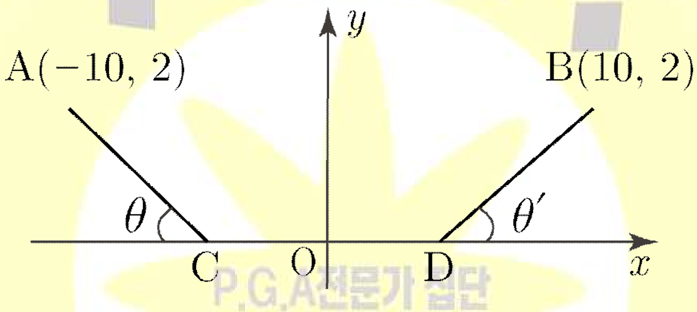
서울대학교 일반전형(자연)

문제 1.

[1-1] 좌표평면 위의 두 점 A와 B의 좌표는 각각 $(-10, 2)$, $(10, 2)$이며, 점 C와 점 D는 x축 위를 움직이고 있다. $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$가 최소가 되게 하는 점 C와 점 D의 좌표를 구하시오.

[1-2] 문제 [1-1]과 같은 상황에서, $0 < k \leq 1$ 인 상수 k에 대하여 점 A에서 출발하여 점 C와 점 D를 거쳐 점 B에 도달했을 때의 비용을 $\overline{\mathrm{AC}}+k\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$라고 하자. 이때 비용이 최소가 되게 하는 점 C와 점 D는 항상 원점에 대하여 대칭임을 설명하시오.



[1-3] 문제 [1-2]와 같은 상황에서, 상수 k를 1부터 줄여나가면 비용이 최소가 되게 하는 점 C와 점 D는 처음에는 움직이지 않다가 어느 순간부터 움직이기 시작한다. 움직이기 시작했을 때의 k의 값을 구하시오.

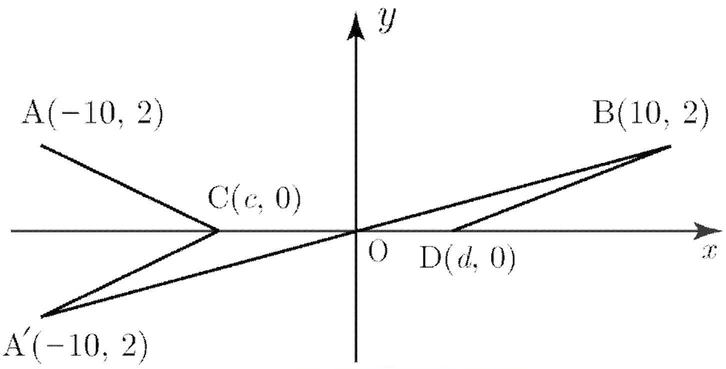
[예시답안]

문제1.

[1-1] $(-10, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

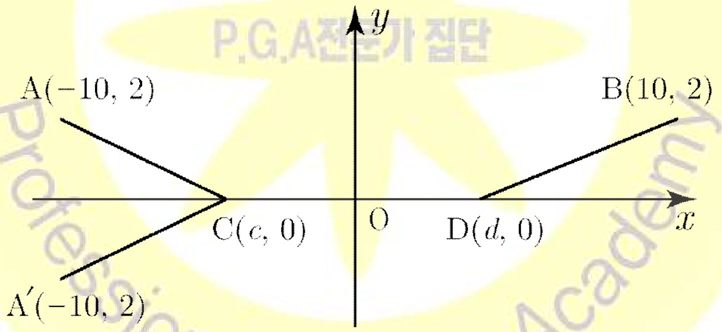
$$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{A'C}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}} \leq \overline{\mathrm{A'B}}$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$가 최소가 되게 하는 점 C와 점 D의 좌표는 모두 $(0, 0)$이다.

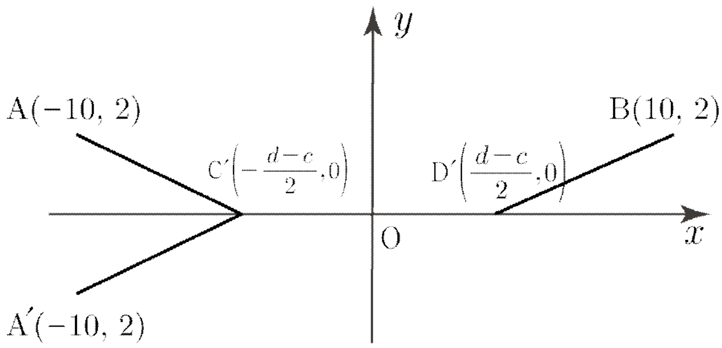


[1-2] $A(-10,\,2),\,B(10,\,2),\,C(c,\,0),\,D(d,\,0)$에서 $c>d$인 경우는 고려하지 않아도 된다는 것은 분명하다. 그러므로 $c\le d$인 경우만 고려하고, 두 점 $C'\left(-\frac{d-c}{2},\,0\right)$, $D'\left(\frac{d-c}{2},\,0\right)$에 대하여 $\overline{AC}+k\overline{CD}+\overline{DB}$와 $\overline{AC'}+k\overline{C'D'}+\overline{D'B}$를 비교하자.

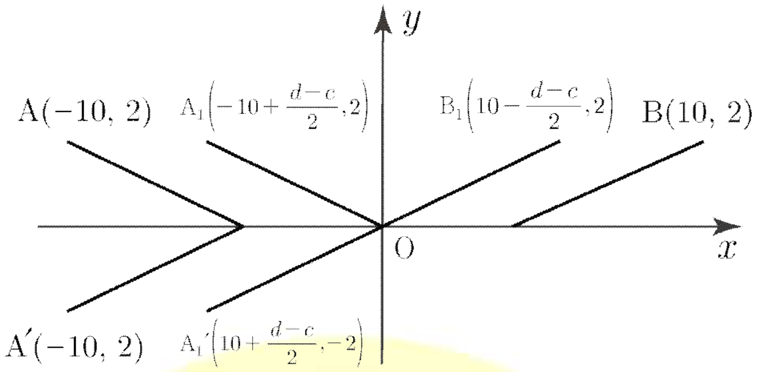
$\overline{CD}=d=c=\overline{C'D'}$이므로 $\overline{AC}+\overline{DB}$와 $\overline{AC'}+\overline{D'B}$만 비교하면 된다. 그런데 점 C와 점 D에 상관없이 $\overline{AC}+\overline{DB}\ge\overline{AC'}+\overline{D'B}$이다(그림들 참조), 따라서 비용 $\overline{AC}+k\overline{CD}+\overline{DB}$를 최소가 되게 하는 점 C와 점 D는 항상 원점에 대하여 대칭이다.



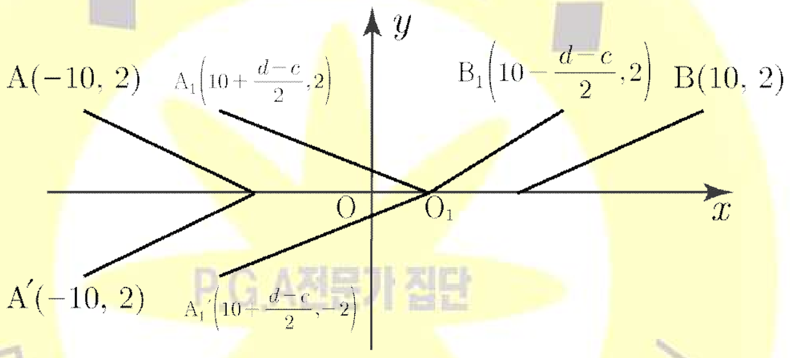
[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]



[그림 4]

[다른풀이]

$A(-10, 2), B(10, 2), C(c, 0), D(d, 0)$라 하자. 비용 $\overline{AC}+k\overline{CD}+\overline{DB}$가 최소가 되기 위해서는 $c \le d$임은 자명하다.

$d-c=l$이라 할 때, 점 $A'(-10+l, -2)$에 대하여

$$\overline{AC}+k\overline{CD}+\overline{DB}=\overline{AC}+\overline{DB}+kl=\overline{A'D}+\overline{DB}+kl$$

이고, $\overline{A'D}+\overline{DB}$가 최소가 되기 위해서 점 D는 직선 $A'B$가 x축과 만나는 점이므로 두 점 A'와 B의 중점일 때이다.

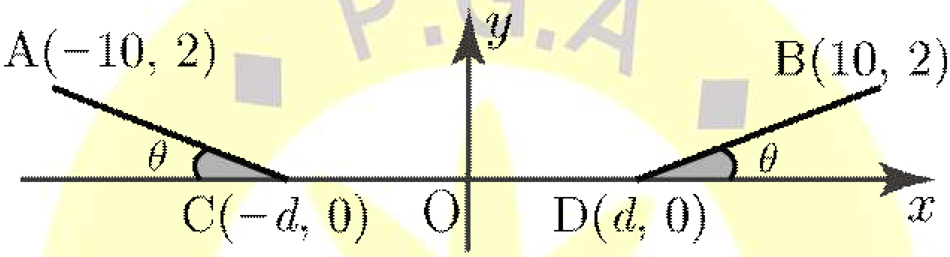
그러므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$이고 점 C의 좌표는 $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$이다. 따라서 점 C와 점 D는 항상 원점에 대하여 대칭이다.

[1-3] [1-2]에 의해서 비용 $\overline{AC}+k\overline{CD}+\overline{DB}$를 최소가 되게 하는 점 C와 점 D는 항상 원점에 대하여 대칭이고 점 D의 x좌표 d는 $d \ge 0$이어야 한다. 직선 BD와 x축이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 그러면

$f_k(\theta)=\overline{\mathrm{AC}}+k\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}=2\left\{\dfrac{2}{\sin\theta}+k\left(10-\dfrac{2}{\tan\theta}\right)\right\}=4\left(\dfrac{1}{\sin\theta}+5k-\dfrac{k}{\tan\theta}\right)$,

$f_k{}'(\theta)=4\left(-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{k\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\right)=4\left(-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{k}{\sin^2\theta}\right)$

이다. 여기서 $0<k\le 1$이므로 $\cos\theta_0=k\left(0\le\theta_0\le\dfrac{\pi}{2}\right)$인 θ_0가 존재한다. 또한, $k=1$이면 $f_k{}'(\theta)\ge 0$이고 $0<k<1$이면 $\theta<\theta_0$일 때 $f_k{}'(\theta)<0$이고 $\theta>\theta_0$일 때 $f_k{}'(\theta)>0$이다. 따라서 $\theta=\theta_0$일 때 $f_k(\theta)$가 최솟값을 가진다. 그런데 $d\ge 0$이어야 하므로 $\cos\theta\ge\dfrac{10}{\sqrt{104}}=\dfrac{10}{2\sqrt{26}}=\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$이어야 한다. 따라서 $k=\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$인 순간부터 점 C와 점 D는 움직이기 시작한다.



문제 2. 좌표평면 위에 다음과 같은 영역 S, T가 있다.

$S=\{(x,y)\,|\,y>x^2\}$

$T=\{(x,y)\,|\,0<|y|<|x|\}$

그리고 주어진 점 (x,y)에 대하여 다음 시행 (P)와 시행 (Q)를 생각해 보자.

시행 (P): (i) 0이 아닌 정수 m을 하나 선택한다.

(ii) (x,y)를 $(x^2+2my,\ y)$로 바꾼다.

시행 (Q): (i) 0이 아닌 정수 n을 하나 선택한다.

(ii) (x,y)를 $(\sqrt{|x|},\ y+2nx)$로 바꾼다.

[2-1] 영역 S에 속하는 점 (x,y)에 대하여 시행 (P)를 행하여 얻어지는 점은 항상 영역 T에 속하게 됨을 보이시오.

[2-2] 점 (x,y)에서 시작하여 시행 (Q)와 시행 (P)를 번갈아 가면서 적용하되 반드시 첫 번째 시행은 (Q)이도록 한다. 만약 한 번 이상의 시행 이후 다시 시작점 (x,y)로 돌아올 수 있으면 점 (x,y)를 '되돌이점'이라고 부르자.

예 1: 점 $(0, 0)$은 되돌이점이다.
$(0, 0) \rightarrow (0, 0)$ $(n = 1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다.)

예 2: 점 $(1, 2)$는 되돌이점이다.
$(1, 2) \rightarrow (1, 0)$ $(n = -1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다.)
$\rightarrow (1, 0)$ $(m = 1$을 선택하여 시행 (P)를 행한다.)
$\rightarrow (1, 2)$ $(n = 1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다.)

점 $(1, 0)$은 되돌이점인지 판정하고, 그 이유를 설명하시오.

[예시답안]

[2-1] 임의의 점 (x, y)가 영역 S에 속한다고 하자. 그러면 $|y| > x^2$이고, 시행 (P)를 행하면 $(x^2 + 2my, y)$로 바뀌며, 여기서 m은 0이 아닌 정수이다. 그러므로 $|y| > x^2 \geq 0$이라서 $|y| > 0$이다. 또한, 삼각부등식, $x^2 \geq 0, |y| > x^2$, $|2my| = |2m||y|, |m| \geq 1$등을 이용하면, 다음과 같이

$$\begin{aligned} |x^2 + 2my| &\geq |2my| - |x^2| = |2my| - x^2 \\ &> |2my| - |y| = (|2m| - 1)|y| \\ &\geq |y| \end{aligned}$$

$|x^2 + 2my| > |y|$를 이끌어 낼 수 있다. 따라서 점 $(x^2 + 2my, y)$는 영역 T에 속한다.

[2-2] 우선 $[2-1]$과 같은 방법으로, 영역 T에 속하는 점 (x, y)에 대하여 시행 (Q)를 행하여 얻어지는 점은 항상 영역 S에 속하게 됨을 보이자.
임의의 점 (x, y)가 영역 T에 속한다고 하자. 그러면 $0 < |y| < |x|$이고, 시행 (Q)를 행하면 $(\sqrt{|x|}, y + 2nx)$로 바뀌며, 여기서 n은 0이 아닌 정수이다. 그러므로

$$\begin{aligned} |y + 2nx| &\geq |2nx| - |y| \\ &> |2nx| - |x| \\ &= (|2m| - 1)|x| \\ &\geq |x| \\ &= (\sqrt{|x|})^2 \end{aligned}$$

즉, $|y + 2nx| > (\sqrt{|x|})^2$이다. 따라서 점 $(\sqrt{|x|}, y + 2nx)$는 영역 S에 속한다.
한편, 점 $(1, 0)$은 시행 (Q)에 의해서 점 $(1, 2n)$으로 옮겨지고, 2-1에 의해서 점 $(1, 2n)$은 영역 S에 속하므로 시행 (P)를 행하여 얻어지는 점 $(1 + 4mn, 2n)$은 영역 T에 속한다. 단, 여기서 n, m은 0이 아닌 정수이다. 다시 위의 결과에 의해서 $(1 + 4mn, 2n)$은 시행 (Q)에

의해서 영역 S에 속하는 점으로 이동한다. 이렇게 2-1과 위의 결과를 번갈아 적용하면, 점 $(1,\,2n)$은 시행 (P)에 의해서 영역 T에 속하는 점으로 이동했다가 다시 시행 (Q)에 의해서 영역 S에 속하는 점으로 이동하는 것을 반복한다. 따라서 시행이 행해질 때마다 얻어지는 점은 영역 S 또는 영역 T에 속한다. 그런데, $(1,\,2n) \neq (1,\,0)$이고 점 $(1,\,0)$은 영역 S와 영역 T 어디에도 속하지 않는다. 따라서 점 $(1,\,0)$은 되돌이점이 아니다.

문제 3.

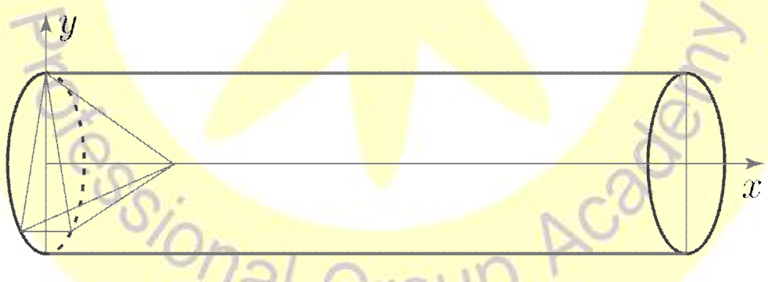
[3-1] 좌표공간에서 xy평면 위의 영역 $S=\{(x,\,y,\,0)|0 \le x \le 10,\,0 \le y \le 1\}$을 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 입체도형을 U라 하자. 입체 U에 포함된 정사면체 중 그 한 면이 yz 평면에 있는 경우, 정사면체의 한 변의 길이가 가질 수 있는 최댓값을 구하시오.

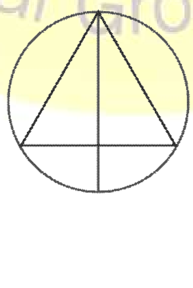
[3-2] 좌표공간에서 xy평면 위의 영역 $S=\{(x,\,y,\,0)|0 \le x \le 2\pi,\,0 \le y \le 2+\cos x\}$을 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 입체도형을 V라 하자. 입체 V에 포함된 정사면체 중 그 한 면이 yz평면에 있는 경우, 정사면체의 한 변의 길이가 가질 수 있는 최댓값을 구하시오.

[예시답안]

[3-1]

입체도형 U는 반지름의 길이가 1인 원을 밑면으로 하고 높이가 10인 원기둥이다. 그러므로 한 면이 yz평면에 있으면서 입체 U에 포함된 정사면체가 최대 크기가 되기 위해서는 정사면체의 밑면이 원기둥의 밑면에 내접해야 한다. 이때 원기둥의 밑면인 원의 중심이 정사면체의 한 면인 정삼각형의 무게중심이므로 구하고자 하는 정사면체의 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$이다.





[3-2]

입체 V에 포함된 정사면체 중 그 한 면이 yz 평면에 있고 크기가 가장 큰 사면체를 정사면체 ABCD라고 하자. 여기서 일반성을 잃지 않고, 정삼각형 ABC가 yz 평면에 있고 선분 AD가 xy 평면에 있다고 할 수 있다. 그러면 입체도형 V가 영역 S를 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 입체도형이고, 정삼각형 ABC의 무게중심이 입체도형 V의 밑면인 원의 중심 원점

O와 일치해야 하며, 점 D가 정삼각형 ABC의 각 꼭짓점에서 같은 거리에 있어야 하므로 점 D는 x축 상에 위치해야 한다. 또한 직선 AD는 xy평면 상에서 $y=2+\cos x$와 접해야 한다. 정사면체 ABCD의 한 변의 길이를 a, 선분 BC의 중점을 M이라 두면

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\ \overline{\mathrm{AO}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\ \overline{\mathrm{DO}}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

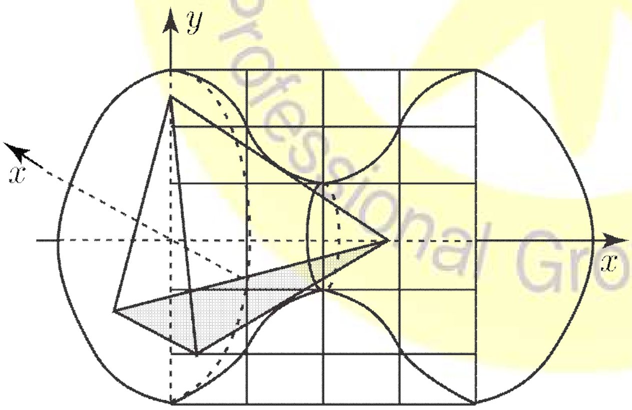
이다. 이제 xy평면 상에서 고려하면, 직선 AD의 기울기는 $-\dfrac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{DO}}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

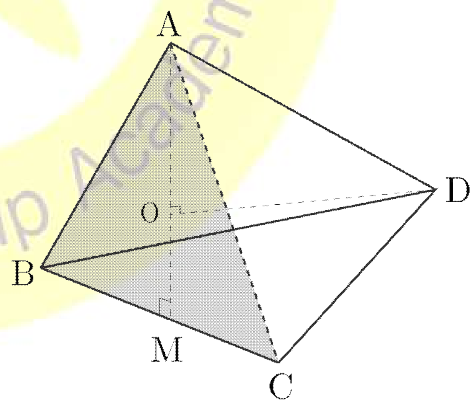
또한, 곡선 $y=2+\cos x$는 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때 위로 볼록이고, $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$에서 아래로 볼록이며 $y'=-\sin x$이다. 그러므로 직선 AD와 곡선 $y=2+\cos x$의 접점은 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다. 따라서 직선 AD의 방정식은 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{3}{4}\pi\right)+2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고 직선 AD의 x절편은 $2\sqrt{2}-1+\dfrac{3}{4}\pi$이다. 그러므로 정사면체 ABCD에서

$$2\sqrt{2}-1+\frac{3}{4}\pi=\overline{\mathrm{DO}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

$$a=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{6}}{8}\pi$$

이다. 따라서 구하고자 하는 값은 $2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{3\sqrt{6}}{8}\pi$이다.





문제 4. 자연수 n에 대하여 좌표공간 위에 평면 $P_n : x+y+2z=2n$이 주어져 있다.

[4-1] 평면 P_n과 평면 $x-y-2z=0$이 이루는 교선을 l_1, 평면 P_n과 평면 $y-x-2z=0$이 이루는 교선을 l_2, 평면 P_n과 xz평면이 이루는 교선을 l_3, 평면 P_n과 yz평면이 이루는 교선을 l_4라 하자. 이때 4개의 교선 l_1, l_2, l_3, l_4로 이루어진 사각형의 넓이 A_n의 값을 구하시오.

[4-2] 문제 [4-1]의 상황에서 4개의 교선 l_1, l_2, l_3, l_4로 이루어진 사각형의 내부(경계포함)에 있는 점들 중 각 좌표가 모두 정수인 점의 개수 S_n을 구하시오.

[4-3] 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{A_n}$을 구하시오.

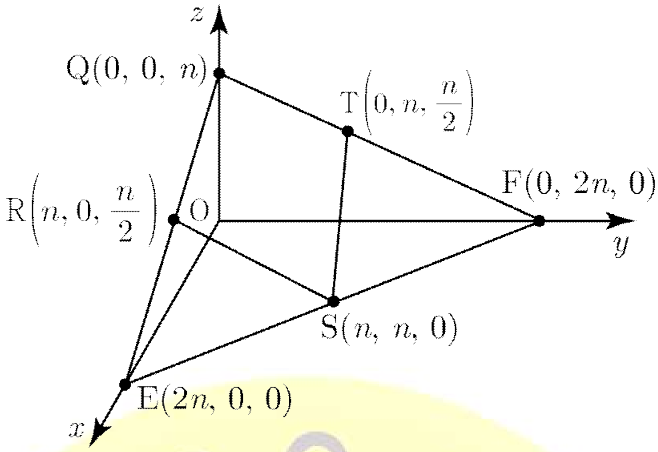
[예시답안]

[4-1]

평면 P_n은 세 점 $\mathrm{E}(2n, 0, 0)$, $\mathrm{F}(0, 2n, 0)$, $\mathrm{Q}(0, 0, n)$을 지나는 평면이다.

$P_n : x+y+2z=2n$과 평면 $x-y-2z=0$의 교선을 구하기 위해서 두 식 $x+y+2z=2n$과 $x-y-2z=0$에 $y=0$을 대입하여 연립방정식을 풀면 $x=n,\ z=\frac{n}{2}$이다. 또한, $z=0$을 대입하여 연립방정식을 풀면 $x=n,\ y=n$이다. 그러므로 교선 l_1은 두 점 $\mathrm{R}\left(n, 0, \frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{S}(n, n, 0)$을 지나는 직선이다.

마찬가지 방법으로, 교선 l_2는 두 점 $\mathrm{T}\left(0, n, \frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{S}(n, n, 0)$을 지나는 직선, 교선 l_3는 두 점 $\mathrm{R}\left(n, 0, \frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{Q}(0, 0, n)$을 지나는 직선, 교선 l_4는 두 점 $\mathrm{T}\left(0, n, \frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{Q}(0, 0, n)$을 지나는 직선임을 알 수 있다.

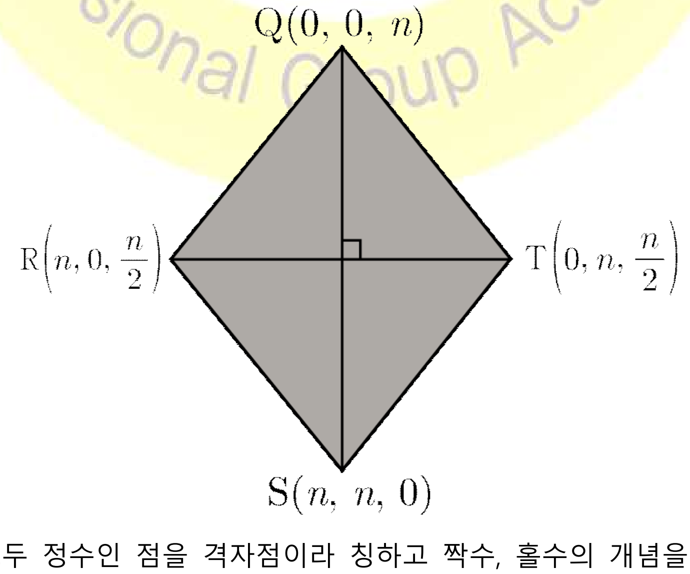


한편, $\overrightarrow{\mathrm{QS}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{RT}} = (n,\ n,\ -n) \cdot (-n,\ n,\ 0) = 0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{QS}},\ \overrightarrow{\mathrm{RT}}$는 서로 수직이다. 따라서 교선 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$로 이루어진 사각형의 넓이 A_n의 값은

$$A_n = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QS}}||\overrightarrow{\mathrm{RT}}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}n \cdot \sqrt{2}n = \frac{\sqrt{6}}{2}n^2$$

이다.

[4-2] 4개의 교선 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$로 이루어진 사각형 QRST에서 선분 RT의 중점과 선분 QS의 중점이 $\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{2}\right)$으로 일치하고 $\overrightarrow{\mathrm{QS}},\ \overrightarrow{\mathrm{RT}}$는 서로 수직이므로 사각형 QRST는 마름모이다.



이제, 각 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 칭하고 짝수, 홀수의 개념을 정수로 확장하여 $2a+1$(a는 정수) 형태의 정수를 홀수, $2a$(a는 정수) 형태의 정수를 짝수라 칭하자. 그러면

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(0,\ n,\ -\frac{n}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(-n,\ 0,\ \frac{n}{2}\right)$이고

$$\left(n,\ 0,\ \frac{n}{2}\right)+\left(0,\ k,\ -\frac{k}{2}\right)+\left(-l,\ 0,\ \frac{l}{2}\right)=\left(n-l,\ k,\ \frac{n}{2}-\frac{k}{2}+\frac{l}{2}\right)$$

이므로 사각형 QRST의 내부와 경계에 있는 격자점은

$\left(n-l,\ k,\ \frac{n}{2}-\frac{k}{2}+\frac{l}{2}\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n;l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n;n-k+l$은 짝수$)$

의 형태이다. 따라서

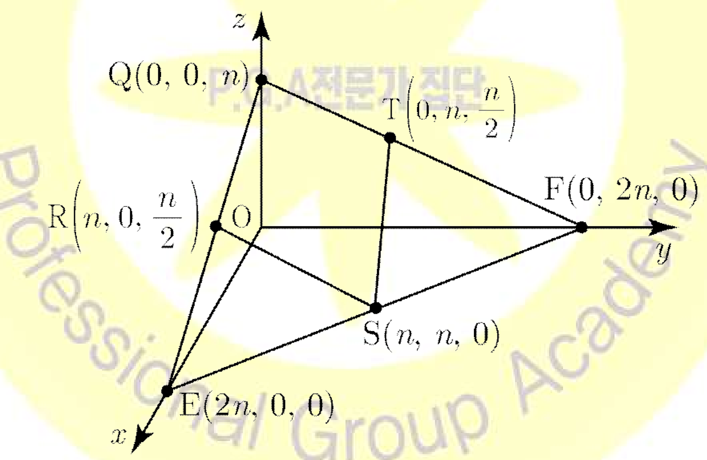
i) n이 짝수일 때

$$S_n=\left(\frac{n}{2}+1\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{1}{2}n^2+n+1.$$

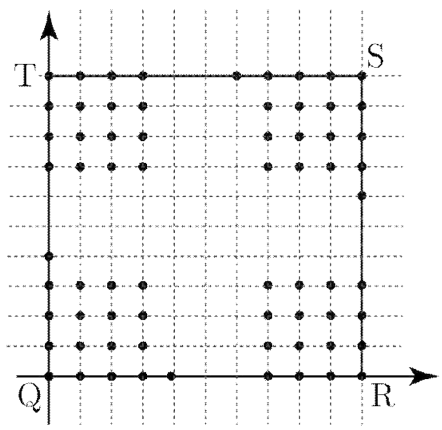
ii) n이 홀수일 때

$$S_n=2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n+1)^2}{2}.$$

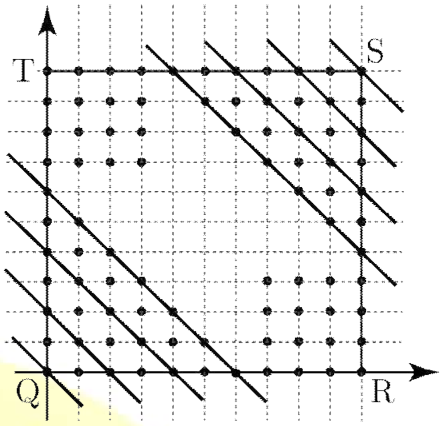
[다른풀이]



4개의 교선 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$로 이루어진 사각형 QRST와 xy평면으로 정사영 $\mathrm{Q'R'ST'}$를 생각해 보자. $\mathrm{Q'}=(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{R'}=(n,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{T'}(0,\ n,\ 0)$이고, 사각형 QRST의 내부(경계 포함)에 있는 점들 중 각 좌표가 모두 정수인 점을 정사영시키면 사각형 $\mathrm{Q'R'ST'}$의 내부(경계 포함)에 있으면서 각 좌표가 모두 정수인 점이 된다.



이제 사각형 QRST는 정사각형 Q′R′ST′에서 점 Q′를 n만큼, 두 점 R′, T′를 $\frac{n}{2}$만큼 z축의 양의 방향으로 평행이동한 것과 같다. 따라서 옆의 그림과 같이 n개의 직선 위에 있는 점만 z좌표가 정수가 된다.



1) n이 홀수인 경우

$$S_n = 1+3+\cdots+n+n+\cdots+3+1$$
$$= (n+1)\times\frac{n+1}{4}\times 2$$
$$= \frac{(n+1)^2}{2}$$

2) n이 짝수인 경우

$$S_n = 1+3+\cdots+(n-1)+(n+1)+(n-1)+\cdots+3+1$$
$$= n\times\frac{n}{4}\times 2+(n+1)$$
$$= \frac{n^2}{2}+n+1$$

[4-3] 각각 [4-1]과 [4-2]에 의해서

$$A_n = \frac{\sqrt{6}}{2}n^2,\ S_n = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2+n+1 & (n\text{이 짝수일 때}) \\ \frac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수일 때}) \end{cases}$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{A_n}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$이다.