2022학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사 01 (의예과, 치의예과, 수의예과) 100분

[문제 1] 주기함수, 무한급수와 정적분, 치환적분

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(4) 실수 c가 닫힌구간 $[a, b]$에 포함될 때, $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$이다.

(나) (1) $1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(다) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $a = g(\alpha), b = g(\beta)$이면 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$이다.

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x = \int_a^b f(x)dx$이다.

(단, $\triangle x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\triangle x$)

함수 $f(x) = |\pi \sin(\pi x)|$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

논제 1. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+k)$임을 증명하시오. (단, k는 정수이다.)

논제 2. $\sum_{j=0}^{9}\int_0^{2j+1} 2xf(x)dx$의 값을 구하시오.

논제 3. 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여 $\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx = a+bk+ck^2+dk^3$을 만족시키는 상수 a, b, c, d의 값을 각각 구하시오.

논제 4. 일반항이 $a_n = \frac{1}{n^4}\int_0^{n^2} 2xf(x)dx$인 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 구하시오.

[문제 2] 정적분 계산

(가) 미분가능한 함수 $h(x)$에 대하여 $t=h(x)$로 놓으면 $\int g(h(x))h'(x)\,dx=\int g(t)\,dt$이다.

(나) 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속일 때, 이 구간의 모든 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이면 $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx=0$이다.

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$가 다음 조건을 만족한다. (단, a, b, c, d는 상수이다.)
모든 실수 x에 대하여 $3f'(x)=(x+3)f''(x)$이다.

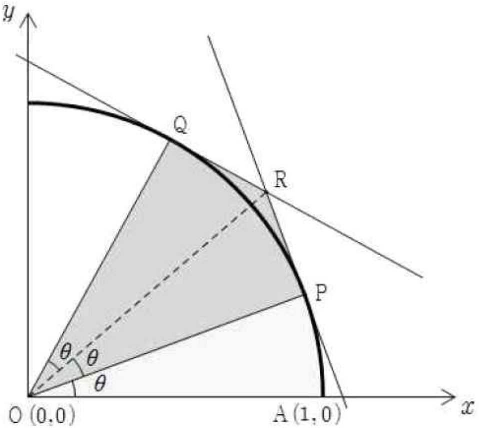
논제 1. $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

논제 2. 함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{f(3)-f(0)}{3}=f'(\alpha)$를 만족시키는 실수 α의 값을 구하시오.

논제 3. 함수 $f(x)$가 $\int_{-4}^{-2}\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 f(x)\,dx=0$을 만족시킬 때, $f(-3)$의 값을 구하시오.

[문제 3]

좌표평면에서 $O(0,0)$이고 $A(1,0)$이다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위에서 움직이는 점 P에 대하여 $\angle POA=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라고 하자. 이때 원점 O를 중심으로 점 P를 2θ만큼 회전시킨 점을 Q라 하고, 점 P와 Q에서 각각 원에 그은 접선의 교점을 R라고 하자. 다음 물음에 답하시오.



논제 1. 선분 OR의 길이와 점 R의 x좌표를 구하시오.

논제 2. 사각형 $OPRQ$의 넓이를 $f(\theta)$라고 할 때, $f(\theta)$를 θ에 대한 식으로 나타내시오.

논제 3. 부채꼴 POA의 넓이를 $g(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$를 구하시오.

【문제 1 예시답안】

논제 1. 함수 $f(x)$의 주기가 1이므로,

$f(x+k)=|\pi\sin(\pi(x+k))|=|\pi\sin(\pi x+\pi k)|=|\pi\sin(\pi x+\pi(k-1))|=\cdots$

$=|\pi\sin(\pi x+\pi)|=|\pi\sin(\pi x)|=f(x)$이다.

논제 2. $g(k)=\int_0^{2k+1}2xf(x)dx$라 하자. 이때, $t=(2k+1)-x$라고 두면 치환적분에 의해서 $g(k)$는 다음과 같다. $g(k)=-\int_{2k+1}^{0}2(2k+1-t)f(2k+1-t)dt$

한편, 논제 1에 의하여 위의 식에서 $f(2k+1-t)=f(t)$이다. 이를 이용하여 $g(k)$를 정리하면 다음과 같다. $g(k)=\int_0^{2k+1}2(2k+1)f(t)dt-\int_0^{2k+1}2tf(t)dt=\int_0^{2k+1}2(2k+1)f(t)dt-g(k)$

위의 식을 $g(k)$로 정리하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다. $g(k)=\int_0^{2k+1}(2k+1)f(t)dt$

한편, $\int_0^1 f(x)dx=2$이고 함수 $f(x)$의 주기가 1이므로 $\int_0^{2k+1}f(t)dt=4k+2$이고 $g(k)=2(2k+1)^2$이다. 따라서 $\sum_{k=0}^{9}g(k)=2660$이다.

논제 3. 정적분 $\int_{k^2}^{(k+1)^2}2xf(x)dx$에서 $s=x-k^2$이라 하자. 그러면 치환적분에 의해서 그 정적분은 다음과 같다. $\int_0^{2k+1}2(s+k^2)f(s+k^2)ds$

한편, 논제 1에 의하여 위의 식에서 $f(s+k^2)=f(s)$ ($\because k^2$은 정수)이다. 이를 이용하여 위의 정적분을 정리하면 다음과 같다. $\int_0^{2k+1}2sf(s)ds+\int_0^{2k+1}2k^2f(s)ds$

한편, $\int_0^1 f(x)dx=2$이고 $f(x)$는 주기가 1이므로, $\int_0^{2k+1}f(s)ds=4k+2$임을 알 수 있고,

또한 논제 2에서 얻은 결과를 이용하면 $\int_0^{2k+1}2sf(s)ds=2(2k+1)^2$임을 알 수 있다.

구하고자 하는 정적분의 값은 $2(2k+1)^2+2k^2(4k+2)=2+8k+12k^2+8k^3$이다.

따라서 $a=2,\ b=8,\ c=12,\ d=8$이다.

논제 4. 정적분의 성질에 의해 $\int_0^{n^2}2xf(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k^2}^{(k+1)^2}2xf(x)dx$가 됨을 알 수 있다.

한편, 논제 3에서 얻은 결과를 이용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$\int_0^{n^2}2xf(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}(8k^3+12k^2+8k+2)$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\int_0^{n^2}2xf(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}(8k^3+12k^2+8k+2)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}8k^3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}12k^2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}8k+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}2$

$$= \int_0^1 8x^3 dx + \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)n(2n-1)}{n^4} + \lim_{n\to\infty} \frac{4(n-1)n}{n^4} + \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)}{n^4} = 2$$ 이다.

【문제 2 예시답안】

논제 1. 주어진 조건에 의하여 $\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{3}{x+3}$이다.

제시문 (가)를 이용하면 $\ln|f'(x)| = \int \frac{f''(x)}{f'(x)}\,dx = \ln|x+3|^3 + C_1$이다.

따라서 $|f'(x)| = e^{\ln|f'(x)|} = e_1^C|x+3|^3$이다. $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = f'(x) = e_1^C(x+3)^3$이다. 양변의 계수를 비교하면 $a = 12,\, b = 54$이므로 $\frac{a}{b} = \frac{2}{9}$이다.

논제 2. 논제 1의 결과로부터 $f(x) = \int 4(x+3)^3\,dx = (x+3)^4 + C_2$이다. 따라서 $\frac{f(3)-f(0)}{3} = 15 \times 3^3$이고 주어진 식으로부터 $15 \times 3^4 = f(3) - f(0) = 3f'(\alpha) = (\alpha+3)f''(\alpha) = 12(\alpha+3)^3$이다.

따라서 $\alpha = 3\left(\sqrt[3]{\frac{15}{4}} - 1\right)$이다.

논제 3. $f(x) = (x+3)^4 + C_2$이고 $\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 = 1 - \sin(x+3)$이므로

$\int_{-4}^{-2}\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 f(x)\,dx = \int_{-4}^{-2}(1 - \sin(x+3))((x+3)^4 + C_2)\,dx$

$= \int_{-1}^{1}(1 - \sin t)(t^4 + C_2)\,dt = \frac{2}{5} + 2C_2$이다. 조건으로부터 $f(-3) = C_2 = -\frac{1}{5}$이다.

【문제 3 예시답안】

논제 1. 원의 접선의 성질에 의하여 $\overline{OP}\perp\overline{PR}$이므로 $\triangle OPR$은 직각삼각형이다. 따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{\overline{OR}}$

즉 $\overline{OR}=\sec\theta$이다. 그리고 $\angle ROA=2\theta$이므로 점 R의 x좌표는 $\sec\theta\cos2\theta$이다.

논제 2. 직각삼각형 $\triangle OPR$에서 변 OP의 길이는 1이고, 변 PR의 길이는 $\tan\theta$이므로 $f(\theta)=2\left(\dfrac{1}{2}\overline{OP}\times\overline{PR}\right)=\overline{PR}=\tan\theta$이다.

논제 3. 부채꼴 POA의 넓이는 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$이므로 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\theta=\dfrac{\theta}{2}$이다.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\tan\theta}{\frac{\theta}{2}}=\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{2}{\cos\theta}\right)$이다. 그리고 $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$이므로

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}=\left(\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\left(\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2}{\cos\theta}\right)=2$이다.

2022학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사 02
(의예과, 치의예과, 수의예과) 100분

[문제 1] 접선, 역함수, 덧셈정리

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 연속일 때,

$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ 이다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는 $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$ (단, $f'(y) \neq 0$)이다.

(다) 삼각함수의 덧셈정리

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^x$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x) = \int_0^x \{f(t)-f^{-1}(t)\}\,dt$는 $x=1$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{3}$을 갖는다. (단, a, b는 양수이고, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

논제 1. $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오.

논제 2. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선을 l_1, 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(1, f^{-1}(1))$에서의 접선을 l_2라 하자. 직선 l_1과 직선 l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

논제 3. $f(\alpha)-g(\alpha)=4$를 만족시키는 양의 실수 α에 대하여 $2\alpha e^{\alpha-1}+3\int_1^\alpha f^{-1}(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[문제 2]

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(나) 연속함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$ 이면 $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ 이다.

(다) 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

(라) 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 함수 $f(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

논제 1. 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1) = 0$ 이고 닫힌구간 $[1, 3]$에서 $3 \leq f'(x) \leq 7$ 이다. 이 때, $a \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq b$를 만족하는 a의 최댓값과 b의 최솟값을 구하시오.

논제 2. $f(x) = |x^2 + x - 2|$의 구간 $[t, t+1]$에서의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $\int_{-2}^0 g(t)\,dt$의 값을 구하시오.

[문제 3]

(가) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능하면 $f'(x)$의 도함수 $\lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f'(x+\varDelta x)-f'(x)}{\varDelta x}$를 함수 $f(x)$의 이계도함수라고 하며, 이것을 $f''(x)$로 나타낸다.

(나) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 $\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$이고, 이를 이용하면 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$ (단, C는 적분상수)가 성립한다.

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 $f(x)=\int_0^x \sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt$를 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

논제 1. $f(x)$와 $f''(x)$의 관계식을 구하고, $f(x)$를 구하시오.

논제 2. $\int_0^1 \left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2 dx$를 구하시오.

【문제 1 예시답안】

논제 1. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $g'(1)=f(1)-f^{-1}(1)=0$ 즉, $f(1)=1$이다. 그러므로 $(a+b)e=1$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$, $f(1)=1$이므로 정적분과 넓이의 관계에 의하여 $\int_0^1 \{f(x)+f^{-1}(x)\}dx=1$이다. 또 조건으로부터 $g(1)=-\frac{1}{3}$이므로 $g(1)=\int_0^1 \{f(x)-f^{-1}(x)\}dx=-\frac{1}{3}$이다. 따라서 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$이다. 한편 부분적분법을 이용하면 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax^2+bx)e^x\,dx=ae+b-2a$이므로 $ae+b-2a=\frac{1}{3}$이다.

그러므로 $a=\frac{1}{3e}, b=\frac{2}{3e}$이다. 따라서 $\frac{b}{a}=2$이다.

논제 2. 함수 $f(x)=\frac{1}{3e}(x^2+2x)e^x$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선 l_1의 기울기는 $f'(1)=\frac{7}{3}$이다. 또 역함수의 미분법에 의하여 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(1, f^{-1}(1))$에서의 접선 l_2의 기울기는 $\frac{3}{7}$이다. 직선 l_1의 기울기를 $\tan\theta_1$, 직선 l_2의 기울기를 $\tan\theta_2$라 하면 $\tan\theta_1=\frac{7}{3}$, $\tan\theta_2=\frac{3}{7}$이고 $\theta=\theta_1-\theta_2$이므로 $\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{20}{21}$이다.

논제 3. 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 증가함수이고 $h(1)=\frac{4}{3}$이므로 $f(\alpha)-g(\alpha)=4$인 α는 $\alpha>1$이다. 한편 문제의 조건으로부터 $4=f(\alpha)-g(\alpha)=f(\alpha)-g(1)-\int_1^\alpha f(x)dx+\int_1^\alpha f^{-1}(x)dx$이므로 $\int_1^\alpha f^{-1}(x)dx=\frac{10}{3}-f(\alpha)+\frac{1}{3e}\alpha^2e^\alpha$이다. 그러므로 $2\alpha e^{\alpha-1}+3\int_1^\alpha f^{-1}(x)dx=10$이다.

【문제 2 예시답안】

논제 1. $(1,3)$에 속하는 임의의 x에 대하여 평균값의 정리를 사용하면 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$인 c가 존재한다. $f(1)=0$이므로 $f(x)=f'(c)(x-1)$

$3 \le f'(c) \le 7$이고 $x-1>0$이므로 $3(x-1) \le f'(c)(x-1) \le 7(x-1)$

$\int_1^3 3(x-1)dx \le \int_1^3 f(x)dx \le \int_1^3 7(x-1)dx$, $6 \le \int_1^3 f(x)dx \le 14$

a의 최댓값 6이고 b의 최솟값 14이다.

논제 2. $f(x)=|x^2+x-2|$의 그래프를 그려보자. $x=-\frac{1}{2}$에서 최대이다.

범위로 나누어 생각하면 ($t \le -\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2} \le t \le -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \le t \le 0$)

1) $t+1 \le -\frac{1}{2}$일 때 즉 $t \le -\frac{3}{2}$

$f(x)$는 증가함수이므로 $g(t)=f(t+1)$

2) $t \le -\frac{1}{2} \le t+1$일 때 즉 $-\frac{3}{2} \le t \le -\frac{1}{2}$

$g(t)=f(-\frac{1}{2})=\frac{9}{4}$

3) $t \ge -\frac{1}{2}$이고 $t+1 \le 1$ 일 때, 즉 $-\frac{1}{2} \le t \le 0$

$f(x)$는 감소함수이므로 $g(t)=f(t)$

$$S=\int_{-2}^{-\frac{3}{2}} f(t+1)dt+\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{9}{4}dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt+\frac{9}{4}+\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt=\int_{-1}^{0} f(t)dt+\frac{9}{4}=\int_{-1}^{0}(-t^2-t+2)dt+\frac{9}{4}=\frac{53}{12}$$

【문제 3 예시답안】

논제 1. $f'(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+1}$ 이고, $\{f'(x)\}^2=\{f(x)\}^2+1$ 이다. $(\{f(x)\}^2+1>0)$

$f'(x)$를 미분하면 $f''(x)=\dfrac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}=\dfrac{f(x)\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}{\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}=f(x)$

따라서 $f''(x)=f(x)$ 이다.

이 식의 양변에 $f'(x)$ 를 더하면 $f''(x)+f'(x)=f(x)+f'(x)$ 이고,

$f(x)+f'(x)=f(x)+\sqrt{\{f(x)\}^2+1}>0$ 이므로 양변을 $f(x)+f'(x)$로 나누면 $\dfrac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}=1$

이다. 양변을 부정적분하면 $\displaystyle\int\frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}dx=\int 1dx$

따라서 $\ln\{f(x)+f'(x)\}=x+C$ (단, C는 적분상수)이다. 여기서

$f(0)=\displaystyle\int_0^0\sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt=0$, $f'(0)=\sqrt{\{f(0)\}^2+1}=1$ 이므로 $\ln\{f(0)+f'(0)\}=\ln 1=C=0$ 이 성립

한다. 그러므로 $\ln\{f(x)+f'(x)\}=x$ 이다. 따라서 $f(x)+f'(x)=e^x$ 이다.

한편 $f'(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+1}$ 이므로 위 식에 대입하면 $f(x)+\sqrt{\{f(x)\}^2+1}=e^x$,

$\sqrt{\{f(x)\}^2+1}=e^x-f(x)$ 이다. 양변을 제곱하면 $\{f(x)\}^2+1=e^{2x}-2e^xf(x)+\{f(x)\}^2$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

논제 2. $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 이므로 $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 이다.

$$\int_0^1\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2dx=\int_0^1\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2dx=\int_0^1\frac{(e^x+e^{-x})^2-4}{(e^x+e^{-x})^2}dx$$

$=\displaystyle\int_0^1\left\{1-\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\right\}dx=1-\int_0^1\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}dx$ 이다. 여기서

$$\int_0^1\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}dx=\int_0^1\frac{4}{\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2}dx=\int_0^1\frac{4}{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)^2}dx=\int_0^1\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx$$

이다. $t=e^{2x}+1$ 로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2e^{2x}$, $x=0$ 일 때 $t=2$ 이고 $x=1$ 일 때 $t=e^2+1$ 이므로

$\displaystyle\int_0^1\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx=\int_2^{e^2+1}\frac{2}{t^2}dt=2\left[-\frac{1}{t}\right]_2^{e^2+1}=-\frac{2}{e^2+1}+1$ 이다. 따라서

$$\int_0^1\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2dx=1-\int_0^1\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}dx=1-\left(-\frac{2}{e^2+1}+1\right)=\frac{2}{e^2+1}$$

2022학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사 03 (의예과, 치의예과, 수의예과) 100분

[문제 1]

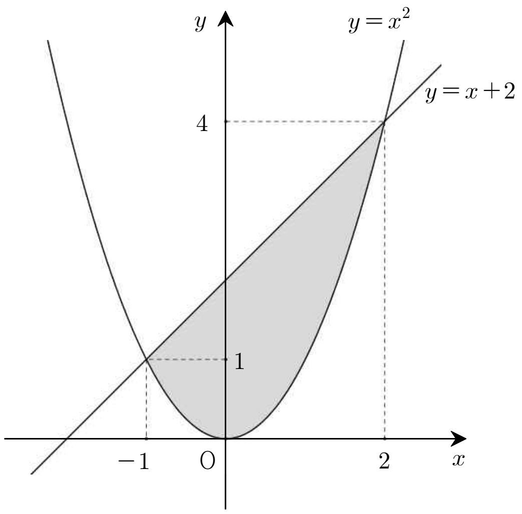
(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

(나) 구간 $[a,\, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\, \beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$

자연수 a, b에 대하여 포물선 $y=x^2$과 직선 $y=ax+b$로 둘러싸인 영역을 $D(a,b)$라 하자. (단, 경계선은 포함한다.) 영역 $D(a,b)$의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $L(a,b)$라 하자.

예를 들면 $D(1,2)$는 아래와 같은 영역이며 영역 $D(1,2)$의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $(-1,1)$, $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$이므로 $L(1,2)=8$이다.

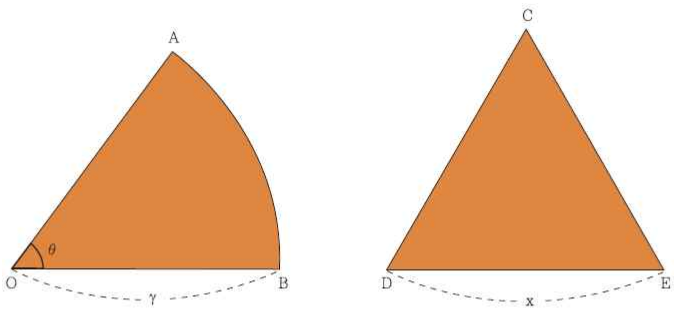


논제 1. 자연수 n과 실수 α, β에 대하여 제시문을 이용하여 $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^n dx$를 구하시오.

논제 2. 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근의 차를 c라 하자. 예를 들면 $x^2-x-2=0$의 두 근이 -1, 2이므로 $c=2-(-1)=3$이다. 영역 $D(a,\, b)$의 넓이가 유리수일 때, $L(a,b)$를 c에 관한 식으로 나타내시오.

[문제 2]

그림과 같이 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ라디안인 부채꼴 OAB와 둘레의 길이가 같은 정삼각형 CDE의 한 변의 길이를 x라고 하자. (단, $r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi$)



논제 1. x를 r, θ의 식으로 나타내시오.

논제 2. 부채꼴 OAB의 넓이를 S, 정삼각형 CDE의 넓이를 T라 할 때, $f(\theta) = \dfrac{T}{S}$인 θ의 함수 $f(\theta)$를 구하시오.

논제 3. $f(\theta)$가 최솟값을 가지는 θ의 값과 그때 $f(\theta)$의 값을 구하시오.

[문제 3] 부분적분, 치환적분

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u),\, u=g(x)$에 대하여 $y=f(g(x))$의 도함수는 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

(나) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속일 때, $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$이다. (단, $a=g(\alpha),\, b=g(\beta)$이다.)

(다) 두 함수 $f(x),\, g(x)$가 미분가능하고 $f'(x),\, g'(x)$가 연속일 때,
$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$이다.

이차함수 $f(x)=4ax^2-8ax$는 $\int_e^3 \frac{2}{f(x)}\,dx=1-\ln(3e-6)$을 만족한다. (단, $a>0$이고 e는 자연로그의 밑이다.)

논제 1. a의 값을 구하시오.

논제 2. 이차함수 $g(x)=\frac{x^2}{4}-x+10$과 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $h(x)=x^5e^{-g(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{g(x)}}{x^4}\right)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $h(1)$의 값을 구하시오.

(2) $\int_1^2\left(\frac{d}{dx}e^{f(x)}\right)h(x)\,dx=\frac{p}{e}+q$일 때, $p+2q$의 값을 구하시오. (단, $p,\,q$는 유리수이다.)

논제 3. 음이 아닌 두 실수 $c,\,d$에 대하여 구간 $I=\left[\frac{19}{10},\,\infty\right)$에서 정의된 함수 $k(x)$는 $k(x)=\ln(f(x)+c)+e^{-f(x)}-d$이다. 함수 $k(x)$가 다음의 조건을 동시에 만족시킬 때, c와 d의 순서쌍 $(c,\,d)$가 타나내는 영역의 넓이를 구하시오.

(1) 모든 $x\geq 2$에 대하여 $k(x)\geq 0$

(2) 모든 $x_1,\, x_2\in I$에 대하여 $(x_1-x_2)(k(x_1)-k(x_2))\geq 0$

【문제 1 예시답안】

논제 1. 제시문 (가), (나)에 따라

$f(x)=x-\alpha$, $g'(x)=(x-\beta)^n$, $a=\alpha$, $b=\beta$라 하고 부분적분법을 이용하면

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^n dx = \left[(x-\alpha)\left\{\frac{1}{n+1}(x-\beta)^{n+1}\right\}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{n+1}(x-\beta)^{n+1}dx$$

$$= -\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}(x-\beta)^{n+2}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\alpha-\beta)^{n+2}$$ 이다.

논제 2. 먼저 근의 공식을 이용하여 $x^2-ax-b=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2+4b}\right)$, $\beta=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4b}\right)$이다. 한편 영역 $D(a,b)$의 넓이는 논제 1의 결과에 의해

$$\int_\alpha^\beta \left(ax+b-x^2\right)dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3 = \frac{1}{6}(a^2+4b)\sqrt{a^2+4b}$$

이다. 따라서 영역 $D(a,b)$의 넓이가 유리수일 조건은 $\sqrt{a^2+4b}$가 유리수이어야 한다.

c를 구하면 $c=\beta-\alpha=\sqrt{a^2+4b}$이며 a, b가 자연수이므로 c는 자연수이다.

이제 $\alpha\le x\le\beta$에 대하여 $L(a,b)$를 구하여 보자.

만일 a가 짝수이면 a^2+4b가 4의 배수가 되어서 c는 짝수가 되고, a가 홀수이면 a^2+4b가 홀수가 되어서 c가 홀수가 된다. (홀수) ± (홀수)=(짝수), (짝수) ± (짝수)=(짝수)이다.

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2+4b}\right)=\frac{1}{2}(a-c)$, $\beta=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4b}\right)=\frac{1}{2}(a+c)$이므로 α, β는 모두 정수이다.

$k=0,1,\cdots,\beta-\alpha=c$라 하자. $x=\alpha+k$에 대하여 영역 $D(a,b)$의 x좌표와 y 좌표가 정수인 점의 집합과 집합의 개수 $L(a,b)$를 구하여 보면

$k=0$: $\{(\alpha,\alpha^2)\}$이므로 1개

$k=1$: $\{(\alpha+1,d)\mid(\alpha+1)^2\le d\le a(\alpha+1)+b\}$이고

$\{a(\alpha+1)+b\}-(\alpha+1)^2+1=\{(\alpha+\beta)(\alpha+1)-\alpha\beta\}-(\alpha+1)^2+1=\beta-\alpha=c$이므로 c개

⋮

$k=t$: $\{(\alpha+t,d)\mid(\alpha+t)^2\le d\le a(\alpha+t)+b\}$이고

$\{a(\alpha+t)+b\}-(\alpha+t)^2+1=\{(\alpha+\beta)(\alpha+t)-\alpha\beta\}-(\alpha+t)^2+1=-t^2+t(\beta-\alpha)+1=-t^2+ct+1$

이므로 $(-t^2+ct+1)$개

⋮

$k=c$: $\{(\beta,\beta^2)\}$이므로 1개이다. 따라서 구하는 값은

$$\sum_{t=0}^{c}\left(-t^2+ct+1\right) = -\frac{1}{6}c(c+1)(2c+1)+c\frac{c(c+1)}{2}+(1+c)=\frac{1}{6}(1+c)(-2c^2-c+3c^2+6)$$

$$=\frac{1}{6}(1+c)(c^2-c+6)$$ 이다.

【문제 2 예시답안】

논제 1. 부채꼴 OAB의 둘레의 길이는 $r+r+r\theta=r(2+\theta)$이고 정삼각형 CDE의 둘레의 길이는 $3x$이므로 $3x=r(2+\theta)$이다. 따라서 x를 구하면 $x=\frac{r(2+\theta)}{3}$이다.

논제 2. 부채꼴 OAB의 넓이는 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

정삼각형 CDE의 넓이는 $T=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{r^2(2+\theta)^2}{9}=\frac{\sqrt{3}\,r^2(2+\theta)^2}{36}$이다.

따라서 $f(\theta)=\frac{T}{S}=\frac{\frac{\sqrt{3}\,r^2(2+\theta)^2}{36}}{\frac{1}{2}r^2\theta}=\frac{\sqrt{3}(2+\theta)^2}{18\theta}$

논제 3. $\theta>0$에서 $18\theta\neq 0$이므로 $f(\theta)$는 미분가능하다.

$f'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{18}\times\frac{2(2+\theta)\times\theta-(2+\theta)^2}{\theta^2}=\frac{\sqrt{3}(2+\theta)(\theta-2)}{18\theta^2}$이므로 $f'(\theta)=0$이면 $\theta=2$이다.

$\theta<2$이면 $f'(\theta)<0$이고, $\theta>2$이면 $f'(\theta)>0$이므로 $f(\theta)$는 $\theta=2$일 때 극솟값을 갖고 이것이 최솟값이다. $f(\theta)$의 최솟값은 $f(2)=\frac{\sqrt{3}(2+2)^2}{18\times 2}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

【문제 3 예시답안】

논제 1. $\int_{e}^{3}\frac{2}{f(x)}dx=\frac{1}{4a}\int_{e}^{3}\left\{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right\}dx=\frac{1}{4a}(1-\ln(3e-6))$이다. 조건으로부터 $a=\frac{1}{4}$이다.

논제 2. (1) $h(x)=x^5e^{-g(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{g(x)}}{x^4}\right)=xg'(x)-4$이므로 $h(1)=g'(1)-4=-\frac{9}{2}$이다.

(2) $f(x)=2xg'(x)$이고 $t=2xg'(x)$로 치환하여 적분하면

$\int_{1}^{2}\left(\frac{d}{dx}e^{f(x)}\right)h(x)\,dx=\int_{1}^{2}(xg'(x)-4)(2g'(x)-2xg''(x))e^{2xg'(x)}dx=\frac{1}{2}\int_{2g'(1)}^{0}(t-8)e^{t}dt=5e^{-1}-\frac{9}{2}$이다.

따라서 $p=5,\ q=-\frac{9}{2}$이므로 $p+2q=-4$이다.

논제 3. 조건 (2)에 의해 $k(x)$는 증가함수이므로 조건 (1)와 $k(2)=\ln c-d+1\geq 0$는 동치이다. 그러므로 $0\leq d\leq \ln c+1$이다. 조건 (2)에 의해 $k'(x)=\frac{f'(x)(e^{f(x)}-c-f(x))}{(c+f(x))e^{f(x)}}\geq 0$이다. $0\leq d\leq \ln c+1$으로부터 $c\geq\frac{1}{e}$이므로 $x\geq\frac{19}{10}$에 대해 $f(x)+c>0$이다. 그래서 $k'(x)\geq 0$와 $F(x)=e^{f(x)}-c-f(x)\geq 0$ 동치이고, $F(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 $F(2)=1-c\geq 0$와도 동치이다. 즉, $c\leq 1$이다. 따라서 구하고자 하는 영역의 넓이는 $\int_{\frac{1}{e}}^{1}(\ln x+1)dx=\frac{1}{e}$이다.