x \leq b$)

(2) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다.

(3) $P(\alpha \leq X \leq \beta)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$ 로 둘러싸인 부분의 넓이다.

(다) 확률이 0이 아닌 사건 A 에 대하여 사건 A 가 일어났다고 가정할 때, 사건 B 가 일어날 확률을 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이라 하고, 기호 $P(B|A)$ 로 나타내며 다음이 성립한다.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0)$$

(라) 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따를 때, 확률변수 X 의 기댓값과 분산은 각각 np , $np(1-p)$ 이다.

논제 1. $A, B, C, D, E, F, F, O, O, O$ 의 문자가 하나씩 적혀있는 10장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 문자 O 가 적힌 어떤 카드도 서로 이웃하지 않을 확률을 구하시오.

논제 2. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $-2 \leq X \leq 1$ 이고 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = 3a \left(1 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}|x| \right) \quad (-2 \leq x \leq 1) \text{이다. 다음 물음에 답하시오. (단, } a \text{는 상수이다.)}$$

(1) 상수 a 와 $P(-1 \leq X \leq 0)$ 의 값을 각각 구하시오.

(2) $P(c \leq X \leq c+1)$ 은 $c=\alpha$ 일 때, 최댓값 β 를 갖는다. α 와 β 의 값을 각각 구하시오. (단, $-1 \leq c \leq 0$)

논제 3. 스마트폰을 생산하는 한 기업이 2개의 생산 공장 A, B 를 가지고 있다. 이 기업이 만드는 스마트폰 중 60%는 공장 A 에서 만들어지고 나머지는 공장 B 에서 만들어진단. 이 기업에서 생산한 스마트폰이 공장 A 에서 만들어 졌다고 할 때, 그 제품이 불량품일 확률은 5%이고, 공장 B 에서 만들어 졌다고 할 때, 그 제품이 불량품일 확률은 10%이다. 이 기업에서 생산한 200개의 스마트폰 중에서 불량품의 개수를 확률변수 X 라 할 때, X 의 기댓값을 구하시오.

【문제 1 예시답안】

문제 1. $e^{-f(x)} \frac{d^2}{dx^2} e^{f(x)} = (2ax+b)^2 + 2a$ 이므로 $y^2 = (2ax+b)^2 + 2a$ 이다. 그래서 $y^2 = (2ax+b)^2 + 2a$ 를 $Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$ 로 표현하면 $4a^2x^2 - y^2 + 4abx + b^2 + 2a = 0$ 이다. $A = 4a^2, B = -1$ 이므로 $\frac{A}{B} = -4a^2$ 이다.

문제 2. 우선 쌍곡선 H 의 방정식은 $\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{-\frac{1}{2a}} - \frac{y^2}{-2a} = 1$ 이고 직선 $x=1$ 과 만나지 않기 위해

$a < 0$ 이다. 쌍곡선 H 의 두 꼭짓점의 x 좌표가 $-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 이므로 직선 $x=1$ 과

$\frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{-\frac{1}{2a}} - \frac{y^2}{-2a} = 1$ 이 만나지 않기 위해서 $-\frac{b}{2a} - \sqrt{-\frac{1}{2a}} < 1 < -\frac{b}{2a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 이고 이를 정리하

면 $-2a - \sqrt{-2a} < b < -2a + \sqrt{-2a}$ 이다. 점근선이 $y = \pm 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ 이므로 직선 $y = x + \frac{b}{2a}$ 와 쌍곡

선이 만나지 않기 위해 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 이어야 한다. 주축의 길이는 $2\sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 이므로 4이하이기 위

해서는 $a \leq -\frac{1}{8}$ 이다. 따라서 구하는 영역의 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{8}} (\sqrt{-2a} - 2a) da - \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{8}} (-\sqrt{-2a} - 2a) da = \frac{7}{12} \text{ 이다.}$$

문제 3. (1) 두 삼각형 $\triangle F'SQ$ 와 $\triangle FSQ$ 에서 피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{F'Q}^2 - \overline{F'S}^2 = \overline{FQ}^2 - \overline{FS}^2 \text{ --- (*) 이다.}$$

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{F'Q} = \overline{FQ} + 2\sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 이고 쌍곡선의 초점의 성질로부터

$$\overline{F'S} - \overline{FS} = 2\sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}} \Leftrightarrow \overline{F'S} = \overline{FS} + 2\sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}} \text{ 을 (*)식에 대입하면}$$

$$-\sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}} \overline{FS} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} \overline{FQ} = -2a \text{ 이므로 } -\sqrt{1+4a^2} \overline{FS} + \overline{FQ} = (-2a)^{\frac{3}{2}} \text{ 이다. 따라서 } p = \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

$$(2) \alpha = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}}, \beta = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{-1-4a^2}{2a}} \text{ 이므로 } (\alpha - \beta)^2 = -8a - \frac{2}{a} \text{ 이고}$$

$$\text{산술기하평균에 의해 } (\alpha - \beta)^2 \geq 2\sqrt{(-8a)\left(-\frac{2}{a}\right)} = 2\sqrt{16} = 8 \text{ 이 된다.}$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 $(\alpha - \beta)^2$ 가 최솟값을 갖는다.

【문제 2 예시답안】

문제 1. 이차함수 $f(x)$ 가 최댓값 0을 가지므로 최고차항의 계수는 $\frac{1}{2a}$ 은 음수이고 $f(x)$ 의 판별식은 0이다. 즉, $a < 0$, $D = (a-1)^2 - \frac{4}{2a}(a-1) = \frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a} = 0$ 이다. 따라서 $a = -1$ 이다.

문제 2. $a < 0$ 인 경우, 이차함수 $f(x)$ 는 반드시 어떤 구간에서 음수 값을 갖는다. 따라서 제시문 (나)에 의해 $F(x)$ 는 이 구간에서 감소함을 알 수 있다. $a > 0$ 이므로 삼차함수 $F(x)$ 가 실수 전체에서 증가하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다. 모든 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 위 조건을 만족시키기 위한 필요충분조건은 $D = \frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a} \leq 0$ 이다. 부등식 $a > 0$ 을 동시에 만족시키는 최대 범위는 $1 \leq a \leq 2$ 이다. 따라서 $\beta - \alpha$ 의 최댓값은 1이다.

문제 3. $a \in (2, 3)$ 인 경우, $f(x)$ 의 판별식 D 는 양수이므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근

$$x_1 = \frac{-(a-1) - \sqrt{\frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a}}}{\frac{1}{a}}, \quad x_2 = \frac{-(a-1) + \sqrt{\frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a}}}{\frac{1}{a}}$$

를 갖는다. 또한 $x_1 = b$, $x_2 = c$ 라 하면 함수 $F(x)$ 는 구간 (b, c) 에서 감소하고 구간 $(-\infty, b)$ 와 (c, ∞) 에서 증가하므로 조건 (1)을 만족한다.

조건 (2)는 다음과 같다.

$$2\sqrt{(a+1)a(a-1)(a-2)} = c - b = \frac{97}{10}, \quad \text{즉 } (a+1)a(a-1)(a-2) = \left(\frac{97}{20}\right)^2 = \frac{9409}{400}$$

이제 $g(a) = (a+1)a(a-1)(a-2)$ 라 하자. 그러면 함수 $g(a)$ 는 실수 전체에서 연속이고 $g(2) = 0 < \frac{9409}{400} < \frac{9600}{400} = 24 = g(3)$ 이므로 제시문 (다)에 의해 등식 $g(a) = \frac{9409}{400}$ 를 만족시키는 실수 a 가 구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 주어진 조건을 만족하는 실수 a 가 구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

【문제 3 예시답안】

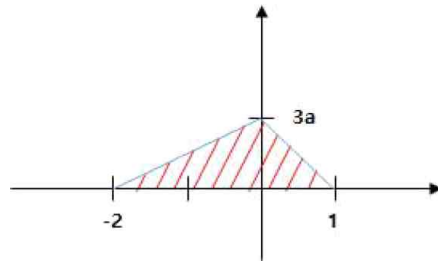
문제 1. 전체 경우의 수는 $\frac{10!}{3!2!}$ 이고 O 가 서로 이웃하지 않는 경우는 $\frac{7!}{2!} \times {}_8C_3$ 이다. 따라서

그 확률은 $\frac{\frac{7!}{2!} \times {}_8C_3}{\frac{10!}{3!2!}} = \frac{7}{15}$ 이다. 또는 전체 경우의 수는 $10!$ 이고 O 가 서로 이웃하지 않는 경우

는 A, B, C, D, E, F, F 7개의 문자를 나열하고 그 사이 또는 양 끝인 8곳 중에서 3개를 선택하여 O 를 넣으면 된다. 그러므로 그 경우의 수는 $7! \times {}_8P_3$ 이다. 따라서 어떤 O 도 서로 이웃하

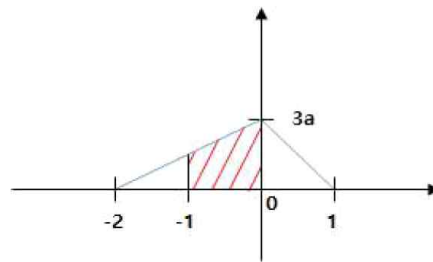
지 않을 확률은 $\frac{7! \times {}_8P_3}{10!} = \frac{7}{15}$ 이다.

문제 2. (1) 함수 $f(x)$ 가 연속확률변수 X 의 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, 직선 $x=-2, x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다. 즉 이 부분은 아래 그림과 같이 넓이가 $3a$ 이고 밑변의 길이가 3인 삼각형이다. 따라서 $3a \times 3 \times \frac{1}{2} = 1$ 을 만족하므로 $a = \frac{2}{9}$ 이다.

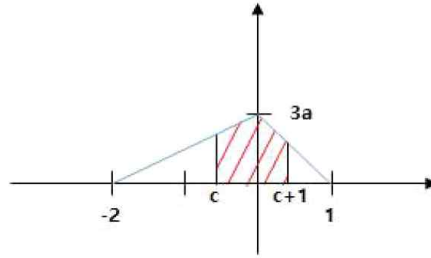


$P(-1 \leq X \leq 0)$ 의 값은 아래의 표시된 부분의 넓이와 같으므로 이 넓이는 전체 넓이 1에서 양쪽의 삼각형 넓이를 빼면 된다. 양쪽 삼각형 넓이 중 왼쪽 삼각형의 넓이는 $1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

이고 오른쪽 삼각형의 넓이는 $1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ 이므로 $P(-1 \leq X \leq 0)$ 는 $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ 이다.



(2) $P(c \leq X \leq c+1)$ 의 값은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, 직선 $x=c$, 직선 $x=c+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 아래의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 된다. 단, $-1 \leq c \leq 0$ 이다. 그리고 빗금 친 부분의 넓이는 전체 넓이 1에서 양쪽의 삼각형 넓이를 빼면 된다.



양쪽 삼각형 넓이 중 왼쪽 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (c+2) \times \left(\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\right) = \frac{(c+2)^2}{6}$ 이고,

오른쪽 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (-c) \times \left(-\frac{2}{3}(c+1) + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}c^2$ 이므로

$$P(c \leq X \leq 1+c) = 1 - \frac{(c+2)^2}{6} - \frac{c^2}{3} = -\frac{1}{2}\left(c + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} \text{ 이다.}$$

$c = -\frac{2}{3}$ 일 때 $P(c \leq X \leq 1+c)$ 의 최댓값은 $\frac{5}{9}$ 이다. 따라서 $\alpha = -\frac{2}{3}$ 이고 $\beta = \frac{5}{9}$ 이다.

문제 3. 불량품이 뽑히는 사건을 E , 생산된 스마트폰이 A 공장일 사건을 A , 생산된 스마트폰이 B 공장일 사건을 B 라 하자. $P(E) = P(A \cap E) \cup P(B \cap E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)$ 이므로 이 기업에서 생산된 스마트폰 중 임의로 추출한 제품이 불량품일 확률 p 는 $p = 0.6 \times 0.05 + 0.4 \times 0.1 = 0.07$ 이다. 그리고 이 기업에서 생산된 제품 중에서 임의로 200개를 추출하였을 때, 이 제품 중 불량품의 개수를 확률변수 X 라 하자. 확률변수 X 는 이항분포 $B(200, 0.07)$ 을 따른다. 따라서 불량품의 개수의 기댓값은 $np = 200 \times 0.07 = 14$ 이다.

2022학년도 고려대학교 세종캠퍼스 수시모집 논술전형 모의고사 02회

[문제 1] 원, 타원, 쌍곡선, 부등식의 영역

(가) 반지름의 길이가 r 이고 중심이 (a, b) 인 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이다.

(나) (1) 부등식 $x^2 + y^2 < r^2$ 의 영역은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 의 내부이다.

(2) 부등식 $x^2 + y^2 > r^2$ 의 영역은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 의 외부이다.

(다) 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=f(t), y=g(t)$ 로 주어질

때, $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P 의 이동거리 s 는 $s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ 이다.

좌표평면에서 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 4인 원을 C 라 하자. 두 점 $Q_1(2, 0), Q_2(8, 0)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

논제 1. 다음 조건을 만족시키는 점 A 가 나타내는 부분을 영역 F_1 이라 하자.

<조건> 중심이 A 인 원이 점 Q_1 을 내부에 포함하고 원 C 의 내부에 있다.

영역 F_1 의 경계선 위에 있는 점의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 모두 구하시오.

논제 2. 다음 조건을 만족시키는 점 B 가 나타내는 부분을 영역 F_2 라 하자.

<조건> 중심이 B 인 원이 점 Q_2 를 내부에 포함하고 원 C 의 외부에 있다.

원점을 지나면서 기울기가 0 이상이고 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 임의의 직선이 영역 F_2 의 경계선과 만

나는 점을 P_2 라 하자. 선분 $\overline{OP_2}$ 와 논제 1에서 정의한 영역 F_1 의 경계선이 만나는 점을 P_1 이라 할 때 $\overline{Q_1P_1} : \overline{Q_2P_2} = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ 를 만족하는 선분 $\overline{P_1P_2}$ 위의 점 P 가 그리는 곡선의 길이를 구하시오.

[문제 2] 주기함수, 무한급수와 정적분, 치환적분

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$(1) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

$$(2) \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$(3) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$(4) \text{실수 } c \text{가 닫힌구간 } [a, b] \text{에 포함될 때, } \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \text{이다.}$$

$$(나) (1) 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(다) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이고 $a=g(\alpha), b=g(\beta)$ 이면 $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$ 이다.

(라) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x)dx$ 이다.

(단, $\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a+k\Delta x$)

함수 $f(x) = |\pi \sin(\pi x)|$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

문제 1. 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+k)$ 임을 증명하시오. (단, k 는 정수이다.)

문제 2. $\sum_{j=0}^9 \int_0^{2^{j+1}} 2x f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

문제 3. 음이 아닌 모든 정수 k 에 대하여 $\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx = a+bk+ck^2+dk^3$ 을 만족시키는 상수 a, b, c, d 의 값을 각각 구하시오.

문제 4. 일반항이 $a_n = \frac{1}{n^4} \int_0^{n^2} 2xf(x)dx$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값을 구하시오.

[문제 3] 중복조합, 이항분포

(가) (1) 서로 다른 n 개에서 r ($0 < r \leq n$)개를 택하는 순열의 수는 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ 이다.

(2) 서로 다른 n 개에서 r ($0 \leq r \leq n$)개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 이다.

(단, ${}_nC_0 = 1$ 이다.)

(3) 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.

(나) 한 번의 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 p 로 일정할 때, n 번의 독립시행에서 사건 A 가 일어나는 횟수를 X 라 하자.

(1) 확률변수 X 가 갖는 값은 $0, 1, 2, \cdots, n$ 이고, X 의 확률질량함수는 $P(X=x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$ ($x=0, 1, 2, \cdots, n$)이며, 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따른다고 한다.

(2) 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따를 때 $E(X) = np$, $V(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)이다.

(다) 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포 $N(0, 1)$ 을 표준정규분포라고 한다. 확률변수 Z 가 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다고 할 때, 양수 z 에 대하여 확률 $P(0 \leq Z \leq z)$ 는 다음과 같은 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

문제 1. 학생 A 가 수영 강습을 받기 위해, 다음 조건 $m_2 - m_1 \geq 3$, $m_3 - m_2 \geq 3$ 을 만족시키도록 2019년도의 열두 달 중 세 달 m_1 월, m_2 월, m_3 월을 선택할 수 있는 모든 순서쌍 (m_1, m_2, m_3) 의 개수를 구하시오.

문제 2. 여덟 개의 면 중 k 개의 면에는 빨간색이 각각 칠해져 있고, 나머지 면에는 파란색이 각각 칠해져 있는 정팔면체 모양의 물체가 있다. 이 물체를 n 번 던져서 지면에 닿은 면이 빨간색이 되는 횟수를 X 라 하자. 확률변수 X 가 다음의 조건을 만족시킬 때, k 와 n 의 값을 구하시오. (단, 각각의 면에는 한 가지 색만 칠해져 있다.)

(1) $E(X) = 4V(X)$

(2) $P(X=1) = 30P(X=0)$

문제 3. 확률변수 X 가 정규분포 $N\left(m, \frac{4}{(2m+1)^2}\right)$ 을 따른다고 한다. $P(X \leq 4) = 0.9772$ 일 때, 양수 m 의 값을 구하시오.

【문제 1 예시답안】

문제 1. 중심의 좌표가 (a, b) 이고 반지름이 r 인 원 $C_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ 이 원 C 의 내부에 있을 조건은 $(*) \sqrt{a^2+b^2}+r < 4$ 이고 점 $(2, 0)$ 이 C_1 내부에 있을 조건은 $(**) \sqrt{(2-a)^2+b^2} < r$ 이다. $(*)$ 와 $(**)$ 에 의해서 $\sqrt{(2-a)^2+b^2} < r < 4 - \sqrt{a^2+b^2}$ 을 얻을 수 있다. 즉 중심의 영역은 $\sqrt{(a-2)^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2} < 4$ 인 타원의 내부이다. 타원의 방정식 $\sqrt{(a-2)^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2} = 4$ 를 간단히 하면 $3(a-1)^2 + 4b^2 = 12$ 가 된다. 이때 $12 - 4b^2 \geq 0$ 이므로 $-\sqrt{3} \leq b \leq \sqrt{3}$ 이다. 따라서 정수인 b 는 $-1, 0$ 또는 1 이 될 수 있고 이 중 a 가 정수값을 가질 수 있는 b 는 0 이다. 따라서 영역 F_1 의 경계선 위에 있는 점의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 $(3, 0)$ 와 $(-1, 0)$ 이다.

문제 2. 중심이 (a, b) 이고 반지름이 r 인 원 $C_2 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ 이 원 C 의 외부에 있을 조건은 $(*) \sqrt{a^2+b^2}-r > 4$ 이고 점 $(8, 0)$ 이 C_2 내부에 있을 조건은 $(**) \sqrt{(8-a)^2+b^2} < r$ 이다.

$(*)$ 과 $(**)$ 에 의해서 $\sqrt{(8-a)^2+b^2} < r < \sqrt{a^2+b^2}-4$ 를 얻을 수 있다. 즉, 중심의 영역은 $\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{(8-a)^2+b^2} > 4$ 인 한쪽 쌍곡선의 내부이고 F_2 의 경계는 $\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{(8-a)^2+b^2} = 4$ 인 곡선이다. 등식을 간단히 하면 $3(a-4)^2 - b^2 = 12$ ($a > 4$)이다.

쌍곡선의 정의를 이용하면 $\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} - \overline{Q_2P_2} = 4$ 이고 타원의 정의를 이용하면 $\overline{OP_1} + \overline{Q_1P_1} = 4$ 이다. 두 식을 빼면 $\overline{P_1P_2} - \overline{Q_2P_2} - \overline{Q_1P_1} = 0$ 을 구할 수 있다. 이에 따라 $\overline{Q_1P_1} : \overline{Q_2P_2} = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ 를 만족시키는 $\overline{P_1P_2}$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P} = \overline{OP_1} + \overline{Q_1P_1} = 4$ 가 된다. 즉, 점 P 의 자취는 반지름이 4 이고 각도가 30° 인 호가 되며 이 길이는 $\frac{2\pi}{3}$ 이다.

【문제 2 예시답안】

문제 1. 함수 $f(x)$ 의 주기가 1이므로,

$$\begin{aligned} f(x+k) &= |\pi \sin(\pi(x+k))| = |\pi \sin(\pi x + \pi k)| = |\pi \sin(\pi x + \pi(k-1))| = \cdots \\ &= |\pi \sin(\pi x + \pi)| = |\pi \sin(\pi x)| = f(x) \text{이다.} \end{aligned}$$

문제 2. $g(k) = \int_0^{2k+1} 2xf(x)dx$ 라 하자. 이때, $t = (2k+1) - x$ 라고 두면 치환적분에 의해서 $g(k)$

$$\text{는 다음과 같다. } g(k) = - \int_{2k+1}^0 2(2k+1-t)f(2k+1-t)dt$$

한편, 문제 1에 의하여 위의 식에서 $f(2k+1-t) = f(t)$ 이다. 이를 이용하여 $g(k)$ 를 정리하면

$$\text{다음과 같다. } g(k) = \int_0^{2k+1} 2(2k+1)f(t)dt - \int_0^{2k+1} 2tf(t)dt = \int_0^{2k+1} 2(2k+1)f(t)dt - g(k)$$

위의 식을 $g(k)$ 로 정리하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다. $g(k) = \int_0^{2k+1} (2k+1)f(t)dt$

$$\text{한편, } \int_0^1 f(x)dx = 2 \text{이고 함수 } f(x) \text{의 주기가 1이므로 } \int_0^{2k+1} f(t)dt = 4k+2 \text{이고}$$

$$g(k) = 2(2k+1)^2 \text{이다. 따라서 } \sum_{k=0}^9 g(k) = 2660 \text{이다.}$$

문제 3. 정적분 $\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx$ 에서 $s = x - k^2$ 이라 하자. 그러면 치환적분에 의해서 그 정적

$$\text{분은 다음과 같다. } \int_0^{2k+1} 2(s+k^2)f(s+k^2)ds$$

한편, 문제 1에 의하여 위의 식에서 $f(s+k^2) = f(s)$ ($\because k^2$ 은 정수)이다. 이를 이용하여 위의

$$\text{정적분을 정리하면 다음과 같다. } \int_0^{2k+1} 2sf(s)ds + \int_0^{2k+1} 2k^2f(s)ds$$

$$\text{한편, } \int_0^1 f(x)dx = 2 \text{이고 } f(x) \text{는 주기가 1이므로, } \int_0^{2k+1} f(s)ds = 4k+2 \text{임을 알 수 있고,}$$

$$\text{또한 문제 2에서 얻은 결과를 이용하면 } \int_0^{2k+1} 2sf(s)ds = 2(2k+1)^2 \text{임을 알 수 있다.}$$

$$\text{구하고자 하는 정적분의 값은 } 2(2k+1)^2 + 2k^2(4k+2) = 2 + 8k + 12k^2 + 8k^3 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } a=2, b=8, c=12, d=8 \text{이다.}$$

문제 4. 정적분의 성질에 의해 $\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx$ 가 됨을 알 수 있다.

한편, 문제 3에서 얻은 결과를 이용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} (8k^3 + 12k^2 + 8k + 2)$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} (8k^3 + 12k^2 + 8k + 2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 8k^3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 12k^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 8k + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 2$$

$$= \int_0^1 8x^3 dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)n(2n-1)}{n^4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n-1)n}{n^4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)}{n^4} = 2 \text{이다.}$$

【문제 3 예시답안】

논제 1. 주어진 조건은 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$, $x_4 \geq 0$ 을 만족한다. 여기에서 x_1 은 m_1 월 이전에 달 수, x_2 는 m_1 월과 m_2 월 사이의 달 수, x_3 는 m_2 월과 m_3 월 사이의 달수, 그리고 x_4 는 m_3 이후의 남은 달 수이다.

따라서 $y_2 = x_2 - 2 \geq 0$, $y_3 = x_3 - 2 \geq 0$ 이라 하면 $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5$, $x_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ 을 만족하는 경우의 수는 ${}_4H_5 = {}_8C_3 = 56$ 이다.

논제 2. 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로 $E(X) = np$ 이고 $V(X) = np(1-p)$ 이다. 조건 (1)로부터 $np = 4np(1-p)$ 이므로 $p = \frac{3}{4} = \frac{k}{8}$ 이고 조건 (2)로부터 $P(X=1) = 30P(X=0)$ 이므로 ${}_nC_1p(1-p)^{n-1} = 30{}_nC_0(1-p)^n$ 으로부터 $np = 30(1-p)$ 이다. 따라서 $k=6$ 이고 $n=10$ 이다.

논제 3. 확률변수 X 가 정규분포 $N\left(m, \frac{4}{(2m+1)^2}\right)$ 를 따르므로

$$P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-m}{\frac{2}{2m+1}}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{2}(2m+1)(4-m)\right) \text{이다.}$$

표준정규분포표로부터 $P(Z \leq 2) = 0.9772$ 이므로 $\frac{1}{2}(2m+1)(4-m) = 2$ 이다. 따라서 $m = \frac{7}{2}$ 이다.

2022학년도 고려대학교 세종캠퍼스 수시모집 논술전형 모의고사 03회

[문제 1] 타원, 덧셈정리, 접선

(가) 두 초점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 으로부터 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(단, $a > c > 0, b^2 = a^2 - c^2$)이다.

(나) 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 타원의 방정식은 $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 이다.

(다) 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_0, y_0) 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ 이다.

(라) 삼각함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

문제 1. 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 - px - qy + 1 = 0$ 이 x 축에 접하고 단축의 길이가 6일 때, 두 초점의 좌표를 구하시오. (단, $p \geq 0, q \geq 0$ 이고 $p^2 + \frac{q^2}{4} > 1$ 이다.)

문제 2. 타원 $\frac{x^2}{4R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ 과 직선 $l_1: y = mx$ 의 교점 중 제 1사분면 위의 점을 P 라 하고, 점 P 에서 타원에 접하는 직선을 l_2 라 하자. (단, $R > 0, m > 0$ 이다.)

(1) 직선 l_2 의 기울기를 $f(m)$ 이라 할 때, $mf(m)$ 을 구하시오.

(2) 직선 l_1 과 직선 l_2 가 이루는 예각의 크기를 $\theta(m)$ 이라 할 때, $\theta(m)$ 이 최소가 되도록 하는 m 의 값을 구하시오.

[문제 2] 정적분 계산

(가) 미분가능한 함수 $h(x)$ 에 대하여 $t = h(x)$ 로 놓으면 $\int g(h(x))h'(x) dx = \int g(t) dt$ 이다.

(나) 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 연속일 때, 이 구간의 모든 x 에 대하여 $g(-x) = -g(x)$ 이면 $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$ 이다.

사차함수 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 다음 조건을 만족한다. (단, a, b, c, d 는 상수이다.)
모든 실수 x 에 대하여 $3f'(x) = (x+3)f''(x)$ 이다.

문제 1. $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오.

문제 2. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{f(3)-f(0)}{3} = f'(\alpha)$ 를 만족시키는 실수 α 의 값을 구하시오.

문제 3. 함수 $f(x)$ 가 $\int_{-4}^{-2} \left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+3}{2}\right) \right)^2 f(x) dx = 0$ 을 만족시킬 때, $f(-3)$ 의 값을 구하시오.

[문제 3]

(가) 서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r ($r \leq n$)개를 택할 때, 이것을 n 개에서 r 개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$ 와 같이 나타낸다. 이 때, 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

(나) 자연수 n 을 자신보다 크지 않은 자연수 n_1, n_2, \dots, n_k 의 합으로

$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ ($n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k$)와 같이 나타내는 것을 자연수의 분할이라고 한다.

(다) 원소가 유한개인 집합을 공집합이 아닌 몇 개의 서로소인 부분집합의 합집합으로 나타내는 것을 집합의 분할이라고 한다. 예를 들면, 원소가 4개인 집합을 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 7이다.

1부터 n 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 n 장의 카드가 주머니에 들어 있다. 한 번에 1장에서 n 장까지 카드를 반복해서 꺼내려고 한다. 주머니에 남은 카드가 없도록 n 장의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 생각해 보자. 예를 들면, $n=3$ 일 때 꺼내는 방법의 수는 13이다.

문제 1. $n=4$ 일 때 주머니 속의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 구하시오.

문제 2. 다음과 같은 시행을 통해 주머니 속에 있는 모든 카드를 꺼낸다.

i 번째 꺼낸 카드의 개수가 m 이면 $(i+1)$ 번째 꺼내는 카드의 개수는 $\frac{m}{2}$ 이하이다

이와 같은 과정을 통해 10장의 카드를 모두 꺼내는 방법의 수를 구하시오.

【문제 1 예시답안】

문제 1. 타원의 중심은 $\left(2p, \frac{q}{2}\right)$ 이다. 단축의 길이가 6이고, 타원이 x 축에 접하므로 $q=6$ 이다.

$(2p, 0)$ 은 타원 위의 점이므로 $p=1$ 이다. 따라서 $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ 이다.

그러므로 초점의 좌표는 $(2+3\sqrt{3}, 0), (2-3\sqrt{3}, 3)$ 이다.

문제 2. (1) 타원과 직선 $l_1: y=mx$ 의 교점을 $P(x_0, y_0)$ 이라 하자. $m = \frac{y_0}{x_0}$ 이고, 점 P 에서의 접

선 l_2 의 기울기 $f(m) = -\frac{x_0}{4y_0} = -\frac{1}{4m}$ 이다. 따라서 $mf(m) = -\frac{1}{4}$ 이다.

(2) 직선이 l_1 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 α , 직선 l_2 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 β 라 할 때, $m = \tan\alpha, f(m) = \tan\beta$ 이다.

$\beta - \alpha = \pi - \theta(m)$ 이므로 $\tan(\theta(m)) = \tan(\pi - (\beta - \alpha)) = \frac{m + \frac{1}{4m}}{3/4} = \frac{4m^2 + 1}{3m}$ 이다.

$\tan(\theta(m))$ 은 $m = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값을 가지므로 $\tan(\theta(m)) \geq \tan(\theta(\frac{1}{2}))$ 이다. 탄젠트함수는 구간

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가함수이므로 $\theta(m) \geq \theta(\frac{1}{2})$ 이다. 따라서 $\theta(m)$ 의 최솟값은 $m = \frac{1}{2}$ 일 때이다.

【문제 2 예시답안】

문제 1. 주어진 조건에 의하여 $\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{3}{x+3}$ 이다.

제시문 (가)를 이용하면 $\ln|f'(x)| = \int \frac{f''(x)}{f'(x)} dx = \ln|x+3| + C_1$ 이다.

따라서 $|f'(x)| = e^{\ln|f'(x)|} = e^{C_1}|x+3|^3$ 이다. $f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로

$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = f'(x) = e^{C_1}(x+3)^3$ 이다. 양변의 계수를 비교하면 $a=12, b=54$ 이므로 $\frac{a}{b} = \frac{2}{9}$

이다.

문제 2. 문제 1의 결과로부터 $f(x) = \int 4(x+3)^3 dx = (x+3)^4 + C_2$ 이다. 따라서

$\frac{f(3)-f(0)}{3} = 15 \times 3^3$ 이고 주어진 식으로부터

$15 \times 3^4 = f(3) - f(0) = 3f'(\alpha) = (\alpha+3)f''(\alpha) = 12(\alpha+3)^3$ 이다.

따라서 $\alpha = 3\left(\sqrt[3]{\frac{15}{4}} - 1\right)$ 이다.

문제 3. $f(x) = (x+3)^4 + C_2$ 이고 $\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 = 1 - \sin(x+3)$ 이므로

$\int_{-4}^{-2} \left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} (1 - \sin(x+3))((x+3)^4 + C_2) dx$

$= \int_{-1}^1 (1 - \sin t)(t^4 + C_2) dt = \frac{2}{5} + 2C_2$ 이다. 조건으로부터 $f(-3) = C_2 = -\frac{1}{5}$ 이다.

【문제 3 예시답안】

문제 1. $n=4$ 일 때, 자연수 4를 분할하는 방법이 $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$ 이고 카드 1, 2, 3, 4를 1개, 2개, 3개, 4개의 집합으로 분할할 수 카드를 꺼내는 방법을 구하면

$$1 \times 1 + \left({}_4C_3 \times {}_1C_1 + {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \right) \times 2! + \left({}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \right) \times 3! + 4! = 75 \text{ (가지)이다.}$$

문제 2. X 를 주머니 속에 있는 카드를 꺼낸 횟수라 하면

(1) $X=1$ 일 때, 10장의 카드를 한 번에 모두 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는 1(가지)이다.

(2) $X=2$ 일 때, 10을 2개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $10=7+3=8+2=9+1$ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_{10}C_7 \times {}_3C_3 + {}_{10}C_8 \times {}_2C_2 + {}_{10}C_9 \times {}_1C_1 = 120 + 45 + 10 = 175 \text{ (가지)}$ 이다.

(3) $X=3$ 일 때, 10을 3개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $10=7+2+1=6+3+1$ 이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_{10}C_7 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 + {}_{10}C_6 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 = 360 + 840 = 1200 \text{ (가지)}$ 이다.

(4) $X \geq 4$ 이면 만족하는 자연수 분할이 존재하지 않는다.

그러므로 주어진 조건을 만족하는 개수는 $1 + 175 + 1200 = 1376 \text{ (가지)}$ 이다.