서울대학교 면접 (수시)

[수학A(인문)_오전]

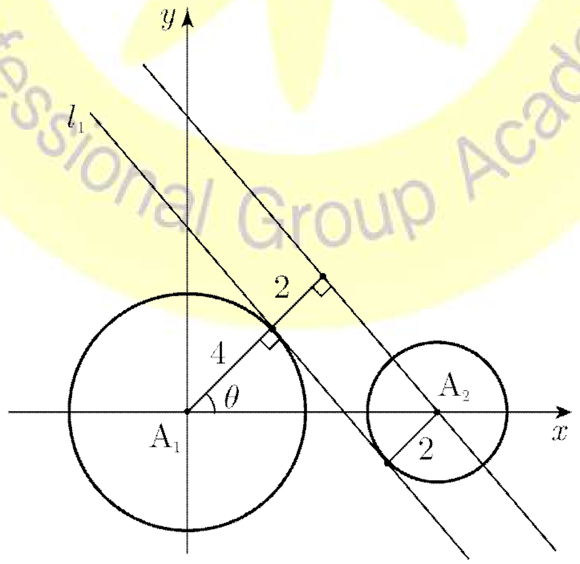
문제1. 자연수 n에 대하여 다음의 조건을 만족하는 원 A_n을 생각해 보자.
(i) A_1의 중심은 $(0, 0)$이고 반지름은 4이다.
(ii) A_n의 중심은 $\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{15}{2^i}, 0\right)$이고 반지름은 $\frac{8}{2^n}$이다. (단, $n \geq 2$)
두 원 A_n, A_{n+1}과 각각 만나면서 y절편이 최대가 되는 직선을 l_n이라 하자.

1-1. 직선 l_1의 방정식을 구하시오.

1-2. 직선 l_n의 y절편을 a_n이라 할 때, 극한 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

[예시답안]

[1-1]



두 원 A_1, A_2의 중심이 각각 $(0, 0)$, $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$이고 반지름이 $r_1 = 4$, $r_2 = 2$이며 직선 l_1은

공통내접선 중 y절편인 양수의 직선이다. 위의 그림에서 $\cos\theta = \dfrac{6}{\dfrac{15}{2}} = \dfrac{4}{5}$이므로

$\tan\theta = \dfrac{3}{4}$이고, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \dfrac{4}{3}$이다. 그러므로 직선 l_1의 방정식은

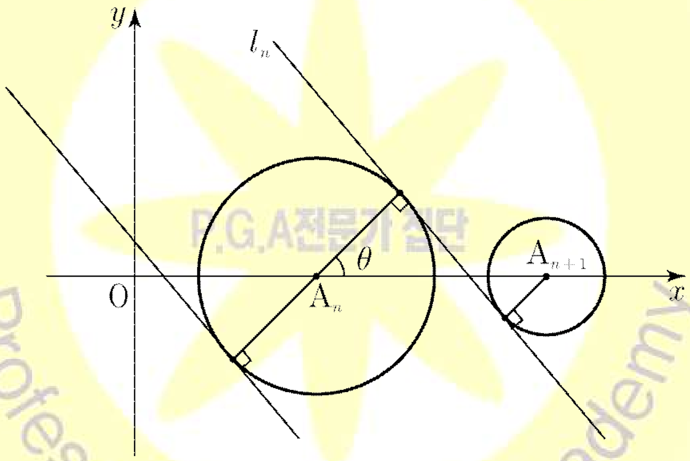
$y = -\dfrac{4}{3}x + b,\ 4x+3y-3b=0 \quad (b>0,\ b$는 상수)

로 둘 수 있고 직선 l_1이 원 A_1의 접선이므로 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 l_1에 이르는 거리는 $4(=r_1)$이다. 따라서

$$\frac{|-3b|}{5} = 4,\ b = \frac{20}{3}$$

이고 직선 l_1의 방정식은 $4x+3y-20=0$이다.

[1-2]



$n \geq 2$라고 하자. 그러면, 두 원 $\mathrm{A}_n,\ \mathrm{A}_{n+1}$의 중심이 각각 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{15}{2^i},\ 0\right),\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{15}{2^i},\ 0\right)$이고 반지름은 $r_n = \dfrac{8}{2^n},\ r_{n+1} = \dfrac{8}{2^{n+1}}$이며 직선 l_n은 공통내접선 중 y절편이 큰 직선이다. 한편, 중심간의 거리 d는 $d = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{15}{2^i} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{15}{2^i} = \frac{15}{2^n}$이고 반지름의 합은 $r_n + r_{n+1} = \dfrac{8}{2^n} + \dfrac{8}{2^{n+1}} = \dfrac{12}{2^n}$이다. 또한, $\cos\theta = \dfrac{r_n + r_{n+1}}{d} = \dfrac{\dfrac{12}{2^n}}{\dfrac{15}{2^n}} = \dfrac{4}{5}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이라고 두면, $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$이므로 l_n의 기울기는 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta} = -\dfrac{4}{3}$이다.

그러므로 직선 l_n의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}x + a_n,\ 4x+3y-3a_n = 0$$

이고 직선 l_n이 원 A_n의 접선이므로 점 $\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{15}{2^i},\ 0\right)$에서 직선 l_n에 이르는 거리는

$\frac{8}{2^n}\,(=r_n)$이다. 따라서

$$\frac{\left|4\sum_{i=1}^{n-1}\frac{15}{2^i}-3a_n\right|}{5}=\frac{8}{2^n},$$

$$4\sum_{i=1}^{n-1}\frac{15}{2^i}-3a_n = \frac{40}{2^n}\ \text{또는}\ 4\sum_{i=1}^{n-1}\frac{15}{2^i}-3a_n = -\frac{40}{2^n},$$

$$60\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-3a_n = \frac{40}{2^n}\ \text{또는}\ 60\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-3a_n = -\frac{40}{2^n},$$

$$a_n = \frac{1}{3}\left(60-\frac{80}{2^{n-1}}\right)\ \text{또는}\ a_n = \frac{1}{3}\left(60-\frac{40}{2^{n-1}}\right)$$

이다. 이 중에서 큰 값이므로 $a_n = \frac{1}{3}\left(60-\frac{40}{2^{n-1}}\right)$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n = 20$이다.

[수학B(인문, 자연)_오전]

문제 2. 실수 $a<b$에 대하여 닫힌구간 $[a,\,b]$가 주어졌을 때, 함수 $y=f_{[a,\,b]}(x)$를 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의하자.

$$f_{[a,\,b]}(x)=\begin{cases} a+b-x & (x\in[a,\,b]) \\ x & (x\notin[a,\,b]) \end{cases}$$

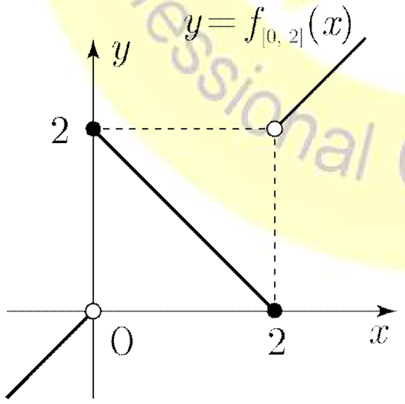
2-1. 합성함수 $y=(f_{[0,\,2]}\circ f_{[1,\,3]})(x)$는 $x=1,\,2$에서 연속인지 아닌지 설명하시오.

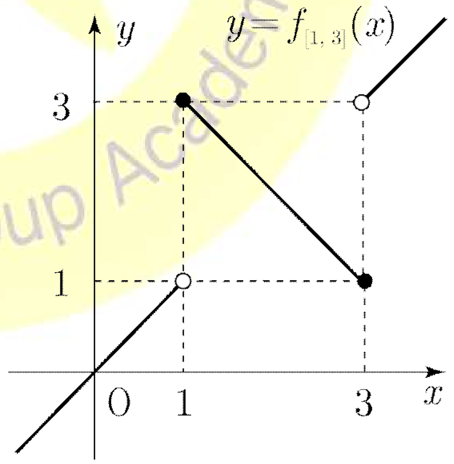
2-2. 모든 실수 x에 대하여

$$(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,b]})(x)=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)$$

가 성립하도록 하는 점 $\mathrm{P}(a,\,b)$를 모두 구하시오.
(단, 실수 $a,\,b$의 범위는 $0\le a<b\le 1$이다.)

[예시답안]
[2-1]
(예시답안1) 두 함수 $y=f_{[0,\,2]}(x)$와 $y=f_{[1,\,3]}(x)$의 그래프는 다음과 같다.





위의 그래프를 이용하여 $x=1$과 $x=2$에서의 연속성을 조사하면
(i) $x=1$에서의 연속성

$$\lim_{x\to 1-} f_{[0,\,2]}(f_{[1,\,3]}(x))=\lim_{t\to 1-} f_{[0,\,2]}(t)=1$$

$$\lim_{x\to 1+} f_{[0,\,2]}(f_{[1,\,3]}(x))=\lim_{t\to 3-} f_{[0,\,2]}(t)=3$$

에서 $\lim_{x \to 1-} f_{[0,\,2]}(f_{[1,\,3]}(x)) \neq \lim_{x \to 1+} f_{[0,\,2]}(f_{[1,\,3]}(x))$이므로

함수 $y = (f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,3]})(x)$는 $x = 1$에서 불연속이다.

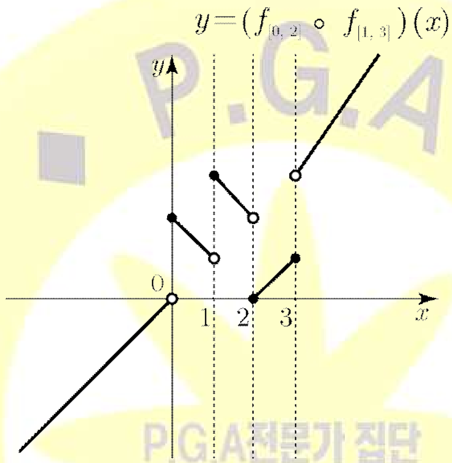
(ii) $x = 2$에서의 연속성

$$\lim_{x \to 2-} f_{[0,\,2]}(f_{[1,\,3]}(x)) = \lim_{t \to 2+} f_{[0,\,2]}(t) = 2$$

$$\lim_{x \to 2+} f_{[0,\,2]}(f_{[1,\,3]}(x)) = \lim_{t \to 2-} f_{[0,\,2]}(t) = 0$$

에서 $\lim_{x \to 2-} f_{[0,\,2]}(f_{[1,\,3]}(x)) \neq \lim_{x \to 2+} f_{[0,\,2]}(f_{[1,\,3]}(x))$이므로

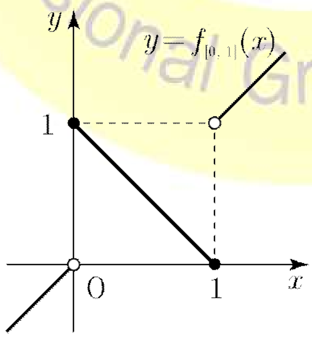
함수 $y = (f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,3]})(x)$는 $x = 2$에서 불연속이다.

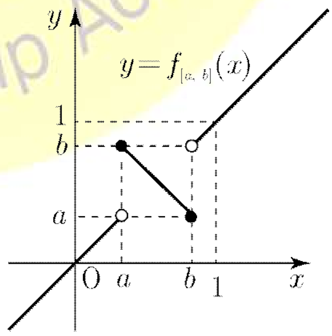


[2-2]

(예시답안1)

두 함수 $y = f_{[0.\,1]}(x)$와 $y = f_{[a,\,b]}(x)$의 그래프는 다음과 같다.





실수 전체의 구간을 다음과 같이 나누어 생각하자.

(i) $x < 0$ 또는 $x > 1$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x) = f_{[a,\,b]}(x) = x$이고

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x) = x$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립한다.

(ii) $0 \le x < a$ 또는 $b < x \le 1$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x) = -x+1$, $f_{[a,\,b]}(x) = x$이고

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x) = -x+1$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립한다.

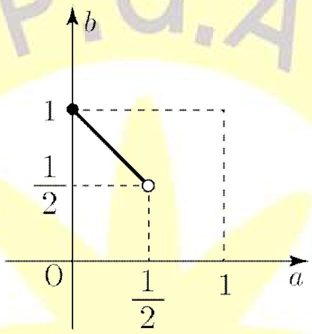
(iii) $a \le x \le b$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x) = -x+1$, $f_{[a,\,b]}(x) = a+b-x$이고

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = x-a-b+1$$

$$(f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x) = x-1+a+b$$

이다. 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립하기 위한 조건은 $a+b=1$이다.

그러므로 문제의 조건 $0 \le a < b \le 1$에서 성립하는 점 $\mathrm{P}(a,\,b)$는 $0 \le a < \frac{1}{2}$이고 $a+b=1$을 만족하므로 집합 $\left\{(a,\,b)\,\middle|\,a+b=1,\,0 \le a < \frac{1}{2}\right\}$의 원소이다.

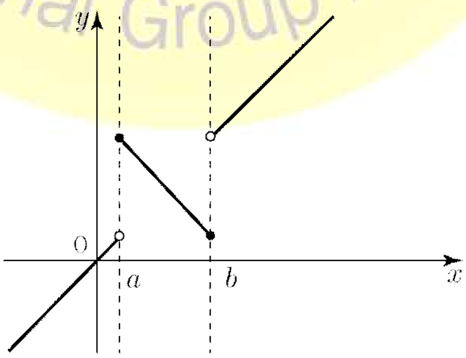


(예시답안2)

함수

$$f_{[a,\,b]}(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a,\,b]) \\ x & (x \notin [a,\,b]) \end{cases}$$

의 그래프의 개형은 아래와 같고 $f^{-1}_{[a,\,b]} = f_{[a,\,b]}$이다. 즉, $f_{[a,\,b]}(x)$는 $y=x$에 대칭인 함수이다.



그러므로 $(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})^{-1} = f^{-1}_{[a,\,b]} \circ f^{-1}_{[0,\,1]} = f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]}$이다. 따라서

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$$

가 성립하기 위한 필요충분조건은

$$((f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})\circ(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]}))(x)=x$$

이다. 즉, 함수 $y=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)$가 $y=x$에 대하여 대칭이 된다는 것이다.

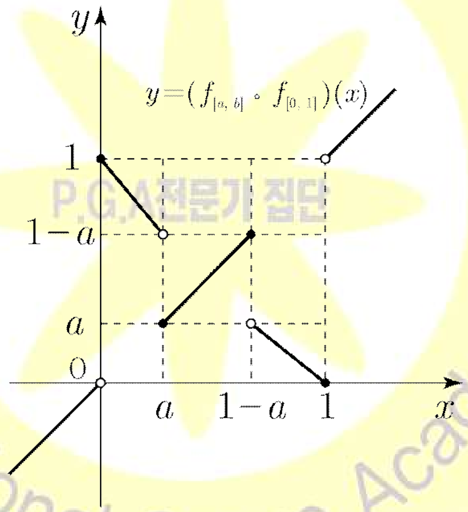
한편,

$$(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)=\begin{cases}a+b-1+x & (x\in[1-b,\,1-a]) \\ 1-x & (x\in[0,\,1-b]\cup(1-a,\,1]) \\ x & (x\notin[0,\,1])\end{cases}$$

이므로 $y=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)$가 $y=x$에 대하여 대칭이 되기 위해서는 $a+b-1+x=x$, 즉 $a+b=1$이어야 한다. 더 나아가 $a+b=1$이면 $0\le a<b\le 1$로부터 $0\le a<\dfrac{1}{2}$을 얻을 수 있다. 또한 $a+b=1$이면

$$(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)=\begin{cases}x & (x\in[a,\,1-a]) \\ 1-x & (x\in[0,\,a)\cup(1-a,\,1]) \\ x & (x\notin[0,\,1])\end{cases}$$

이므로 $y=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)$가 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 구하고자 하는 모든 점 $\mathrm{P}(a,\,b)$의 집합은 $\left\{(a,\,b)\,\middle|\,a+b=1,\ 0\le a<\dfrac{1}{2}\right\}$이다.



[수학C(인문)_오후]

문제 1. 곡선 C와 직선 l이 점 A에서 만나고, 점 A에서의 곡선 C에 대한 접선이 직선 l과 수직일 때 C와 l이 점 A에서 수직으로 만난다고 한다. 곡선 $y=x^3$을 T라고 하자.

1-1. 좌표평면 위의 한 점 (a, b)를 지나는 직선 l이 점 $\mathrm{P}(t, t^3)$에서 곡선 T와 수직으로 만날 때, a, b, t 사이의 관계식을 t에 대한 다항식으로 구하시오. 또한, 곡선 T와 직선 l이 수직으로 만날 수 있는 점은 많아야 하나임을 설명하시오. (단, t는 0이 아닌 실수)

1-2. 점 (a, b)가 제 4사분면에 속할 때, 점 (a, b)를 지나고 제 1사분면 위의 점에서 곡선 T와 수직으로 만나는 직선의 개수를 구하시오.

1-3. 점 $\mathrm{A}(-1, -1)$에서 곡선 T와 수직으로 만나는 직선 l_1과, 점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$를 지나고 T에 접하는 직선 l_2 및 곡선 T로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

1-4. 곡선 T 위의 점 $\mathrm{A}_1(t, t^3)$을 지나 점 A_2(단, $\mathrm{A}_2 \neq \mathrm{A}_1$)에서 곡선 T에 접하는 직선을 l_1이라고 하자. 단, t는 양의 실수이다. 이번에는 점 A_2를 지나 점 A_3(단, $\mathrm{A}_3 \neq \mathrm{A}_2$)에서 곡선 T에 접하는 직선을 l_2라고 하자. 이러한 시행을 반복하여 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots$과 직선 $l_1, l_2, l_3, \cdots$을 얻었을 때, 곡선 T와 접선 l_n으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라고 하자(단, n은 자연수). 이때,

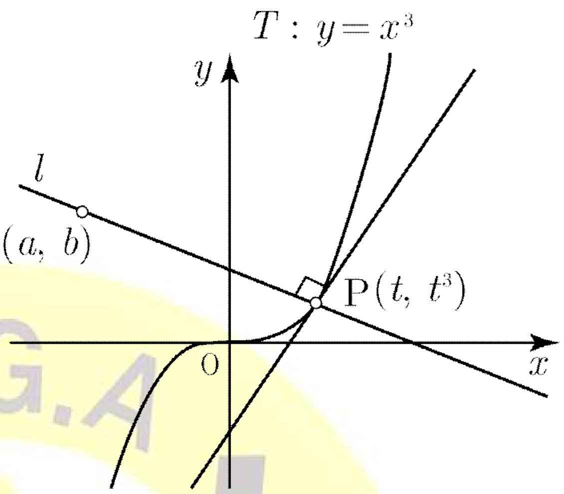
$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 1$$

을 만족하는 t의 값을 구하시오.

[예시답안]

[1-1]

(예시답안1)



$y=x^3$의 도함수가 $y'=3x^2$이므로 만족시키는 직선 l은

$y=-\dfrac{1}{3t^2}(x-t)+t^3,\ y=-\dfrac{1}{3t^2}x+\dfrac{1}{3t}+t^3$

이다. 직선 l이 점 $(a,\,b)$를 지나므로

$b=-\dfrac{1}{3t^2}a+\dfrac{1}{3t}+t^3$

을 만족하고 이를 정리하면

$$3t^5-3bt^2+t-a=0$$

이므로 구하는 다항식은 $3t^5-3bt^2+t-a$이다.

한편 곡선 $y=x^3$과 직선 l이 $(t,\,t^3)$에서 수직으로 만날 때, 곡선 $y=x^3$과 직선 l의 교점의 x좌표는 등식

$$x^3=-\frac{1}{3t^2}x+\frac{1}{3t}+t^3,\ (x-t)\left(x^2+tx+t^2+\frac{1}{3t^2}\right)=0$$

을 만족시킨다. 방정식 $x^2+tx+t^2+\dfrac{1}{3t^2}=0$의 판별식 $D=-3t^2-\dfrac{4}{3t^2}<0$이므로 곡선 T와 직선 l이 수직으로 만날 수 있는 접은 $x=t$일 때뿐이다. 따라서 곡선 T와 직선 l이 수직으로 만날 수 있는 점은 많아야 하나이다.

(예시답안2)

$y'=3x^2$이고 직선 l은 곡선 T와 점 $\mathrm{P}(t,\,t^3)$에서 수직으로 만나므로 직선 l의 방정식은

$$y=-\frac{1}{3t^2}(x-t)+t^3$$

이때, 이 직선이 점 (a,b)를 지나므로

$$b=-\frac{1}{3t^2}(a-t)+t^3,\ 3t^5-3bt^2+t-a=0$$

이다.

이제, 곡선 T와 직선 l이 수직으로 만날 수 있는 점은 많아야 하나임을 보이자.

직선 l이 곡선 T와 수직으로 만나는 서로 다른 두 점을 각각 $\mathrm{P}_1(t_1,\,t_1^3),\ \mathrm{P}_2(t_2,\,t_2^3)$라 가정하자. 그러면 직선 l의 방정식은

$$y=-\frac{1}{3t_1^2}(x-t_1)+t_1^3$$

이면서

$$y=-\frac{1}{3t_2^2}(x-t_2)+t_2^3$$

이어야 한다. 따라서

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3t_1^2} = -\dfrac{1}{3t_2^2} \\ -\dfrac{1}{3t_1} - t_1^3 = -\dfrac{1}{3t_2} - t_2^3 \end{cases}$$

위 식을 정리하면

$$t_1 = -t_2,\ \frac{1}{3t_1} + t_1^3 = \frac{1}{3t_2} + t_2^3$$

이므로 $3{t_2}^4 = -1$이 되어 모순이다.

그러므로 직선 l이 곡선 T와 수직으로 만나는 점 $\mathrm{P}_1(t_1,\ t_1^3)$이 존재하면, 수직으로 만나는 또 다른 점 $\mathrm{P}_2(t_2,\ {t_2}^3)$가 존재할 수가 없다. 따라서 곡선 T와 직선 l이 수직으로 만날 수 있는 점은 많아야 하나이다.

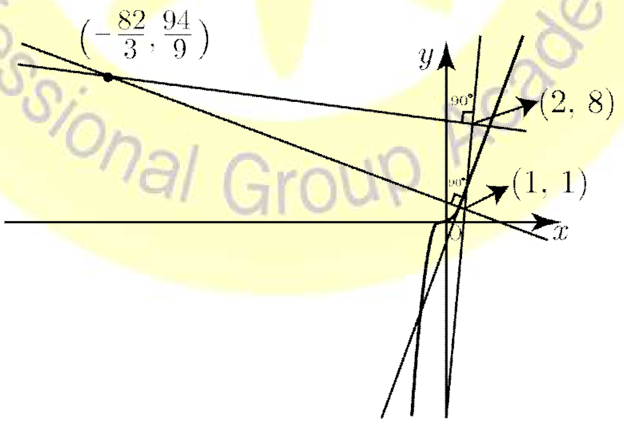
※ 점 $(a,\ b)$를 지나면서 곡선 T와 수직으로 만나는 직선 l을 고려하자. 그리고 $a = -\dfrac{82}{3},\ b = \dfrac{94}{9}$일 때 $g(t) = 3t^5 - 3bt^2 + t - a$라 두면

$$g(1) = 3 - 3b + 1 - a = 3 - \frac{94}{3} + 1 + \frac{82}{3} = 0,$$

$$g(2) = 96 - 12b + 2 - a = 96 - \frac{4\times 94}{3} + 2 + \frac{82}{3} = 98 - \frac{294}{3} = 0$$

이다. 따라서 점 $\left(-\dfrac{82}{3},\ \dfrac{94}{9}\right)$를 지나는 직선 l은 곡선 T와 적어도 두 점 $(1,\ 1),\ (2,\ 8)$에서 수직으로 만난다.

아래 그래프를 통해서도 확인할 수 있다.



이 문제 [1-1]은 점 $(a,\ b)$를 지나는 고정된 직선 l이 곡선 T와 만나는 점은 3개까지 가능하다. 이 만나는 점들에서 수직으로 만날 수도 있고 수직으로 만나지 않을 수도 있는데, 수직으로 만나는 점은 많아야 하나임을 주장하는 것이다. 그래서 문제의 해석을 잘 해야 할 것으로 보인다.

[1-2]

(예시답안1)

제4사분면에 속하는 점 (a, b)를 지나는 직선 l이 곡선 T와 제1사분면 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^3)$에서 수직으로 만난다고 하자. 그러면 $a>0, b<0, t>0$이고 [1-1]에 의해서 $3t^5-3bt^2+t-a=0$이다. $g(t)=3t^5-3bt^2+t-a$라 두면

$g'(t)=15t^4-6bt+1$

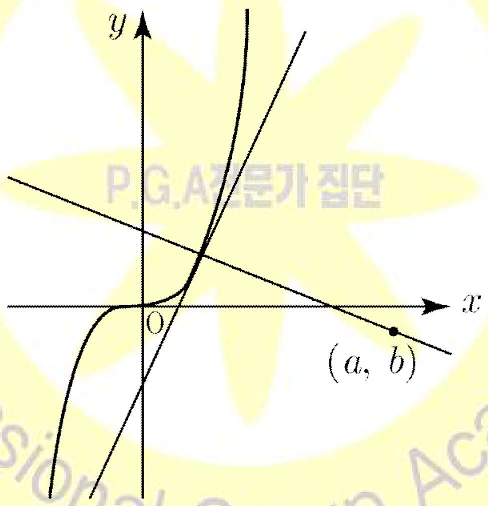
이고 $b<0, t>0$이므로 $g'(t)>0$이다. 그러므로 $t>0$범위에서 $g(t)$는 증가함수이다.

한편,

$g(0)=-a<0,\ g(a)=3a^5-3a^2b+a-a=3a^5-3a^2b>0$

이고 $g(t)=3t^5-3bt^2+t-a$는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $g(t)=0$인 t가 0과 a 사이에 적어도 하나 존재한다. 그런데 $t>0$의 범위에서 $g(t)$는 증가함수이므로 $t>0$의 범위에서 $g(t)=0$인 t는 오직 하나 존재한다.

따라서 구하고자 하는 직선의 개수는 1이다.



(예시답안2)

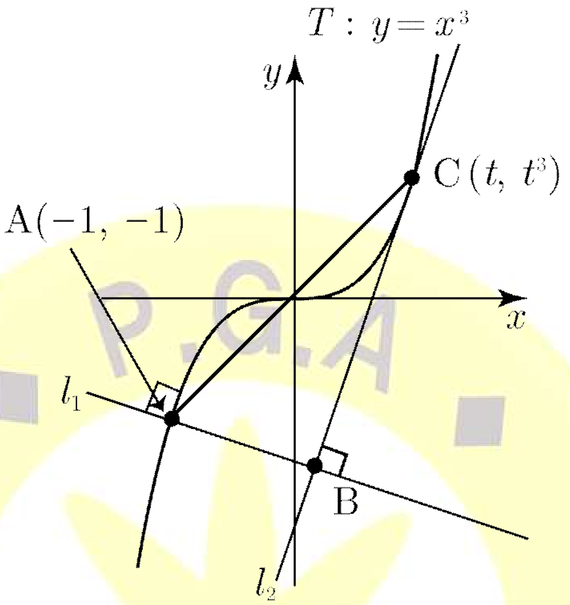
[1-1]의 방정식 $3t^5-3bt^2+t=a(a>0, b<0)$의 근의 개수가 곡선 T와 수직으로 만나는 직선의 개수다.

함수 $f(t)=3t^5-3bt^2+t$에 대하여 $f'(t)=15t^4-6bt+1$이다.

$b<0$에서 $t>0$인 실수 t에 대하여 $f'(t)>0$이므로 함수 $y=f(t)$는 이 구간에서 증가한다.

따라서 함수 $y=f(t)$는 $(0, 0)$을 지나고 $y=a(a>0)$과 만나는 교점은 1개이므로 곡선 T와 수직으로 만나는 직선의 개수는 1이다.

[1-3]
(예시답안1)



[1-1]의 내용에 의해 직선 l_1의 방정식은

$$l_1 : y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

이다. 직선 l_1에 $x = \frac{1}{5}$을 대입하면 $y = -\frac{7}{5}$이므로 직선 l_1은 점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$을 지난다.

점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$을 지나고 곡선 T에 접하는 직선 l_2와 곡선 T의 접점을 $\mathrm{C}(t,\ t^3)$라 하면

$$l_2 : y = 3t^2(x-t) + t^3 = 3t^2x - 2t^3$$

이고 점 B를 직선 l_2에 대입하면

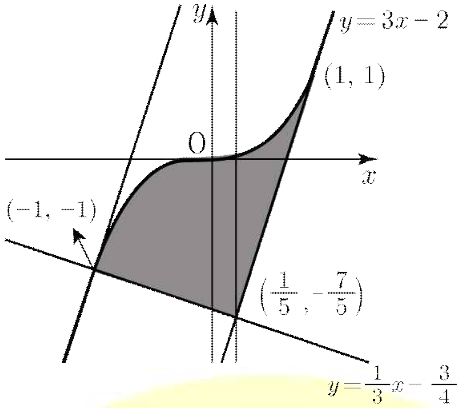
$$-\frac{7}{5} = \frac{3}{5}t^2 - 2t^3,\ (t-1)(10t^2 + 7t + 7) = 0$$

이다. 따라서 만족하는 t의 값이 1이므로 직선 $l_2 : y = 3x - 2$이다.

또한 곡선 T는 원점에 대칭이고 $l_1 \perp l_2$이므로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이와 같다.

$$(\text{넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\sqrt{10} \times \frac{4}{5}\sqrt{10} = \frac{8}{5}$$

※ 정적분을 이용하여 계산하면 다음과 같다.



구하고자 하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{5}}\left(x^3+\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)dx+\int_{\frac{1}{5}}^{1}\left(x^3-3x+2\right)dx$$

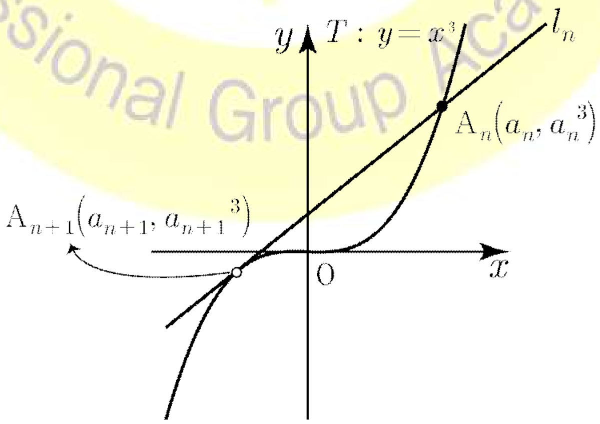
$$=0+\left[\frac{1}{6}x^2+\frac{4}{3}x\right]_{-1}^{\frac{1}{5}}+\left[-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{\frac{1}{5}}^{1}$$

$$=\frac{8}{5}$$

[1-4]

(예시답안1)

점 $\mathrm{A}_n\left(a_n,\ a_n{}^3\right)$을 지나 점 $\mathrm{A}_{n+1}\left(a_{n+1},\ a_{n+1}{}^3\right)$에서 곡선 T에 직선이 l_n이므로 만족하는 직선의 방정식은 $l_n : y=3a_{n+1}{}^2x=2a_{n+1}{}^3$이다.



곡선 T와 직선 l_n의 교점 중 접점이 아닌 점의 x좌표가 a_n이므로

$$a_n{}^3=3a_{n+1}{}^2\cdot a_n-2a_{n+1}{}^3,\ \left(a_n-a_{n+1}\right)^2\left(a_n+2a_{n+1}\right)=0$$

만족하는 식은 $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$이다.

따라서 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = t\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

한편, 곡선 T와 직선 l_n으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_n = \left|\int_{a_{n+1}}^{a_n}\left(3{a_{n+1}}^2 x - 2{a_{n+1}}^2 - x^3\right)dx\right| = \frac{1}{12}(a_n - a_{n+1})^4$$

$$= \frac{1}{12}\left\{t\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - t\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}^4 = \frac{t^4}{12}\left\{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}^4$$

$$= \frac{t^4}{12}\times 3^4\left(-\frac{1}{2}\right)^{4n} = \frac{27}{4}t^4\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{27}{4}t^4\left(\frac{1}{16}\right)^n = \frac{27}{4}t^4 \times \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{9}{20}t^4 = 1$$

이므로 만족하는 t의 값은 $t = \left(\frac{20}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$이다.

(예시답안2)

점 A_2의 좌표를 $(s,\ s^3)$라고 두고 접선 l_1의 방정식을 구하면

$y = 3s^2(x-s)+s^3$

이고 직선 l_1이 점 $\mathrm{A}_1(t,\ t^3)$을 지나므로

$t^3 = 3s^2(t-s)+s^3,\ (t-s)(t^2+ts-2s^2)=0,\ (t-s)^2(t+2s)=0$

이다. 그러므로 $s = -\frac{t}{2},\ \mathrm{A}_2\left(-\frac{t}{2},\ -\frac{t^3}{4}\right)$이고 직선 l_1의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}t^2\left(x+\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{8}t^3,\ y = \frac{3t^2}{4}x + \frac{t^3}{4}$$

이다. 따라서 S_1은

$$S_1 = \int_{-\frac{t}{2}}^{t}\left(\frac{3t^2}{4}x + \frac{t^3}{4} - x^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{3t^2}{8}x^2 + \frac{t^3}{4}x - \frac{1}{4}x^4\right]_{-\frac{t}{2}}^{t}$$

$$= \frac{27}{64}t^4$$

이다. S_2를 구하는 과정은 S_1을 구하는 과정과 똑같은데 $s < -\frac{s}{2}$이고 구간 $\left[s,\ -\frac{s}{2}\right]$에서 $\frac{3t^2}{4}x + \frac{t^3}{4} \geq x^3$인 것이 다르다. 따라서

$$S_2 = \frac{27}{64}s^4 = \frac{27}{64}\left(-\frac{1}{2}t\right)^4 = \frac{1}{16}S_1$$

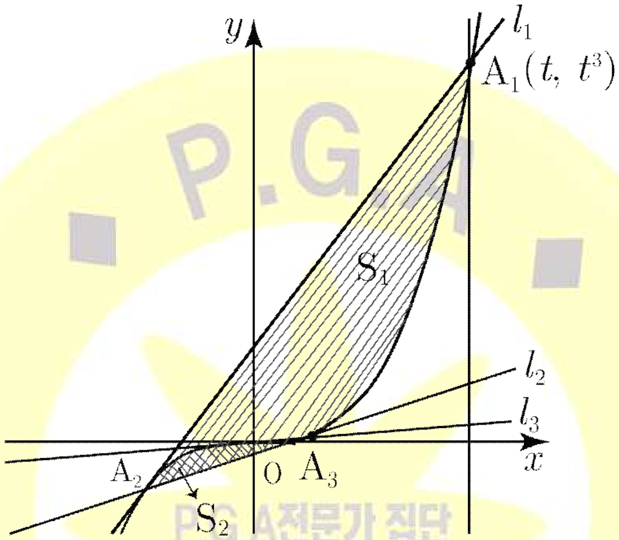
이다. S_n에서 S_{n+1}을 구하는 과정도 같은 과정으로 이루어지므로

$$S_{n+1} = \frac{1}{16} S_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15}\left(\frac{27}{64}t^4\right) = 1,\ \frac{9}{20}t^4 = 1,\ t = \sqrt{\frac{20}{9}}$$

이다.



※ S_n을 구하는 과정을 제시하면 다음과 같다.

점 A_2의 좌표와 접선 l_1의 방정식을 구하는 과정과 같은 과정에 의해서, $\mathrm{A}_n\left(t_n,\ t_n^3\right)$이라 하면 $\mathrm{A}_{n+1}\left(-\frac{t_n}{2},\ -\frac{t_n^3}{8}\right)$이고 직선 l_n의 방정식은 $y = \frac{3t_n^2}{4}x + \frac{t_n^3}{4}$이다. 그러므로

$$\mathrm{A}_n\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}t,\ \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}t^3\right)$$

이고 직선 l_n의 방정식은 $y = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}t^2x + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}t^3$이다. S_n을 구하기 위해서 직선 l_n의 방정식 $y = \frac{3t_n^2}{4}x + \frac{t_n^3}{4}$과 $t_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}t$임을 이용하자. 위의 그림과 같은 형태로 S_n이 만들어지므로

$$S_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(x^3 - \frac{3t_n^2}{4}x - \frac{t_n^3}{4}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3t_n^2}{8}x^2 - \frac{t_n^3}{4}x\right]_{t_n}^{t_{n+1}}$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3t_n^2}{8}x^2 - \frac{t_n^3}{4}x\right]_{t_n}^{-\frac{t_n}{2}} = \frac{27}{64}t_n^4 = \frac{27}{64}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}t^4$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}S_1$$

[수학D(자연)_오전]

문제 1. 좌표공간에서 0이상의 정수 n에 대하여 평면 α_n, β_n을 다음과 같이 정의하자.

(i) 평면 α_n은 점 $(1, 0, 1)$을 지나고 xy평면과의 교선의 방정식이

$$x+y=n,\ z=0$$

이다.

(ii) 평면 β_n은 점 $(0, 0, 1)$을 지나고 xy평면과의 교선의 방정식이

$$x-y=n,\ z=0$$

이다.

1-1. 다음과 같은 직육면체 V가 있다.

$V=\{(x, y, z)|0\le x+y\le 1, 0\le x-y\le 1, 0\le z\le 1\}$

직육면체 V가 두 평면 α_0, α_1에 의하여 한꺼번에 잘릴 때 생기는 다면체 중에서 점 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$을 포함하는 것은 어떤 다면체인지 설명하고 그 부피를 구하시오.

1-2. 문제 1-1의 직육면체 V가 네 평면 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$에 의하여 한꺼번에 잘릴 때 생기는 다면체 중에서 점 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$을 포함하는 다면체를 X라 하자. X는 어떤 다면체인지 설명하고 그 부피를 구하시오.

1-3. 실수 t가 $0<t<1$일 때, 문제 1-2의 다면체 X에 포함되고 점 $(t, 0, 0)$에서 xy 평면에 접하는 구 중 반지름이 최대인 구를 S라 하자. S의 반지름 $r(t)$를 t에 관한 식으로 나타내시오.

1-4. 평면 α_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만나지 않는 한 점 $\mathrm{A}_0(a, b, c)$에 대하여, 점 A_0의 평면 α_1 위로의 정사영을 A_1이라 하고 다시 점 A_1의 평면 α_2 위로의 정사영을 A_2라 하자. 이와 같은 시행을 반복하여 점 $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \cdots, \mathrm{A}_{2020}$을 얻었다고 하자. 이때, 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \cdots, \mathrm{A}_{2020}$을 모두 포함하는 평면이 존재하는가? 존재하면 그 평면의 방정식을 구하고, 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오.

[예시답안]

[1-1]

(예시답안1)

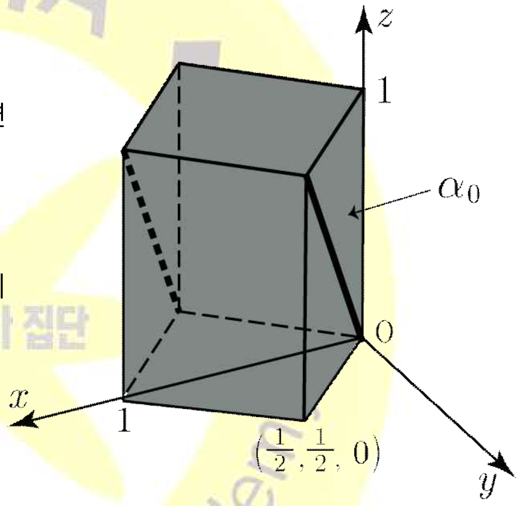
평면 α_n과 xy평면의 교선의 방정식이 $x+y=n,\ z=0$이므로 평면 α_n의 방정식을 $x+y+az=n$이라 하자.

평면 α_n이 점 $(1,\ 0,\ 1)$을 지나므로 $a=n-1$이다.

따라서 평면 α_n의 방정식은 $\alpha_n : x+y+(n-1)z=n$이다.

같은 방법으로 평면 β_n의 방정식은 $\beta_n : x-y+nz=n$이다.

직육면체 V는 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로가 각각 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 높이가 1이다.



평면 α_0과 α_1의 방정식은

$$\alpha_0 : x+y-z=0,\ \alpha_1 : x+y=1$$

이다. 세 점 $(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$이 평면 α_0 위의 점이므로

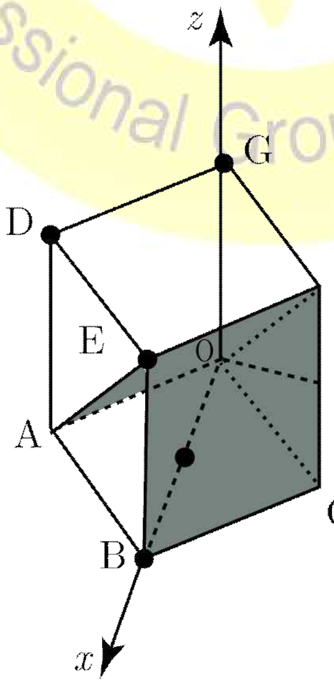
평면 α_0은 이 직육면체를 이등분한다.

따라서 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$을 포함하는 다면체는 삼각기둥이고 구하는 부피는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 1\right)=\frac{1}{4}$

이다.

(예시답안2)



직육면체의 꼭짓점을 구해보면 $A\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$, $B(1,\ 0,\ 0)$, $C\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$, $O(0,\ 0,\ 0)$, $D\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$, $E(1,\ 0,\ 1)$, $F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$, $G(0,\ 0,\ 1)$이다. 또한 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$은 선분 BO의 중점이다. 세 점 $A,\ O,\ E$가 평면 α_0 위의 점이고 세 점 $B,\ C,\ E$가 평면 α_1 위의 점이므로, 평면 α_0는 평면 $AEFO$이고 평면 α_1은 평면 $BEFC$이다. 그러므로 구하는 다면체는 주어진 직육면체를 모서리 AO와 모서리 FE(직육면체의 중심을 대칭의 중심으로 해서 모서리 AO에 대칭인 모서리)를 포함하는 평면으로 이등분한 것 중에 아래쪽(z축 방향에서)에 해당하는 삼각기둥이다. 따라서 그 부피는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BE}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}}\times 1\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

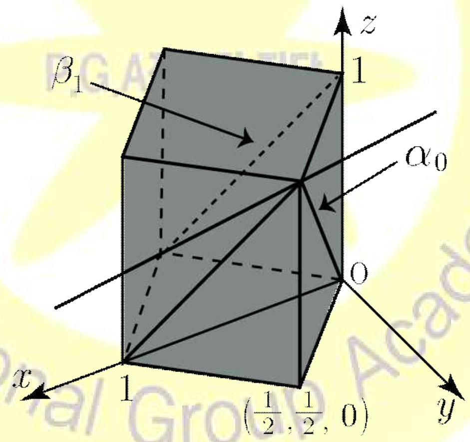
이다.

[1-2]

(예시답안1)

평면 β_0과 β_1의 방정식은

$$\beta_0 : x-y=0,\ \beta_1 : x-y+z=1$$

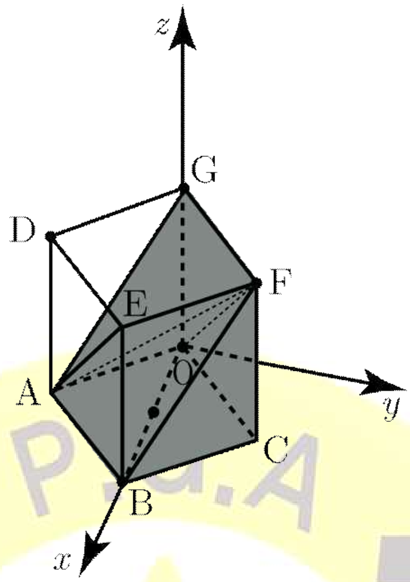


이다. 세 점 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$이 평면 β_1 위의 점이므로 [1-1]과 같이 평면 β_1은 이 직육면체를 이등분한다.

한편 네 평면 $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1$에 의해 잘린 다면체 중 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$을 포함하는 다면체 X는 밑면은 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 정사각형이고, 높이가 1인 사각뿔이다.

따라서 구하는 부피는 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times 1=\frac{1}{6}$이다.

(예시답안2)



세 점 $\mathrm{C, O, G}$가 평면 β_0 위의 점이고 세 점 $\mathrm{A, B, G}$가 평면 β_1 위의 점이므로, 평면 β_0는 평면 CFGO이고 평면 β_1은 평면 ABFG이다. 따라서 다면체 X는 사각형 ABCO를 밑면으로 하고 점 F를 뿔의 꼭짓점으로 하며 점 C에서 만나는 세 면이 서로 수직인 사각뿔이다. 따라서 구하는 부피는

$\frac{1}{3}$(직육면체 V의 부피)$= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times 1 = \frac{1}{6}$

이다.

[1-3]

(예시답안1)

다면체 X는 평면 $x = \frac{1}{2}$에 대칭이므로 $r(t) = r(1-t)$이다. 따라서 $0 < t < \frac{1}{2}$인 경우만 구해보자.

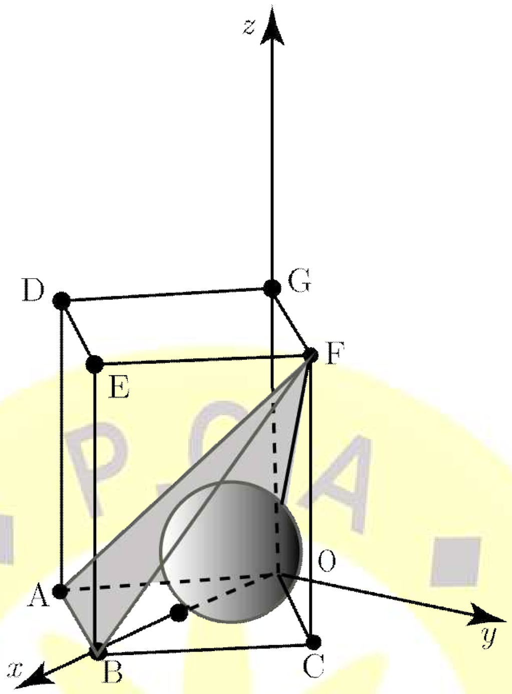
구 S의 최대 반지름은 $r(t)$, 중심의 좌표가 $(t, 0, r(t))$이다. 이 구 S는 xy평면과 평면 $\alpha_0 : x + y - z = 0$에 각각 접하므로 점과 평면 사이의 거리에 의해

$$r(t) = \frac{|t + 0 - r(t)|}{\sqrt{3}} \text{(단, } t > r(t)\text{)},$$

$$\sqrt{3}\, r(t) = t - r(t),\ r(t) = \frac{t}{\sqrt{3}+1}$$

이다. 따라서 구하는 식은 $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\sqrt{3}+1} & \left(0 < t \le \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1-t}{\sqrt{3}+1} & \left(\dfrac{1}{2} < t < 1\right) \end{cases}$이다.

(예시답안2)



다면체 X는 평면 ACF $\left(x=\frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭인 도형이므로 $r(t)=r(1-t)$이다. 또한, 구 S가 점 $(t,\ 0,\ 0)$에서 xy평면에 접하므로 구의 중심은 $(t,\ 0,\ r(t))$이다.

i) $0<t\le\frac{1}{2}$일 때

구의 중심에서 평면 COF에 이르는 거리와 평면 AOG에 이르는 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}t\,(<t)$로 같고 그 거리는 평면 AOF에 이르는 거리보다는 작고, 그 거리는 구의 중심에서 평면 AOF에 이르는 거리 $r(t)$보다는 크다. 그러므로 $r(t)\le\frac{\sqrt{2}}{2}t<t$이다.

한편, $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$이므로 평면 AOF의 방정식은 $x+y-z=0$이다. 그러므로 $r(t)$는

$$\frac{|t+0-r(t)|}{\sqrt{3}}=r(t),\ \frac{t-r(t)}{\sqrt{3}}=r(t),\ r(t)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}t$$

이다.

ii) $\frac{1}{2}<t<1$일 때

$r(t)=r(1-t)$이므로 $r(t)=r(1-t)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-t)$이다.

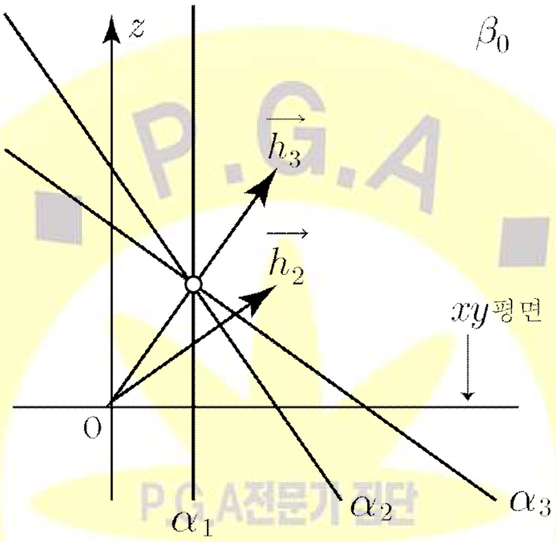
i)과 ii)에 의해서 $r(t)$는

$$r(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}t & \left(0<t\le\dfrac{1}{2}\right)\\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-t) & \left(\dfrac{1}{2}<t<1\right)\end{cases}$$

이다.

[1-4]

(예시답안1)



두 평면 $\alpha_n : x+y+(n-1)z=n$, $\beta_0 : x-y=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{h_n}=(1,\ 1,\ n-1)$, $\overrightarrow{i_0}=(1,\ -1,\ 0)$이라 두면 $\overrightarrow{h_n}\cdot\overrightarrow{i_0}=1-1+0=0$이므로 $\alpha_n\perp\beta_0$이다.

따라서 평면 α_n의 법선벡터 $\overrightarrow{h_n}$은 평면 β_0와 평행하다.

점 $(1,\ 0,\ 1)$을 평면 β_0에 정사영한 점의 좌표가

$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$이고 다음 그림과 같이 평면 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots$을 평면 β_0에 정사영하면 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$을 지나는 직선이 된다.

한 점 $\mathrm{A}_0(a,\ b,\ c)$에서 순서대로 평면 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,$ α_{2020} 위로의 정사영 한 점 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{2020}$는 평면 β_0와 평행한 $\beta_0{}'$위의 점이므로 2020개의 점을 포함하는 평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{i_0}$이고 점 $\mathrm{A}_0(a,\ b,\ c)$를 지나는 평면이다.

따라서 구하는 방정식은

$$1\times(x-a)+(-1)\times(y-b)+0\times(z-c)=0,$$
$$x-y=a-b$$

이다.

(예시답안2)

평면 α_n은 직선

$x+y=n,\ z=0$

을 포함하므로 α_n의 방정식은 $x+y+cz=n$ (c는 상수)의 형태이다. 또한, 평면 α_n은 점 $(1,\ 0,\ 1)$을 지나므로

$$1+0+c=n,\ c=n-1$$

이다. 그러므로 평면 α_n의 방정식이

$$x+y+(n-1)z=n$$

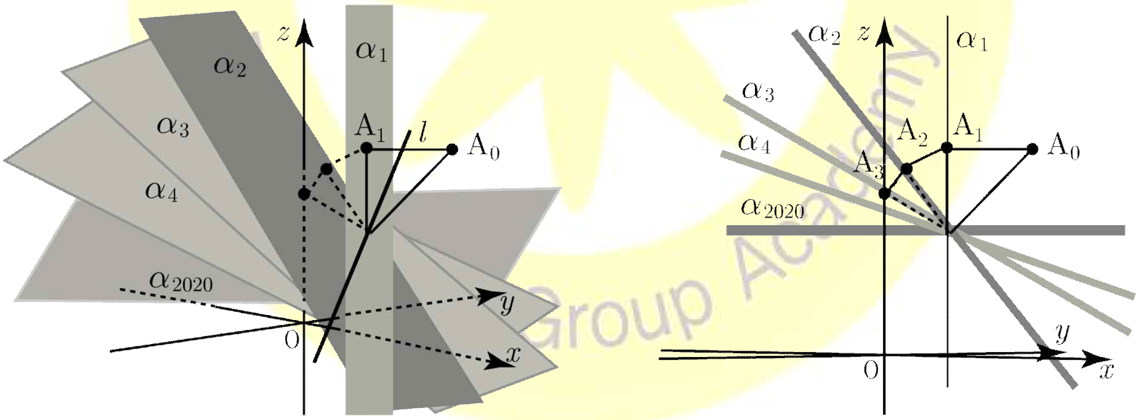
이다. 한편, 직선

$$x+y=n,\ z=0$$

을 직선 l이라 하면, 직선 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ $(n=1,2,3,\ \cdots)$은 평면 α_n과 수직이고 직선 l은 평면 α_n에 포함된 직선이므로 직선 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$과 직선 l은 수직이다. 그러므로 직선 l에 수직이고 점 $\mathrm{A}_0(a,\ b,\ c)$를 지나는 평면을 평면 r라고 하면, 점 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_4,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{2020}$은 모두 평면 r 위의 점이다. 또한, 평면 r의 방정식은 직선 l의 방향벡터 $(1,\ -1,\ 0)$에 수직이고 점 $\mathrm{A}_0(a,\ b,\ c)$를 지나므로

$$(x-a)-(y-b)=0,\ x-y=a-b$$

이다.



[수학E(자연)_오전]

문제 2. 실수 $a<b$에 대하여 닫힌구간 $[a,\,b]$가 주어졌을 때, 함수 $y=f_{[a,\,b]}(x)$를 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의하자.

$$f_{[a,\,b]}(x)=\begin{cases} a+b-x & (x\in[a,\,b]) \\ x & (x\notin[a,\,b]) \end{cases}$$

2-1. 합성함수 $y=(f_{[0,\,2]}\circ f_{[1,\,3]})(x)$는 $x=1,\,2,\,3$에서의 값을 구하시오. 또, 부등식
$(f_{[0,\,2]}\circ f_{[1,\,3]})(x)\geq x+1$
을 만족하는 x의 값의 범위를 구하시오.

2-2. 두 함수

$$y=x^2,\; y=(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,n+1]})(x)$$

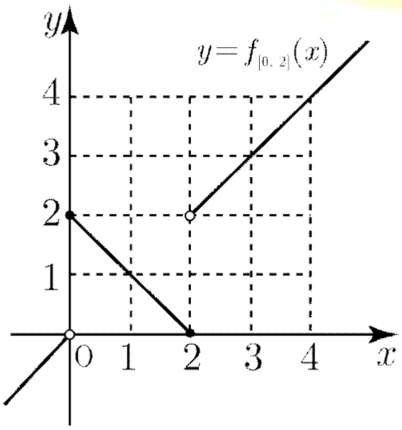
의 그래프가 좌표평면 위의 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오. (단 a의 범위는 $0\leq a<1$이다.)

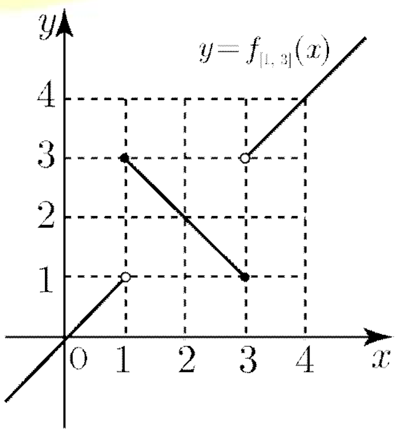
2-3. 모든 실수 x에 대하여

$$(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,b]})(x)=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)$$

가 성립하도록 하는 점 $\mathrm{P}(a,\,b)$의 영역을 구하시오. (단, 실수 a는 음이 아닌 실수이다.)

[예시답안]
[2-1]
(예시답안1)
두 함수 $y=f_{[0,\,2]}(x)$와 $y=f_{[1,\,3]}(x)$의 그래프는 다음과 같다.



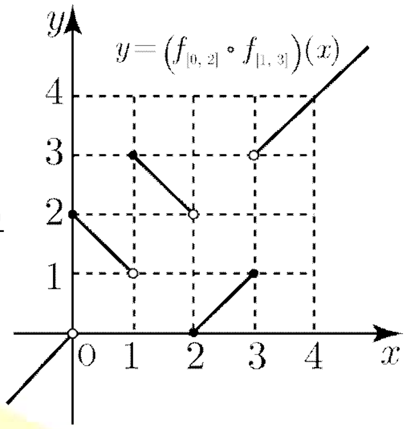


(i) $x < 1$ 또는 $x > 3$인 경우, $y = f_{[1,\,3]}(x) = x$이므로

$$(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(x) = f_{[0,\,2]}(x)$$

(ii) $1 \le x \le 3$인 경우, $y = f_{[1,\,3]}(x) = 4 - x$이므로

$$(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(x) = \begin{cases} 4 - x & (1 \le x < 2) \\ x - 2 & (2 \le x \le 3) \end{cases}$$



(i), (ii)에서 만족하는 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $x = 1,\, 2,\, 3$에서의 함숫값은 각각 $3,\, 0,\, 1$이다.

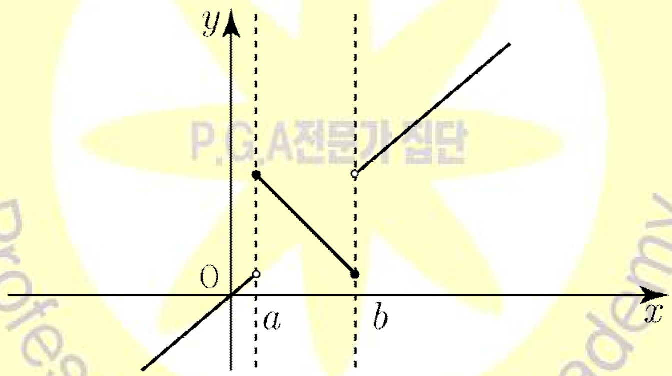
한편, $(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(x) \ge x + 1$를 만족하는 x의 범위는

$$0 \le x \le \frac{1}{2} \text{ 또는 } 1 \le x \le \frac{3}{2}$$

이다.

(예시답안2)

함수 $f_{[a,\,b]}(x) = \begin{cases} a + b - x & (x \in [a,\, b]) \\ x & (x \notin [a,\, b]) \end{cases}$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



그러므로

$(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(1) = f_{[0,\,2]}((f_{[1,\,3]})(1)) = f_{[0,\,2]}(3) = 3,$

$(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(2) = f_{[0,\,2]}((f_{[1.\,3]})(2)) = f_{[0,\,2]}(2) = 0,$

$(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(3) = f_{[0,\,2]}((f_{[1,\,3]}(3)) = f_{[0,\,2]}(1) = 1$

이다.

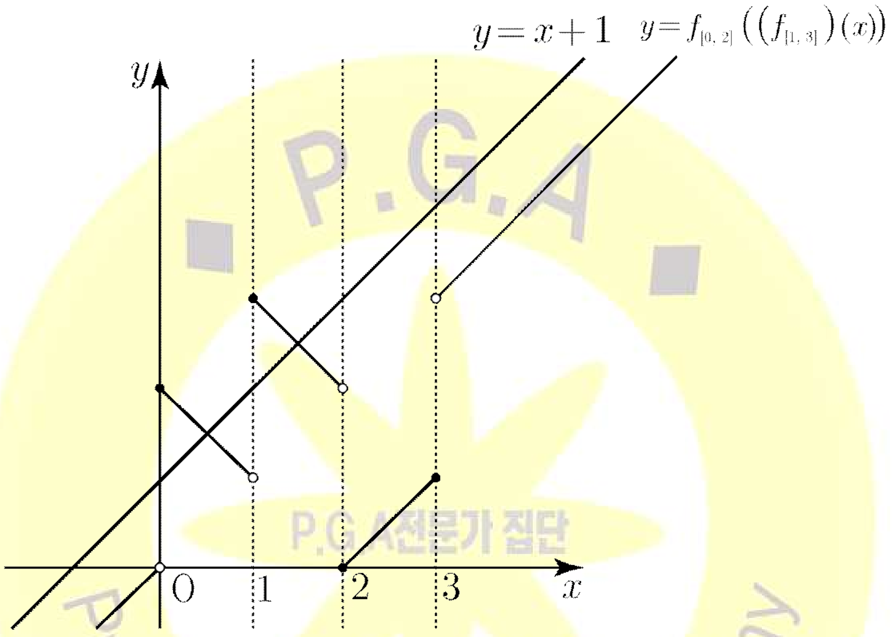
한편,

$$(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(x) = \begin{cases} (f_{[0,\,2]})(4 - x) & (x \in [1,\, 3]) \\ (f_{[0,\,2]})(x) & (x \notin [1,\, 3]) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4 - x & (1 \le x < 2) \\ 2 - (4 - x) & (2 \le x < 3) \\ 2 - x & (0 \le x < 1) \\ x & (x < 0,\, x > 3) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 4-x & (1 \le x < 2) \\ 2-(4-x) & (2 \le x < 3) \\ 2-x & (0 \le x < 1) \\ x & (x < 0,\ x > 3) \end{cases}$$

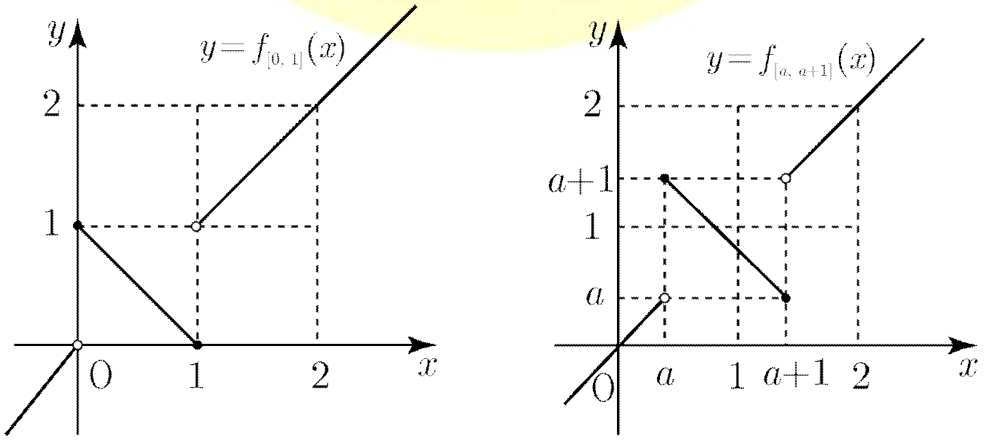
이다. 그러므로 $y=(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(x)$와 $y=x+1$의 그래프를 나타내면 다음과 같다. 따라서 $(f_{[0,\,2]} \circ f_{[1,\,3]})(x) \ge x+1$를 만족하는 x의 범위는 $0 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $1 \le x \le \frac{3}{2}$이다.



[2-2]

(예시답안1)

두 함수 $y=f_{[0,\,1]}(x)$, $y=f_{[a,\,a+1]}(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(i) $x < a$ 또는 $x > a+1$인 경우, $y = f_{[a,\, a+1]}(x) = x$이므로

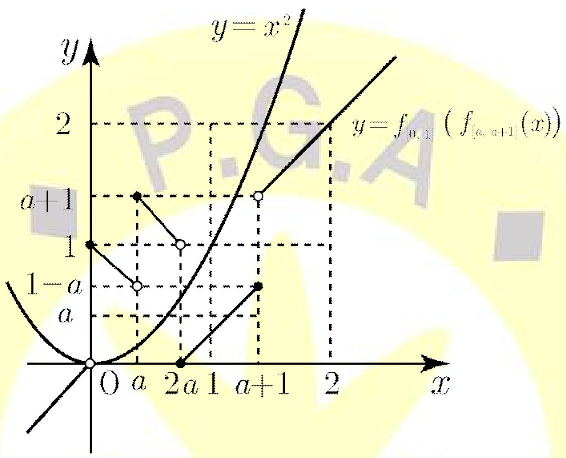
$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,a+1]})(x) = f_{[0,\,1]}(x)$$

(ii) $a \le x \le a+1$인 경우, $y = f_{[a,\,a+1]}(x) = 2a+1-x$이므로

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,a+1]})(x) = \begin{cases} 2a+1-x & (a \le x < 2a) \\ 1-(2a+1-x) & (2a \le x \le a+1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x+2a+1 & (a \le x < 2a) \\ x-2a & (2a \le x \le a+1) \end{cases}$$

위의 범위에 따라 합성함수 $y = (f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,a+1]})(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $y = x^2$과 $y = (f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,a+1]})(x)$이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는

① $x = a$일 때, $y = x^2$이 두 점 $(a,\, 1-a)$와 $(a,\, 1+a)$의 사이를 지나는 경우이므로

$1-a < a^2 \le a+1$을 만족하는 a의 범위는 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

② $y = x-2a$가 $y = x^2$에 접할 때, $x^2 - x + 2a = 0$이고 $D = 1-8a = 0$이다.

따라서 만족하는 a의 범위는 $0 \le a < \dfrac{1}{8}$이다.

$0 \le a \le 1$이므로 ①, ②에 의해 구하는 a의 범위는

$$0 \le a < \frac{1}{8} \ \text{또는}\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \le 1$$

이다.

(참고) $a = 0$일 때, $f_{[0,\,1]}(f_{[0,\,1]}(0)) = f_{[0,\,1]}(1) = 0$, $f_{[0,\,1]}(f_{[0,\,1]}(1)) = f_{[0,\,1]}(0) = 1$이다.

(예시답안2)

$x < 0$ 또는 $x > a+1$이면 $(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,a+1]})(x) = x$이고 $x < 0$일 때, $x < 0 < x^2$이고

$x > a+1\ (\ge 1)$일 때는 $x^2 > x > 1$이므로 $0 \le x \le 1$의 범위에서만 두 그래프가 만난다.

i) $a = 0$일 때

$y = f_{[a,\,a+1]}(x)$의 역함수가 자기 자신인 $y = f_{[0,\,1]}(x)$이므로

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,a+1]})(x) = x$$

이다. 따라서 두 함수

$$y=x^2,\ y=(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,a+1]})(x)$$

의 그래프가 좌표평면 위의 서로 다른 두 점에서 만난다.

ii) $0<a\le 1$일 때

$$y=(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,a+1]})(0)=f_{[0,\,1]}(0)=1$$

이므로 $x>0$인 범위에서 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

두 함수

$$y=x^2,\ y=(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,a+1]})(x)$$

를 $y=x$에 대칭이동한 그래프

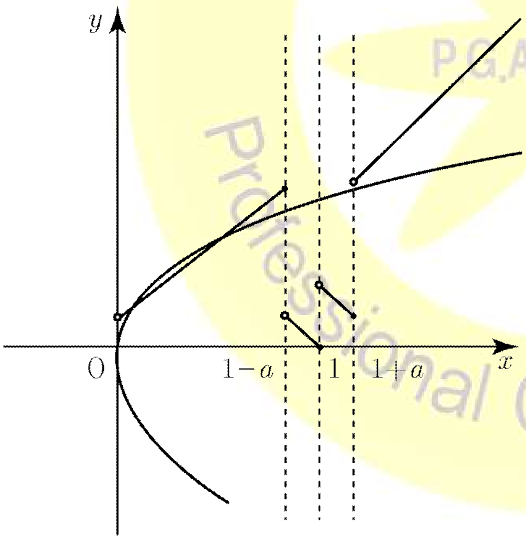
$$x=y^2,\ y=(f_{[a,\,a+1]}\circ f_{[0,\,1]})(x)$$

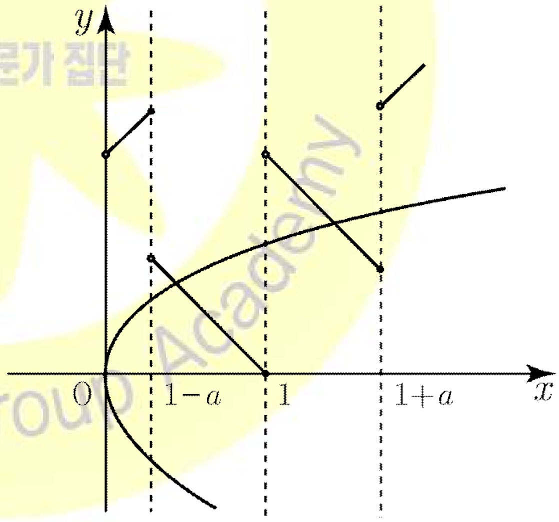
를 고려하자.

$$(f_{[a,\,a+1]}\circ f_{[0,\,1]})(x)=\begin{cases}(f_{[a,\,a+1]})(1-x) & (0<x\le 1)\\ (f_{[a,\,a+1]})(x) & (x>1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2a+1-(1-x) & (0<x\le 1-a)\\ 1-x & (1-a<x\le 1)\\ 2a+1-x & (1<x\le a+1)\\ x & (x>a+1)\end{cases}$$

그러므로 두 그래프 $x=y^2,\ y=(f_{[a,\,a+1]}\circ f_{[0,\,1]})(x)$이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 아래 그림과 같이 두 가지로 분류할 수 있다.





① $y=2a+1-(1-x)$ $(0<x\le 1-a)$와 $x=y^2$이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우

$y^2=x=-2a+y$에서 $y^2-y+2a=0$이고 판별식 $D=1-8a>0$에서 $a<\dfrac{1}{8}$이어야 한다.

$0<a\le 1$이므로 $0<a<\dfrac{1}{8}$이어야 한다.

② 곡선 $x=y^2$이 $y=a(1-a<x\le 1+a)$와 만나는 경우

$1-a<a^2\le 1+a$에서 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

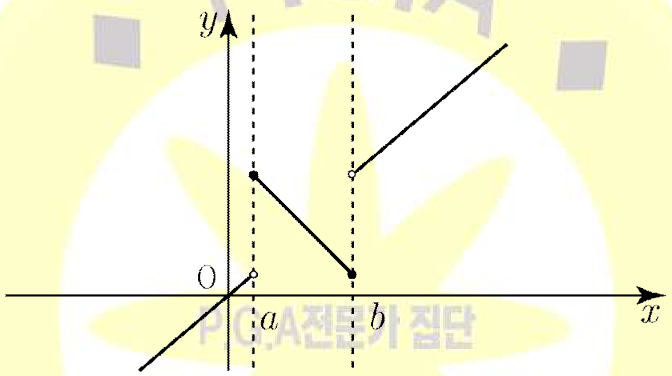
$0 < a \le 1$이므로 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \le 1$이다.

i)과 ii)에 의해서, $0 \le a < \dfrac{1}{8}$ 또는 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < a \le 1$이다.

[2-3]
(예시답안1)
함수

$$f_{[a,\,b]}(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a,\,b]) \\ x & (x \notin [a,\,b]) \end{cases}$$

의 그래프의 개형은 아래와 같고 $f_{[a,\,b]}(x)$의 역함수는 바로 그 자신이다.



그러므로 $(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})^{-1} = f_{[a,\,b]}^{-1} \circ f_{[0,\,1]}^{-1} = f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]}$이다. 따라서

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$$

가 성립하기 위한 필요충분조건은

$$((f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]}) \circ (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]}))(x) = x$$

이다. 즉, 함수 $y = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$가 $y = x$에 대하여 대칭이 된다는 것이다.
한편,

$$(f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \notin [0,\,1]\text{이고 } x \notin [a,\,b]) \\ x & (x \notin [0,\,1]\text{이고 } x \notin [a,\,b]) \\ 1-x & (x \in [0,\,1]\text{이고 } 1-x \notin [a,\,b]) \\ a+b-1+x & (x \in [0,\,1]\text{이고 } 1-x \in [a,\,b]) \end{cases}$$

이므로 $y = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$가 $y = x$에 대하여 대칭이 되기 위해서는
i) $x \in [0,\,1]$이면 $1-x \notin [a,\,b]$ 또는 ii) $a+b-1+x = x$를 만족해야 한다.
i) $x \in [0,\,1]$이면 $1-x \notin [a,\,b]$인 경우
$x \in [0,\,1]$이면 $1-x \in [0,\,1]$이다. 이때 $1-x \notin [a,\,b]$가 되려면 $a > 1$이어야 한다.
또한 $a > 1$이면

$$(f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x) = \begin{cases} a+b-x & (x \in [a,\,b]) \\ x & (x \notin [0,\,1]\text{이고 } x \notin [a,\,b]) \\ 1-x & (x \in [0,\,1]) \end{cases}$$

이므로 $y = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$가 $y = x$에 대하여 대칭이다.

ii) $a+1-1+x=x$인 경우

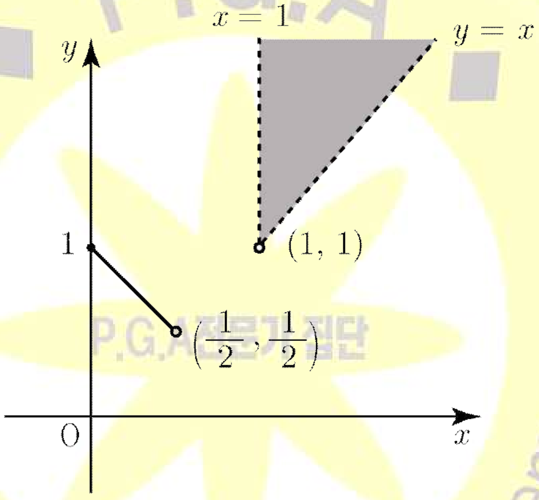
i)에서 $a>1$일 때는 가능하다는 것을 확인했으므로 $0 \le a \le 1$일 때만 확인하면 된다. 또한, $a+b-1+x=x$이므로 $a+b=1$이다. 이때 $0 \le a \le 1$이고 $a<b$이므로 $0 \le a < \frac{1}{2} < b \le 1$이다. 또한, $a+b=1$이고 $0 \le a < \frac{1}{2} < b \le 1$이면

$$(f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x) = \begin{cases} x & (x \in [a,\, 1-a] \\ 1-x & (x \in [0,\, a) \cup (1-a,\, 1]) \\ x & (x \notin [0,\, 1]) \end{cases}$$

이다. 그러므로 $y=(f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$가 $y=x$에 대하여 대칭이다.

i), ii)에 의해서, 구하고자 하는 $\mathrm{P}(a,\, b)$의 영역은

$\left\{(a,\, b) \mid a+b=1,\, 0 \le a < \frac{1}{2}\right\} \cup \{(a,\, b) \mid 1<a<b\}$

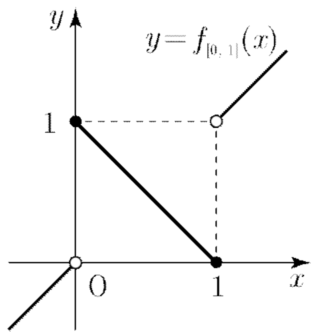


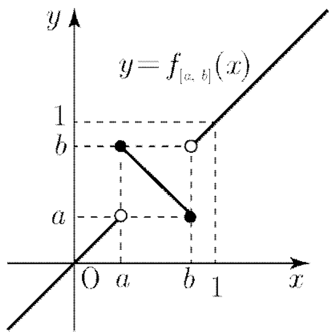
이다.

(예시답안2)

음이 아닌 두 실수 $a,\, b$에 대하여 다음과 같은 3가지 경우로 생각하자.

① $0 \le a < b \le 1$인 경우, 두 함수 $y=f_{[0,\,1]}(x)$와 $y=f_{[a,\,b]}(x)$의 그래프는





이다. 이 때, 실수 전체의 구간을 다음과 같이 나눈다.

(i) $x<0$ 또는 $x>1$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x)=f_{[a,\,b]}(x)=x$이고

$$(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,b]})(x)=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)=x$$

이므로 이 범위는 모든 실수 x에 대해 성립한다.

(ii) $0\le x<a$ 또는 $b<x\le 1$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x)=-x+1$, $f_{[a,\,b]}(x)=x$이고

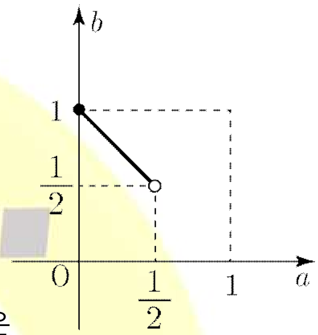
$$(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,b]})(x)=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})=-x+1$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립한다.

(iii) $a\le x\le b$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x)=-x+1$, $f_{[a,\,b]}(x)=a+b-x$ 이고

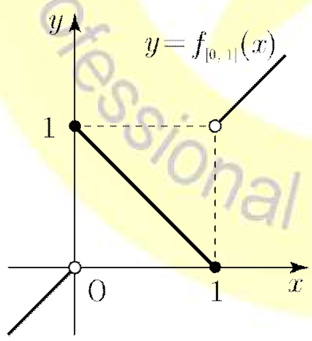
$$(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,b]})(x)=x-a-b+1$$
$$(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)=x-1+a+b$$

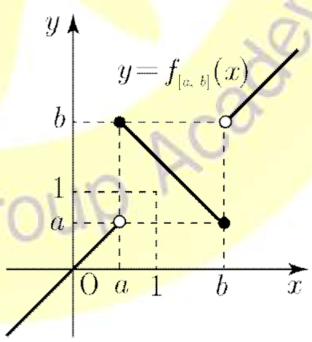
이다. 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립하기 위한 조건은 $a+b=1$이다.



그러므로 문제의 조건 $0\le a<b\le 1$에서 성립하는 점 $\mathrm{P}(a,\,b)$는 $0\le a<\frac{1}{2}$이고 $a+b=1$을 만족하므로 집합 $\left\{(a,\,b)\,\middle|\,a+b=1,\,0\le a<\frac{1}{2}\right\}$의 원소이다.

② $0\le a\le 1<b$인 경우, 두 함수 $y=f_{[0,\,1]}(x)$와 $y=f_{[a,\,b]}(x)$의 그래프는





이다. 실수 전체의 구간을 다음과 같이 나눈다.

(i) $x<0$ 또는 $x>b$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x)=f_{[a,\,b]}(x)=x$이고

$$(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,b]})(x)=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)=x$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립한다.

(ii) $0\le x<a$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x)=-x+1$, $f_{[a,\,b]}(x)=x$이고

$$(f_{[0,\,1]}\circ f_{[a,\,b]})(x)=(f_{[a,\,b]}\circ f_{[0,\,1]})(x)=-x+1$$

이므로 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립한다.

(iii) $1 < x \leq b$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x) = x$, $f_{[a,\,b]}(x) = a + b - x$이고

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x) = -x + a + b$$

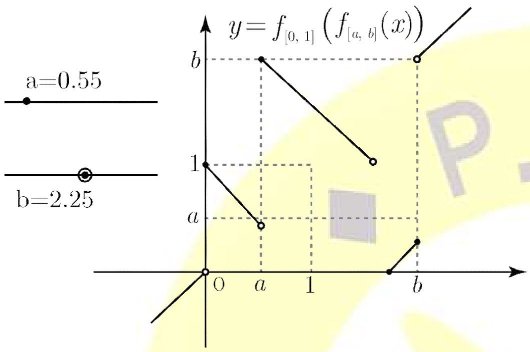
이므로 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립한다.

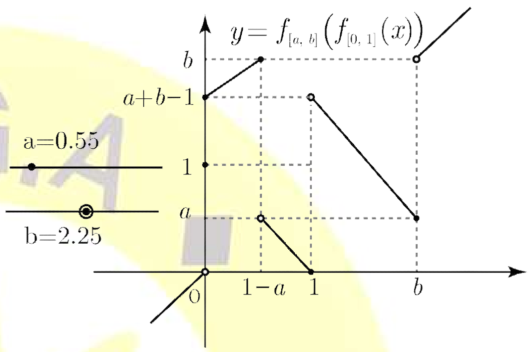
(iv) $a \leq x \leq 1$인 경우, $f_{[0,\,1]}(x) = -x + 1$, $f_{[a,\,b]}(x) = a + b - x$이고

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = x - a - b + 1,\ (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x) = x - 1 + a + b$$

이다. 이 범위의 모든 실수 x에 대해 성립하기 위한 조건은 $a + b = 1$이다.

$0 \leq a \leq 1 < b$의 조건을 만족하는 점 $(a,\,b)$는 존재하지 않는다.





(참고) 두 함수 $y = f_{[0,\,1]}(x)$와 $y = f_{[a,\,b]}(x)$에 대하여 적어도 1개의 함수가 항등함수이면 $(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$이 성립한다. 따라서 두 함수 $y = f_{[0,\,1]}(x)$, $y = f_{[a,\,b]}(x)$가 모두 항등함수가 아닌 경우에 대해 성립하는 경우를 찾으면 된다.

③ $1 < a < b$인 경우, 모든 실수 x에 대하여, $f_{[0,\,1]}(x) = x$ 또는 $f_{[a,\,b]}(x) = x$이므로

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)\text{가 성립한다.}$$

④ $a = 1$인 경우

$$(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(1) = (f_{[0,\,1]})(b) = b > a = 1,$$

$$(f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(1) = (f_{[a,\,b]})(0) = 0$$

이므로, 모든 실수 x에 대하여 $(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$가 성립하는 것은 아니다.

①, ②, ③, ④에 의해 $(f_{[0,\,1]} \circ f_{[a,\,b]})(x) = (f_{[a,\,b]} \circ f_{[0,\,1]})(x)$가 성립하도록 하는 점 $\mathrm{P}(a,\,b)$의 영역은

$$\left\{(a,\,b)\,\middle|\,a + b = 1,\ 0 \leq a < \frac{1}{2}\right\} \cup \{(a,\,b) | 1 < a < b\}$$

이다.