5 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

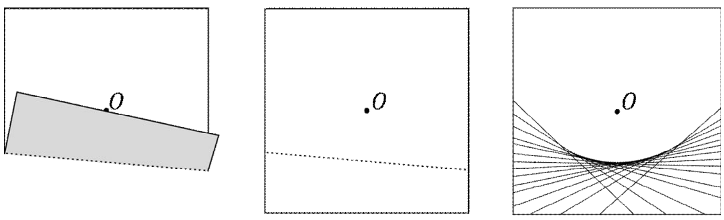
유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하, 수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	포물선, 넓이, 정적분
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

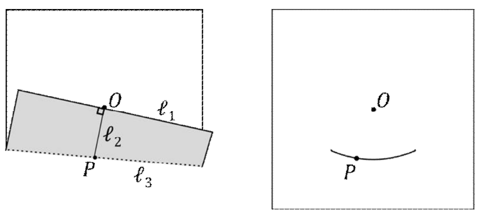
문제 1 (20점)

정사각형 종이의 한 변이 중심점 O와 접하도록 여러 번 접었다 펴면, 접힌 자국이 없는 영역과 그 경계를 이루는 곡선이 생긴다. (<그림 1>)

정사각형 종이의 변 ℓ_1이 중심점 O와 접하도록 접고 ℓ_1 위의 점 O에서 ℓ_1에 수직인 직선 ℓ_2를 그으면, 직선 ℓ_2와 접힌 선 ℓ_3이 만나는 점 P가 경계 곡선 위의 점이 되는 것이 알려져 있다. (<그림 2>)



<그림 1>

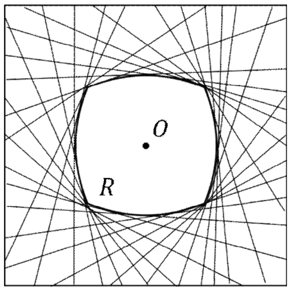


<그림 2>

(1) 중심점 O를 좌표평면의 원점에 두고 직선 $y=-1$에 변을 가지는 종이의 아래쪽을 <그림 1>과 같은 방법으로 접어서 얻는 곡선이 포물선이 되는 이유를 설명하고, 이 포물선의 준선과 초점을 구하시오.

(2) 중심점 O를 좌표평면의 원점에 두고 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$에 네 변을 가지는 정사각형 모양 종이에서, 네 변 각각에 대해 제시문과 같은 방법으로 곡선을 만들었을 때 곡선에 해당하는 식을 모두 구하시오.

(3) 문항 (2)에서 접힌 자국이 없는 영역 R가 아래의 그림과 같이 생성될 때, 이 영역의 넓이를 구하시오.



3. 출제 의도

고등학교 기하 과목에서 제시되는 이차곡선 중 하나인 포물선의 특성을 파악하고, 포물선의 식을 구할 수 있는지 평가한다. 또한, 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문, 문항 (1), (2)	**[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선** [12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
문항 (3)	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하	황선욱 외	MiraeN	2019	11-24
	기하	권오남 외	교학사	2019	10-19

	기하	홍성복 외	지학사	2019	11-15
	수학Ⅱ	김원경 외	비상교육	2018	125-143
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	122-139
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	140-155

5. 문항 해설

(1) 제시문대로 접었을 때 나타나는 곡선이 포물선임을 파악하고, 그 준선과 초점을 구한다.

(2) 정사각형을 제시문대로 접으면 정사각형의 각 변을 준선으로 삼는 포물선 4개가 나타남을 보이고, 포물선의 식을 구한다.

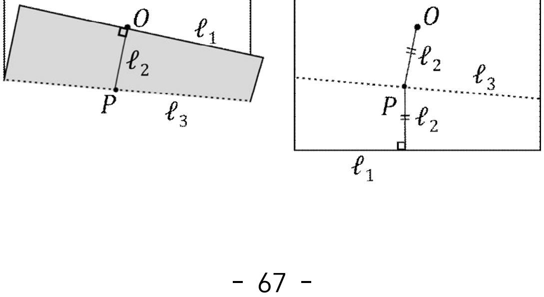
(3) 문항 (2)의 네 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	포물선이 되는 이유를 설명함 (3점) 준선을 구함 (1점) 초점을 구함 (1점)	5
(2)	각 포물선의 식을 구함 (각 포물선 마다 2점)	8
(3)	적분구간을 포함하여 넓이를 구하는 계산식을 정확히 구함 (3점) 정적분을 이용하여 넓이를 구함 (4점)	7

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 포물선의 정의: 평면 상의 한 점(초점)과 이 점을 지나지 않는 직선(준선)으로부터 거리가 같은 점들의 집합. 제시문의 <그림 2>의 점 P는 원점과 정사각형의 아랫변(직선 $y=-1$)으로부터 거리가 같다. 이는 접힌 흔적 ℓ_3을 기준으로 선대칭을 이루기 때문이다 (아래 그림 참조). 따라서 이와 같은 점들의 집합은 원점 O를 초점, 직선 $y=-1$를 준선으로 가지는 포물선(의 일부)이다.



(2) 위 (1)에 의해 구하는 네 곡선은 각각 점 O를 초점, 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$를 준선으로 가지는 포물선이다. 점 O를 초점, 직선 $y=-1$를 준선으로 가지는 포물선의 식은 원점부터 점$P(x, y)$까지의 거리는 $\sqrt{x^2+y^2}$이고 점 P부터 직선 $y=-1$까지의 거리는 $|y+1|$이므로 $\sqrt{x^2+y^2}=|y+1|$ 로부터 $x^2+y^2=y^2+2y+1$ 즉, $x^2=2y+1$이다. (또는 $y=\frac{x^2-1}{2}$)

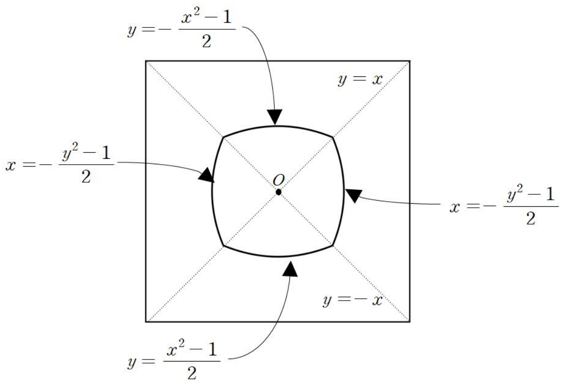
마찬가지로

원점 O를 초점, 직선 $x=1$을 준선으로 가지는 포물선의 식은 $y^2=-2x+1$

원점 O를 초점, 직선 $x=-1$을 준선으로 가지는 포물선의 식은 $y^2=2x+1$

원점 O를 초점, 직선 $y=1$을 준선으로 가지는 포물선의 식은 $x^2=-2y+1$이다.

(3) 대칭을 고려하면 정사각형의 각 변을 준선으로 삼는 각각의 포물선은 $y=x$와 $y=-x$ 2개의 직선으로 그 경계가 나뉜다. (아래 그림 참조)



아래쪽 포물선 $y=\frac{x^2-1}{2}$과 직선 $y=x$의 교점은 $x^2-2x-1=0$ 로부터 $x=y=1\pm\sqrt{2}$ 이다. 두 교점 중 위의 그림에서 왼쪽 아래의 교점(즉, 3사분면의 교점)은 $x=1-\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$이다.

구하는 면적은 대칭으로부터 포물선 $y=\frac{x^2-1}{2}$와 직선 $y=x$, y축으로 둘러싸인 부분의 면적의 8배이다.

구간 $1-\sqrt{2}\le x\le 0$ 에서 포물선 $y=\frac{x^2-1}{2}$는 직선 $y=x$ 아래쪽에 있으므로 정적분을 이용하여 구하는 면적을 계산하면

$8\times\int_{1-\sqrt{2}}^{0}\left(x-\frac{x^2-1}{2}\right)dx=8\times\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_{1-\sqrt{2}}^{0}=8\times\frac{4\sqrt{2}-5}{6}=\frac{16\sqrt{2}-20}{3}$ 이다.

6 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	확률, 조건부확률, 독립과 종속의 의미 이해
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

디지털 통신에서 송신기가 1비트(bit) 0 또는 1을 전송하는 상황을 생각하자. 송신기가 1을 보내었어도 다른 신호에 의한 간섭 때문에 수신기는 0을 받을 수도 있다. 또는, 송신기가 0을 보내었어도 수신기는 1을 받을 수 있다.

이러한 간섭의 효과를 줄이기 위해 현대 통신에서 송신기는 하나의 비트를 한 번 보내는 대신 동일한 비트를 연속으로 n번(이때 n은 홀수인 자연수) 반복하여 보낸다. 이러한 반복을 통해 간섭에 의한 최종 오류를 줄일 수 있는데, 이를 n-반복 코드(n-repetition code)라고 한다. 수신기에서 받은 n개의 비트들을 기준으로 송신기가 보낸 비트가 무엇인지를 결정하게 되며, 이때 수신기는 더 많이 받은 비트를 송신기가 보내었다고 결정한다.

예시: $n=5$인 5-반복 코드의 경우, 1을 보내는 대신, 송신기는 1을 5개 붙여서 11111을 송신한다. 이때, 간섭에 의해 각각의 비트는 변화할 수 있다. 수신기가 10011을 받았다면 0이 두 개이고 1이 세 개이므로 수신기는 송신기가 보낸 비트는 1이라고 최종결정한다. 혹은, 수신기가 10000을 받았다면 수신기는 송신기가 보낸 비트가 0이라고 최종결정하게 된다. 이처럼 수신기가 최종결정한 비트가 송신기가 보낸 비트와 서로 다른 경우 '최종결정오류'가 발생했다고 하자.

아래와 같은 가정을 하자, n-반복 코드 내에서 각각의 비트는 독립적으로 간섭에 노출되어 바뀌고 그 확률은 p이다.

즉,

- 0을 보낼 때, 간섭에 의해 수신기가 1을 받을 확률은 p이다.
- 1을 보낼 때, 간섭에 의해 수신기가 0을 받을 확률은 p이다.
- 간섭에 의한 영향을 받지 않아 0 또는 1이 바뀌지 않고 수신기가 그대로 받을 확률은 $1-p$이다.

(1) 보통의 경우, 각각의 비트가 간섭에 의해 바뀔 확률 p를 0.1이라 하자. 이때, 3-반복 코드 수신기의 최종결정 비트와 송신기가 보낸 비트가 서로 달라 최종 결정 오류가 발생할 확률을 구하시오.

(2) 갑작스런 태양의 활동으로 각각의 비트가 바뀔 확률 p가 0.1에서 0.2로 늘어났다고 하자. 이때, 동일하게 구성된 3-반복 코드 수신기의 최종 결정 오류 확률을 구하시오. 그리고, 이 값이 문항 (1)에서 구한 확률의 몇 배인지 소수점 둘째 자리에서 반올림하여 구하시오.

(3) 문항 (2)와 같이 태양 활동이 활발한 경우($p=0.2$), 수신기의 최종 결정 오류를 줄이기 위해 송신기의 비트를 m번 반복하는 m-반복 코드를 설계하려고 한다. 단, m-반복 코드 수신기의 최종 결정 오류 확률값이, 문항 (1)에서 구한 $p=0.1$일 때의 3-반복 코드의 최종 결정 오류 확률값보다 더 작도록 설계하고 싶다. 필요한 m의 최솟값을 아래의 표를 참고하여 구하시오.

$2^{10}=1024$	$2^{11}=2048$	$2^{12}=4096$	$2^{13}=8192$	$2^{14}=16384$
$2^{15}=32768$	$2^{16}=65536$	$2^{17}=131072$	$2^{18}=262144$	$2^{19}=524288$
$63\times 2^{18}=16515072$	$21\times 2^{17}=2752512$	$9\times 2^{17}=1179648$	$9\times 2^{15}=294912$	$35\times 2^{13}=286720$

3. 출제 의도

사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있는지 평가한다.

확률의 곱셈정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다.

독립시행의 확률을 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.

이항분포를 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[확률과통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.
문항 (1), (2), (3)	**[확률과통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박교식 외	동아출판사	2019	61-74
	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2019	66-89
	확률과 통계	황선욱 외	미래출판사	2019	58-75

5. 문항 해설

제시문에서와 같이 m개의 비트를 송신했을 때 간섭에 의해 변화하는 비트의 개수는 이항분포 $\mathrm{B(m,p)}$를 따름을 알 수 있다. 이를 이용하여 구하는 확률을 계산하고 비교할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	최종결정오류가 발생할 확률의 식을 구함 (2점) 확률값을 계산함 (3점)	5
(2)	최종결정오류가 발생할 확률의 식을 구함 (2점) 확률값을 계산함 (2점) (1)에서 구한 값과 비를 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구함 (1점)	5
(3)	$p=0.2$, $m=5,7,9$인 각 경우 최종결정오류가 발생할 확률의 식을 구하고, 값을 구함 (또는 일부 항의 값을 구하여 확률값을 (1)에서 구한 값과 비교) - $p=0.2,\ m=5$ 인 경우 (3점) - $p=0.2,\ m=7$ 인 경우 (3점) - $p=0.2,\ m=9$ 인 경우 (4점)	10

7. 예시 답안 혹은 정답

제시문에서와 같이 m개의 비트를 송신했을 때 간섭에 의해 변화하는 비트의 개수는 이항분포 $\mathrm{B}(\mathrm{m},\mathrm{p})$를 따름을 알 수 있다. 즉, X를 이항분포 $\mathrm{B}(\mathrm{m},\mathrm{p})$를 따르는 이산확률변수라 하면 m개의 비트를 송신했을 때 간섭에 의해 k개의 비트가 변화할 확률은 $\mathrm{P}(X=k)=\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}$이다.

m번 반복해서 보낸 비트를 수신기가 잘못 최종결정할 경우는 m개의 비트 중 $n+1$개 이상의 비트가 간섭에 의해 변화한 경우이다. (단, $m=2n+1$이라 하자) 따라서 m-반복 코드의 최종결정 오류 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}\ge \mathrm{n}+1) &= \mathrm{P}(X=n+1)+\mathrm{P}(X=n+2)+\cdots+\mathrm{P}(X=m)\\ &= \binom{m}{n+1}p^{n+1}(1-p)^{m-(n+1)}+\binom{m}{n+2}p^{n+2}(1-p)^{m-(n+2)}+\cdots+\binom{m}{m}p^m(1-p)^0\end{aligned}$$

이다.

(1) $m=3, p=0.1$인 경우이다. 위와 같이 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{3}{2}\times 0.1^2\times 0.9+\binom{3}{3}\times 0.1^3=0.028$ 이다.

(2) $m=3, p=0.2$인 경우이다. 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{3}{2}\times 0.2^2\times 0.8+\binom{3}{3}\times 0.2^3=0.104$ 이다.

(1)에서 구한 확률과의 비는 $\frac{0.104}{0.028}=3.7142...$이고 소수점 둘째 자리에서 반올림하면 3.7 이다.

(3) $p=0.2$, $m=5,7,9$인 각 경우 최종 결정 오류가 발생할 확률을 문제에서 주어진 표를 이용하여 대략 구하여 (1)에서 구한 값 0.028과 비교한다.

$m=5, p=0.2$ 일 때, 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{5}{3}\times 0.2^3\times 0.8^2+\binom{5}{4}\times 0.2^4\times 0.8^1+\binom{5}{5}\times 0.2^5\times 0.8^0$ 이다.

$\binom{5}{3}\times 0.2^3\times 0.8^2=0.0512>0.028$이므로 이 확률값은 0.028 보다 크다.

마찬가지로 $m=7, p=0.2$ 일 때, 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{7}{4}\times 0.2^4\times 0.8^3+\binom{7}{5}\times 0.2^5\times 0.8^2+\binom{7}{6}\times 0.2^6\times 0.8^1+\binom{7}{7}\times 0.2^7\times 0.8^0$ 인데,

$\binom{7}{4}\times 0.2^4\times 0.8^3=0.028672>0.028$ 이므로 이 확률값은 0.028 보다 크다.

$m=9, p=0.2$ 일 때, 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{9}{5}\times 0.2^5\times 0.8^4+\binom{9}{6}\times 0.2^6\times 0.8^3+\binom{9}{7}\times 0.2^7\times 0.8^2+\binom{9}{8}\times 0.2^8\times 0.8^1+\binom{9}{9}\times 0.2^9\times 0.8^0$ 이다.

문제에서 주어진 표를 이용하여 계산하면 $\binom{9}{5}\times 0.2^5 \times 0.8^4 + \binom{9}{6}\times 0.2^6 \times 0.8^3 = 0.019...$이다.

$\binom{9}{7}\times 0.2^7 \times 0.8^2 = 2.95.. \times 10^{-4}$이고 마지막 두 항은 이 값보다도 작으므로 최종 결정 오류가 발생할 확률은 $0.019... + 3\times(3\times 10^{-4}) < 0.020...$ 보다 작다.

따라서 (1)에서 구한 값 0.028 보다 작아지는 m의 최솟값은 m=9 이다.

7 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

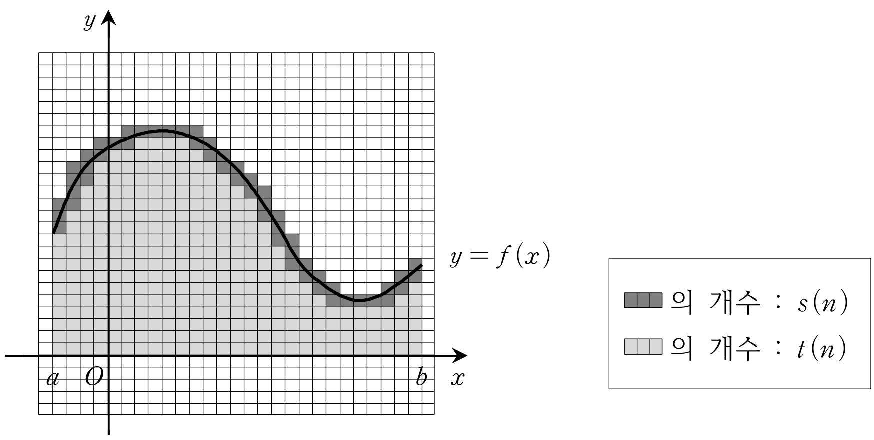
유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	부등식, 수열의 합, 수열의 극한, 정적분의 활용
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

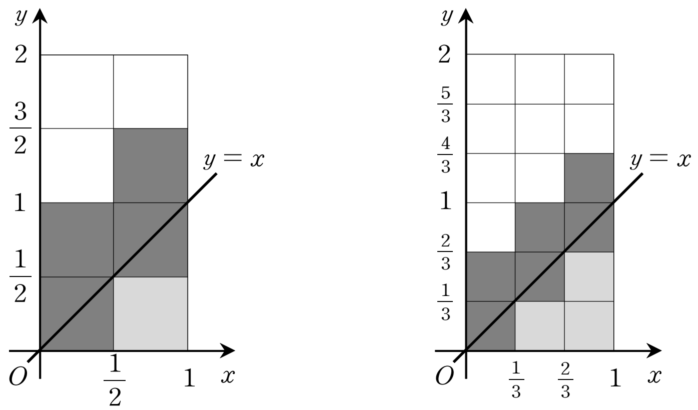
(가) 홍익이는 컴퓨터 화면에 그려진 함수의 그래프를 보고, 확대하면 작은 픽셀들로 그림이 그려지는 것을 확인하였다. 곡선을 그리는 픽셀들을 보고, 픽셀의 개수를 셈으로써 곡선의 길이, 그리고 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는지 궁금하였다.

픽셀들을 더 작게 하여 촘촘하게 하면서, 해당되는 픽셀의 개수와 픽셀의 넓이의 곱, 또는 해당되는 픽셀의 개수와 픽셀의 한 변의 길이의 곱 등의 극한을 취하면 영역의 넓이 또는 곡선의 길이와 관련이 있으리라 예상하였고, 아래 (나)와 같은 설정으로 시작하여 수식으로 확인하고자 하였다.



(나) 자연수 n에 대해, 좌표평면을 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정사각형으로 이루어진 모눈종이(격자)로 생각하자. 이때 x축과 y축을 모눈의 경계선 중에 포함한다. 여기에서는, 각 정사각형 영역은 옆쪽과 아래쪽 경계선은 포함하고 위쪽 경계선은 포함하지 않는다고 하자. 또한, 정사각형 영역이 곡선의 점을 하나라도 포함하는 경우 그 곡선을 만난다고 하자. 구간 $[a, b]$에서 정의되는 음이 아닌 값을 갖는 연속 함수 $f(x)$에 대해, $y=f(x)$의 그래프 곡선과 만나는 정사각형들의 개수를 $s(n)$이라 하고, x축과 곡선 사이에서 x축과는 만나도 되지만 그래프 곡선과는 만나지 않는 정사각형들의 개수를 $t(n)$이라 하자. 단, a, b는 정수만 고려하고, 구간 $[a, b]$를 넘어서는 정사각형은 고려하지 않는다.

예를 들어, 아래의 그림과 같이 구간 $[0, 1]$에서의 함수 $f(x)=x$에 대해, $s(2)=4$, $t(2)=1$이고, $s(3)=6$, $t(3)=3$이다.



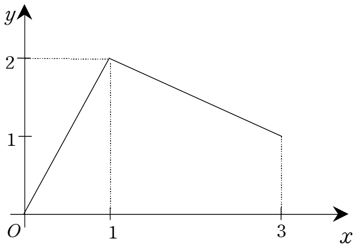
(1) 실수 c에 대해 가우스 기호 $[c]$는 c를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다. 즉 c에 대해 $m \le c < m+1$인 정수 m이 $[c]$의 값이다. 임의의 실수 c에 대해, 분모가 자연수 n이고 분자가 정수인 분수 중에서 c를 넘지 않는 가장 큰 분수를 가우스 기호를 이용하여 표시하시오.

(2) 닫힌 구간 $[a, b]$를 길이 $\frac{1}{n}$인 구간들로 분할하였을 때, k번째 구간에서의 $f(x)$의 최솟값을 m_k, 최댓값을 M_k라 하자. $s(n)$과 $t(n)$의 식을 가우스 기호와 $\sum$ 기호를 이용하여 나타내시오.

(3) 구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 식이 다음과 같다고 한다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x < 1) \\ -\frac{1}{2}(x-1)+2=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2} & (1 \le x \le 3) \end{cases}$$

주어진 $f(x)$에 대하여 $s(n)$와 $t(n)$을 자연수 n에 관한 다항식으로 나타내시오.



(4) 문항 (3)의 $f(x)$와 이에 대한 $s(n)$, $t(n)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$을 구하시오. 이 중에서 문항 (3)의 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이 영역의 넓이와 같은 것은 무엇인가? $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$은 $y=f(x)$의 그래프의 길이를 나타내는가?

3. 출제 의도

Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다.
수열의 극한에 대한 성질을 이해하고, 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문, 문항 (2), (3), (4)	**[미적분] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용** [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 (1)	**[수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다.
문항 (4)	**[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한** [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2018	73-104
	수학	김원경 외	비상	2018	71-98
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	75-98

	수학I	홍성복 외	지학사	2018	136-147
	수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2018	133-143
	수학I	황선욱 외	미래엔	2018	143-154
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	11-29, 161-186
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	10-28, 163-189
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	10-27, 160-180

5. 문항 해설

(1) 주어진 조건을 부등식으로 나타내고 문제에서 주어진 가우스 기호의 정의를 이용하여 구한다.

(2) 줄간격이 $\frac{1}{n}$인 모눈종이에 그려진 함수의 그래프를 생각한다. k번째 구간 위의 정사각형 중 문제에서 $s(n)$, $t(n)$을 구하는데 해당되는 정사각형의 개수를 구한다. $s(n)$, $t(n)$의 식을 Σ를 활용하여 나타낸다.

(3) 주어진 함수는 길이가 $\frac{1}{n}$인 각 구간에서의 증가(또는 감소)하므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 쉽게 구한다. (2)의 결과를 이용하여 $s(n)$, $t(n)$의 식을 구하고 정리한다.

(4) 수열의 극한을 구하고 넓이와 길이를 계산하여 비교한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 설명과 답안의 수식이 정확한 경우 (2점) - 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (1점)	2
(2)	- $s(n)$을 정확히 구함 (4점) - $t(n)$을 정확히 구함 (3점)	7
(3)	- $s(n)$을 합을 이용하여 정확히 구함 (3점) - $t(n)$을 합을 이용하여 정확히 구함 (4점)	7
(4)	- 세 극한을 (3)의 식을 이용하여 구하기 (2점) - 영역의 면적과 $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}$이 같음을 설명 (넓이의 값과 비교 또는 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 설명) (1점) - 그래프의 길이와 $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$의 값이 같지 않음을 설명 (길이 값 제시) (1점)	4

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) $\frac{m}{n}$이 문제에서 구하는 분수라면 $\frac{m}{n} \le c < \frac{m+1}{n}$ 이다. 즉, $m \le nc < m+1$ 이므로,

$m = [nc]$이고, $\frac{m}{n} = \frac{[nc]}{n}$이 된다.

(2) 줄간격이 $\frac{1}{n}$인 모눈종이에 함수의 그래프를 그렸다고 생각하자.

x축상의 두 점 a,b 사이에는 길이 $\frac{1}{n}$인 작은 구간이 $n(b-a)$개 있다.

k번째 소구간 위쪽의 정사각형(즉, 모눈종이의 칸) 중 그래프와 만나는 가장 아래쪽의 정사각형은 (1)에 의해 밑변의 높이(즉, y좌표)가 $\frac{[nm_k]}{n}$이고, 가장 위쪽의 정사각형은 밑변의 높이가 $\frac{[nM_k]}{n}$이 되어 그래프와 만나는 정사각형의 개수는 $[nM_k]-[nm_k]+1$이다.

k번째 소구간 위쪽의 정사각형들 중 그래프와 만나지 않고 그 아래쪽에 있는 것들은 위에서 구한 밑변의 높이가 $\frac{[nm_k]}{n}$인 정사각형 아래쪽의 정사각형들이므로 개수는 $[nm_k]$이다.

따라서, $s(n) = \sum_{k=1}^{n(b-a)} ([nM_k]-[nm_k]+1)$, $t(n) = \sum_{k=1}^{n(b-a)} [nm_k]$ 이다.

(3) 소구간에서 증가하는 함수는 최솟값을 소구간의 왼쪽 끝점에서, 최댓값을 오른쪽 끝점에서 가진다. 감소할 때는 반대이다. k번째 소구간은 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ $(k=1, 2, \cdots, 3n)$ 이므로 주어진 함수의 증가, 감소를 고려하면 각 소구간에서 최댓값, 최솟값은 아래와 같다.

$$M_k = \begin{cases} \frac{2k}{n} & 1 \le k \le n \\ -\frac{k-1}{2n}+\frac{5}{2} & n+1 \le k \le 3n \end{cases} \qquad [nM_k] = \begin{cases} 2k & 1 \le k \le n \\ \left[\frac{-k+1+5n}{2}\right] & n+1 \le k \le 3n \end{cases}$$

$$m_k = \begin{cases} \frac{2(k-1)}{n} & 1 \le k \le n \\ -\frac{k}{2n}+\frac{5}{2} & n+1 \le k \le 3n \end{cases} \qquad [nm_k] = \begin{cases} 2(k-1) & 1 \le k \le n \\ \left[\frac{-k+5n}{2}\right] & n+1 \le k \le 3n \end{cases}$$

(2)에 의해서
$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=1}^{3n} ([nM_k]-[nm_k]+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2k-2(k-1)+1) + \sum_{k=n+1}^{3n}\left(\left[\frac{-k+1+5n}{2}\right]-\left[\frac{-k+5n}{2}\right]+1\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 3 + \sum_{k=n+1}^{3n}\left(\left[\frac{-k+1+5n}{2}\right]-\left[\frac{-k+5n}{2}\right]\right) + \sum_{k=n+1}^{3n} 1 \end{aligned}$$

이다.

$\sum_{k=1}^{n} 3 = 3n$, $\sum_{k=n+1}^{3n} 1 = 2n$ 이고,

$$\sum_{k=n+1}^{3n}\left(\left[\frac{-k+1+5n}{2}\right]-\left[\frac{-k+5n}{2}\right]\right)$$
$$=\left(\left[\frac{4n}{2}\right]-\left[\frac{4n-1}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{4n-1}{2}\right]-\left[\frac{4n-2}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{4n-2}{2}\right]-\left[\frac{4n-3}{2}\right]\right)+\ \cdots\ +\left(\left[\frac{2n+1}{2}\right]-\left[\frac{2n}{2}\right]\right)$$
$$=\left[\frac{4n}{2}\right]-\left[\frac{2n}{2}\right]=2n-n=n$$

이다.

위 식의 두 번째 줄을 $2\times 2n$ 개의 항의 합으로 볼 때, 중간의 항들은 연이은 두 항씩 서로 상쇄되어 첫 항과 마지막 항만 남는다. 따라서, $s(n)=6n$ 이다.

마찬가지로, (2)에 의해

$$t(n)=\sum_{k=1}^{3n}[nm_k]=\sum_{k=1}^{n}2(k-1)+\sum_{k=n+1}^{3n}\left[\frac{-k+5n}{2}\right]\text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{3n}\left[\frac{-k+5n}{2}\right] &= \left[\frac{4n-1}{2}\right]+\left[\frac{4n-2}{2}\right]+\left[\frac{4n-3}{2}\right]+\left[\frac{4n-4}{2}\right]+\ \cdots\ +\left[\frac{2n}{2}\right]\\ &=\left[2n-\frac{1}{2}\right]+[2n-1]+\left[2n-1-\frac{1}{2}\right]+[2n-2]+\ \cdots\ +[n]\\ &=(2n-1)+(2n-1)+(2n-2)+(2n-2)+\ \cdots\ +n\\ &=\sum_{k=1}^{n}2(2n-k)\end{aligned}$$

이다. (위 식의 두 번째 줄에서 항은 $2n$개이며, 가우스 기호 안의 값은 $\frac{1}{2}$씩 줄어든다. 따라서 그 값은 세 번째 줄에서와 같이 $2n-1, 2n-2, \cdots, n$이 연달아 두 번씩 나타난다.)

$\sum_{k=1}^{n}2(k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2=n(n+1)-2n=n^2-n$ 이고,

$\sum_{k=1}^{n}2(2n-k)=\sum_{k=1}^{n}4n-2\sum_{k=1}^{n}k=4n^2-n(n+1)=3n^2-n$ 이므로,

정리하면 $t(n)=4n^2-2n$ 이다.

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n^2}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n}{n^2}=4$, $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n}=6$ 이다.

$t(n)$은 그래프의 아래 x축 위쪽의 정사각형들의 개수이고, $\frac{1}{n^2}$는 각 정사각형의 넓이이므로 $\frac{t(n)}{n^2}$는 이 정사각형들의 넓이의 합이다. 그 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}$은 그래프와 x축 사이의 넓이이다. 실제로 그래프와 x축 사이의 넓이를 계산하면 (문제의 그림에서 삼각형과 사다리꼴의 넓이의 합) $\frac{1}{2}\times 1\times 2+2\times\frac{(2+1)}{2}=4$ 이다.

주어진 함수 그래프의 길이는 $(0, 0)$과 $(1, 2)$를 잇는 선분의 길이와 $(1, 2)$와 $(3, 1)$을 잇는 선분의 길이의 합이므로 $\sqrt{1+4}+\sqrt{4+1}=2\sqrt{5}$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$는 그래프의 길이를 나타내지 않는다.

8 자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 기하
	핵심개념 및 용어	벡터, 이차함수
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

홍익대학교에는 문헌관, 공학관, 와우관, 홍문관이라 부르는 네 건물이 있다. 학생들의 편의를 위해 <그림 1>과 같이 캠퍼스를 원형으로 순환하는 트램을 설치하고자 한다. 트램 노선에서 건물까지의 거리를 고려하여 트램 노선의 반지름 r를 정하고자 한다. (단, 트램 노선의 너비와 건물의 크기는 무시한다.)

(가) 원점 O에 대한 네 건물의 위치벡터는 각각 다음과 같다.

$$\overrightarrow{x_1}=(4,4),\ \overrightarrow{x_2}=(5,0),\ \overrightarrow{x_3}=(2,3),\ \overrightarrow{x_4}=(1,1)$$

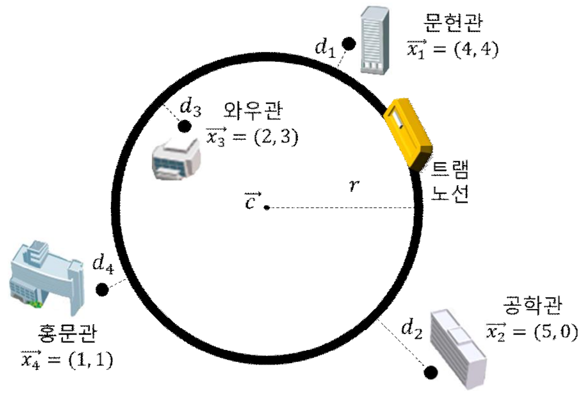
(나) 트램의 노선은 반지름이 r인 원 모양이며, 원점 O에 대한 그 원의 중심의 위치벡터 $\overrightarrow{c}$는 다음과 같다.

$$\overrightarrow{c}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}+\overrightarrow{x_4}\right)$$

(다) 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리를 각각 d_1, d_2, d_3, d_4라고 하자.

(라) 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리의 제곱의 합 S_4를 $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$으로 정의하자.

(마) 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리 중 최대 거리 M_4를 d_1, d_2, d_3, d_4 중 최댓값으로 정의하자.



<그림 1>

(1) 제시문의 (라)에서 정의된 S_4가 최솟값을 가질 때 반지름 r를 구하시오.

(2) 제시문의 (마)에서 정의된 M_4가 최솟값을 가질 때 반지름 r를 구하시오.

(3) 건물이 n개가 있다고 가정하고 제시문과 같이 원 모양의 트램 노선을 설치하려고 한다. 각 건물의 위치벡터 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$과 트램 노선의 중심의 위치벡터 $\vec{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{x_i}$가 주어졌을 때, 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리의 제곱의 합 $S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$이 최솟값을 가질 때 반지름 r를 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$과 $\vec{c}$에 대한 식으로 나타내시오.

3. 출제 의도

실생활에서 고등학교 수학 교육과정에서 배운 개념들을 활용하여 주어진 조건에서 해를 찾는 문제에 적용하고 해결할 수 있는지를 평가한다. 또한, 좌표평면과 벡터의 성질을 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.

(1) 위치벡터의 개념을 이해하고 평면벡터와 좌표의 대응을 활용할 수 있는지 평가한다.

(2) 평면벡터의 크기와 좌표상의 거리의 개념, 원의 성질을 활용하여 문제의 조건에 맞는 함수를 찾을 수 있는지 평가한다.

(3) 이차함수의 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문, 문항 (1), (2), (3)	**[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (1), (3)	**[수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수** [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 (2)	**[수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.
문항 (3)	**[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ② 수열의 합** [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	46-107
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2018	60-72
	수학	김원경 외	비상교육	2018	43-98
	수학Ⅰ	홍성복 외	지학사	2020	136-147
	수학Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2018	140-147
	수학Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2018	133-143
	기하	홍성복 외	지학사	2019	58-115
	기하	권오남 외	교학사	2019	62-117
	기하	이준열 외	천재교육	2019	60-113

5. 문항 해설

(1) 문제에서 주어진 각 건물의 위치벡터를 이용해 원의 중심으로부터 각 건물까지의 거리를 구한다. 트램노선은 반지름 r인 원이므로 이 거리와 r의 차이가 각 건물에서 트램 노선까지의 최단 거리이다. 최단 거리 제곱의 합은 r에 대한 이차함수이므로, 최솟값을 가질 때의 r를 구할 수 있다.

(2) 반지름 r의 범위에 따라 트램노선에서 가장 멀리 있는, 즉, 최대 거리를 가지는 건물이 바뀐다. r의 범위에 따라 최대 거리가 되는 건물과 그 거리를 찾는다. 이 값이 최소가 되는 r를 구한다.

(3) 문항 (1)에서와 같은 방법을 이용한다. 각 건물의 위치 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ 로부터 트램노선의 중심 $\vec{c}$ 까지의 거리는 $|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 이다. 트램노선까지의 최단 거리는 이 거리와 r의 차이이고 최단 거리의 제곱의 합을 구하면 r에 대한 이차함수이다. 따라서 최솟값을 가질 때의 r을 찾을 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리를 구함 (2점) 최단 거리의 제곱의 합을 r에 대한 이차함수로 구함 (2점) 해당 이차함수가 최솟값을 갖는 r을 구함 (2점)	6
(2)	$d_{1,} d_{2,} d_{3,} d_4$ 중 최대 거리가 될 수 있는 것은 d_2와 d_3임을 확인함 (3점) r의 범위에 따라 M_4를 구하고 문제에서 요구하는 r을 구함 (3점)	6
(3)	$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ 와 $\vec{c}$ 를 이용하여, 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리를 구함 (2점) 최단 거리의 제곱의 합을 r에 대한 이차함수로 구함 (3점) 해당 이차함수가 최솟값을 갖는 r을 구함 (3점)	8

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 트램 노선의 중심의 위치벡터는 $\vec{c} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3} + \overrightarrow{x_4}\right) = (3, 2)$ 이다.

노선의 중심으로부터 각 건물까지의 거리는 각각 $\left|\overrightarrow{x_1} - \vec{c}\right| = |(1,2)| = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{x_2} - \vec{c}\right| = |(2,-2)| = 2\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{x_3} - \vec{c}\right| = |(-1,1)| = \sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{x_4} - \vec{c}\right| = |(-2,-1)| = \sqrt{5}$ 이다.

따라서 각 건물로부터 트램 노선까지의 최단 거리는 각각 $d_1 = |\sqrt{5} - r|$, $d_2 = |2\sqrt{2} - r|$, $d_3 = |\sqrt{2} - r|$, $d_4 = |\sqrt{5} - r|$ 이다. 최단 거리의 제곱의 합 $S_4 = \left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2\right)$는

$$\begin{aligned} S_4 &= (\sqrt{5} - r)^2 + (2\sqrt{2} - r)^2 + (\sqrt{2} - r)^2 + (\sqrt{5} - r)^2 \text{이다.} \\ &= 4r^2 - (6\sqrt{2} + 4\sqrt{5})r + 20 \end{aligned}$$

S_4는 r에 대한 이차함수이다. 그래프가 아래로 볼록인 포물선이므로 $\frac{d}{dr}S_4 = 0$ 인 $r = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{4}$ 에서 최소이다.

(또는, $S_4 = 4\left(r - \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{21 - 6\sqrt{10}}{2}$와 같이 정리하여 최소가 되는 r을 구한다.)

(2) 트램 노선의 중심으로부터 가장 가까운 건물과 먼 건물은 각각 와우관, 공학관이며, 중심으로부터의 거리는 각각 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ 이다. 이 두 거리의 평균인 $r=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 을 기준으로 $r \le \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 인 경우, (1)에서 구한 트램 노선으로부터 각 건물까지의 거리 d_1, d_2, d_3 중 $d_2 = |2\sqrt{2}-r|$ 가 최대이다. 즉, 이 경우 $M_4 = d_2 = |2\sqrt{2} - r| = 2\sqrt{2} - r$ 이다. $r \ge \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 인 경우, $d_3 = |\sqrt{2}-r|$ 가 최대가 된다.

즉, 이 경우 $M_4 = d_3 = |\sqrt{2} - r| = r - \sqrt{2}$ 이다.

그래프를 그려보면 $r=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 는 에서 최솟값을 가진다.

(3) (1)에서와 같이 생각한다.

각 건물의 위치 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ 로부터 트램노선의 중심 $\vec{c}$ 까지의 거리는 $|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|$ 이고,

각 건물에서 노선까지의 최단 거리는 $d_i = \left| |\overrightarrow{x_i} - \vec{c}| - r \right|$ 이다. $(i = 1, 2, \cdots, n)$

최단 거리의 제곱의 합은

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}| - r \right)^2 = nr^2 - 2r\sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{x_i} - \vec{c}| + \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|^2 \text{이다.}$$

S_n 는 r 에 대한 이차함수이다. 그래프가 아래로 볼록인 포물선이므로 $\frac{d}{dr}S_n = 0$ 인

$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|$ 에서 최소이다.

(또는, $S_n = n\left(r - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|\right)^2$ 와 같이 정리하여 최소가 되는 r 을 구한다.)

9 자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	정적분의 활용
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

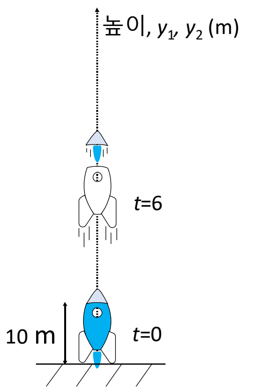
2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

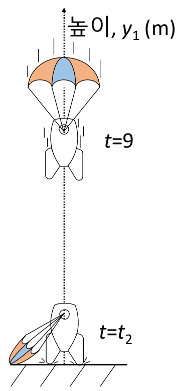
홍익이는 낙하산을 이용하여 우주발사체의 추진체를 재활용하는 기술을 접하였고, 머리와 추진체로 분리되는 물 로켓을 만들고 추진체를 재활용하고자 추진체에 낙하산을 설치하였다. 그리고 $t=0$초에서 물 로켓을 지면으로부터 수직 방향으로 발사하였다. 시각 t에서의 지면으로부터 물 로켓 추진체 밑면의 높이를 $y_1(t)$ m, 물 로켓 머리의 높이를 $y_2(t)$ m라 하자. <그림 1>과 같이 발사 후 $t=6$까지 물 로켓은 머리와 추진체가 같이 움직이고, $t=6$에서 물 분사를 멈추고 머리와 추진체로 분리된다. <그림 2>와 같이 추진체는 $t=9$에서 최고 높이에 도달하고 낙하산이 펴진다. 낙하산에 의하여 $t=12$까지 추진체의 속도가 시간에 따라 변한다. 그 후 착륙할 때까지의 속도는 일정하다. $t=t_2$에서 추진체는 지면에 착륙한다. <그림 3>과 같이 물 로켓 머리의 속도는 $t=6$ 이후 일정하다가 $t=t_1$에서 예상치 못한 돌풍이 발생하여 시간에 따라 변한다. 이를 정리하면, 시각 t에서의 물 로켓 추진체의 속도 $v_1(t)$ m/s와 물 로켓 머리의 속도 $v_2(t)$ m/s는 다음과 같다. (단, $y_1(0)=0$, $y_2(0)=10$ 이다.)

$$v_1(t)=\begin{cases} 20t-\frac{5}{2}t^2 & (0\le t<6) \\ 90-10t & (6\le t<9) \\ -10+\frac{10}{27}(12-t)^3 & (9\le t<12) \\ -10 & (12\le t\le t_2) \end{cases}$$

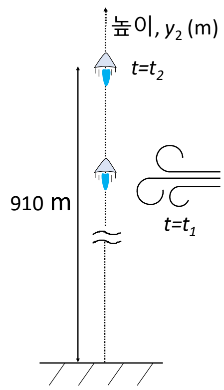
$$v_2(t)=\begin{cases} 20t-\dfrac{5}{2}t^2 & (0\le t<6) \\ 30 & (6\le t<t_1) \\ \dfrac{30}{t_2-t_1}(t_2-t) & (t_1\le t\le t_2) \end{cases}$$



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

(1) $t=6$에서 물 로켓이 머리와 추진체로 분리될 때, 머리의 높이 $y_2(6)$의 값을 구하시오.

(2) $t=12$에서 추진체 밑면의 높이 $y_1(12)$의 값을 구하시오.

(3) 추진체가 착륙한 시각 $t=t_2$에서 머리의 높이가 $y_2(t_2)=910$ m일 때, 돌풍이 발생한 시각 t_1을 구하시오.

3. 출제 의도

우주발사체의 재활용 기술이 주목받는 가운데, 학생들이 관심을 가질 수 있는 대상 중 수학적 해석이 가능한 대상을 문제의 배경으로 삼았다. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

(1) 속도와 거리에 대한 관계를 이해하고 정적분을 활용하여 속도가 주어졌을 때 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 구간을 나누어 함수를 적분할 수 있는지 평가한다.

(3) 속도와 거리의 상호 관계를 이해하는지 평가한다. 주어진 조건으로부터 식을 구하고 해를 찾아낼 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 문항(1), (2), (3)	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	132-154
	수학 Ⅱ	황선욱 외 8인	미래엔	2019	135-148
	수학 Ⅱ	김원경 외 14인	비상교육	2018	125-138

5. 문항 해설

(1) 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 물 로켓 머리가 상승한 높이를 속도를 적분하여 구한다. $t=0$일 때 물 로켓 머리의 높이 $y_2(0)$을 더하여 $t=6$일 때 높이 $y_2(6)$를 구한다.

(2) (1)에서와 같이 $t=12$일 때 추진체 밑면의 높이 $y_1(12)$는 시각 $t=0$에서 $t=12$까지 추진체 속도 $v_1(t)$를 적분하고 $t=0$일 때 높이 $y_1(0)$를 더한 값이다.

(3) (2)에서와 같이 추진체의 속도 $v_1(t)$를 적분하여 $y_1(t_2)$를 구한다. 한편, 추진체가 착륙한 시각 t_2에서는 추진체가 착륙하였기 때문에 $y_1(t_2)=0$이다. 이로부터 t_2를 구한다. (1)에서와 같이 $t=t_2$일 때 로켓 머리의 높이 $y_2(t_2)$를 구하고 주어진 값과 비교하여 돌풍이 발생한 시각 t_1을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	정적분을 활용하여 $y_2(6)$의 식을 구하고 값을 계산함	4
(2)	정적분을 활용하여 $y_1(12)$의 식을 구하고 값을 계산함	4
(3)	정적분을 활용하여 $y_1(t_2)$를 구하고, $y_1(t_2)=0$으로부터 t_2를 구함 (6점) 정적분을 활용하여 $y_2(t_2)$를 구하고, $y_2(t_2)=910$으로부터 t_1를 구함 (6점)	12

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) $\dfrac{dy_2}{dt}=v_2$ 이므로 $y_2(6)$는 다음과 같이 $v_2(t)$를 적분하여 구할 수 있다.

$$y_2(6)=y_2(0)+\int_0^6 v_2(t)dt=10+\int_0^6\left(20t-\frac{5}{2}t^2\right)dt$$

$$=10+\left[10t^2-\frac{5}{6}t^3\right]_0^6=10+360-180=190\ \text{ m}$$

(2) 마찬가지로 $\dfrac{dy_1}{dt}=v_1$ 이므로 $y_1(12)$는 다음과 같이 $v_1(t)$를 적분하여 구할 수 있다.

$$y_1(12)=y_1(0)+\int_0^{12}v_1(t)\,dt=\int_0^6\left(20t-\frac{5}{2}t^2\right)dt+\int_6^9(90-10t)dt+\int_9^{12}\left\{-10+\frac{10}{27}(12-t)^3\right\}dt$$

$$=\left[10t^2-\frac{5}{6}t^3\right]_0^6+\left[90t-5t^2\right]_6^9+\left[-10t-\frac{5}{54}(12-t)^4\right]_9^{12}$$

$$=(360-180)+\{(810-405)-(540-180)\}+\left\{(-120-0)-(-90-\frac{15}{2})\right\}=\frac{405}{2}\ \text{ m}$$

(3) $12\le t\le t_2$에서 $v_1(t)=-10$ 이고 문항 (2)에서 $y_1(12)=\dfrac{405}{2}$이므로 $y_1(t_2)=0$인 시간 t_2는

$0=y_1(t_2)=y_1(12)+\displaystyle\int_{12}^{t_2}v_1(t)\,dt=\frac{405}{2}-10(t_2-12)$ 로부터 $t_2=12+\dfrac{405}{20}=\dfrac{129}{4}$ 이다.

문항 (1)에서 $y_2(6)=190$ 이고 주어진 조건에 의해 $y_2(t_2)=910$ 이므로

$$\begin{aligned}910=y_2(t_2)&=y_2(6)+\int_6^{t_2}v_2(t)\,dt=y_2(6)+\int_6^{t_1}v_2(t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}v_2(t)\,dt\\&=190+\int_6^{t_1}30\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{30}{t_2-t_1}(t_2-t)\,dt\\&=190+30(t_1-6)+\left[-\frac{15}{t_2-t_1}(t_2-t)^2\right]_{t_1}^{t_2}=190+30(t_1-6)+\frac{15}{t_2-t_1}(t_2-t_1)^2\\&=10+15t_1+15t_2\end{aligned}$$

로부터 $t_1=\dfrac{900}{15}-t_2=60-\dfrac{129}{4}=\dfrac{111}{4}$ 이다.

10 자연계열 논술고사 (오후)

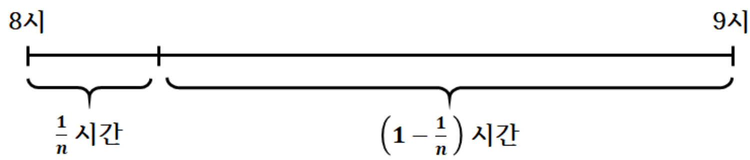
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	확률의 곱셈정리, 도함수, 수열의 극한
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

(가) 홍익이는 등교하기 위하여 집 앞 버스 정류장에서 매일 아침 8시 정각부터 학교 버스를 기다리기 시작한다. 홍익이가 타려는 학교 버스는 매일 아침 8시부터 9시까지 한 시간 동안 임의의 시각에 무작위로 한 번 정류장에 도착한다. 자연수 n에 대하여 홍익이가 n일 동안 등교한다고 할 때, n일 동안 하루도 빠짐없이 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간 동안 홍익이가 버스를 기다리는 사건을 A_n이라고 하자.



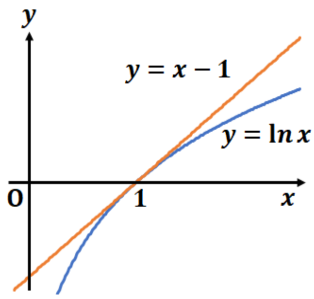
<그림 1>

(나) 로그함수 $y=\ln x$는 다음 성질을 만족한다.

(a) 함수 $y=\ln x$는 무리수 e를 밑으로 하는 로그함수이며, $e=2.718\cdots$임이 알려져 있다.

(b) 로그함수 $y=\ln x$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다.

(c) 1이 아닌 양의 실수 x에 대하여 부등식 $\ln x < x-1$이 성립한다.



<그림 2>

(1) 사건 A_1과 A_2가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A_1)$과 $\mathrm{P}(A_2)$를 각각 구하시오.

(2) 사건 A_n이 일어날 확률 $\mathrm{P}(A_n)$을 구하시오.

(3) 정의역이 $\{x \mid x>1\}$인 함수 $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$에 대하여 $\frac{d}{dx}\ln f(x)$를 구하시오.

(4) 제시문의 (나)와 문항 (3)의 결과를 이용하여 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_{n+1})>\mathrm{P}(A_n)$임을 보이시오.

(5) 홍익이가 n일 동안 적어도 한 번 이상 $\frac{1}{n}$시간보다 짧은 시간 동안 버스를 기다리는 사건을 B_n이라고 하자. 사건 B_n이 일어날 확률을 $\mathrm{P}(B_n)$이라고 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(B_n)>\frac{1}{2}$임을 보이시오.

3. 출제 의도

독립시행의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 로그함수와 합성함수의 도함수를 구할 수 있는지 평가한다. 도함수를 이용하여 함수의 증가, 감소를 파악하고 부등식에 활용할 수 있는지 평가한다. 수열의 극한을 구하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문, 문항(1)	**[확률과통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.
제시문, 문항(3)	**[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
문항 (1), (2)	**[확률과통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (3)	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ② 도함수** [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
제시문, 문항 (4)	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 (5)	**[확률과통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. **[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한** [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박교식 외	동아출판(주)	2019	66-69, 81-86
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2021	65-68, 101-103
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	43-78
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	60-66
	수학Ⅱ	이준일 외	천재교육	2018	60-64
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	83-89
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	11-15, 53-58, 60-62, 86-89

	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	11-26, 49-57, 76-84
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	11-15, 51-56, 88-93

5. 문항 해설

(1) 확률의 곱셈정리를 활용하여 n이 1일 때와 2일 때의 사건 A_1과 A_2가 일어날 확률을 각각 구한다.

(2) 각각의 날에 주어진 시간보다 오래 버스를 기다리는 사건은 서로 독립이다. 독립시행의 확률에 따라 확률 $\mathrm{P}(A_n)$을 구한다.

(3) 로그함수, 합성함수의 미분법을 활용하여 주어진 함수의 도함수를 구한다.

(4) 제시문에 주어진 로그함수의 성질과 문항 (3)의 결과를 활용한다.

(5) 수열 $\{\mathrm{P}(A_n)\}$의 극한값 $\frac{1}{e}$을 구하고, 이와 (4)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_n) < \frac{1}{2}$ 임을 보인다. 따라서, 여사건의 확률로부터 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(B_n) > 1 - \frac{1}{2}$이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	확률 $\mathrm{P}(A_1) = 0$을 구함 (1점) 확률 $\mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{4}$을 구함 (1점)	2
(2)	확률 $\mathrm{P}(A_n)$을 구함	2
(3)	로그함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구함	2
(4)	함수 $f(x)$가 구간 $(1, \infty)$에서 증가하는 함수임을 보임 (5점) 확률 $\mathrm{P}(A_n)$은 함숫값 $f(n)$과 같음을 이용하여 $\mathrm{P}(A_{n+1}) > \mathrm{P}(A_n)$을 보임 (2점)	7
(5)	사건 B_n은 사건 A_n의 여사건임을 보임 (1점) 수열 $\{\mathrm{P}(A_n)\}$의 극한값을 구함 (3점) 문항 (4)의 결과를 이용하여 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(B_n) > \frac{1}{2}$임을 설명함 (3점)	7

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 학교 버스는 8시와 9시 사이에 도착하므로, $n=1$일 때 홍익이가 $\frac{1}{n}=1$시간보다 더 기다리는 사건 A_1이 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A_1)=0$이다. $n=2$일 때 첫날, 둘째날 각각 홍익이가 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$시간보다 더 기다리는 사건의 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 두 사건은 서로 독립이므로 A_2가 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이다.

(2) (1)에서와 같이 생각한다. 임의의 등교일에 홍익이가 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간 동안 버스를 기다리는 사건의 확률은 $1-\frac{1}{n}$이고, 각각의 등교일에 홍익이가 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간 동안 버스를 기다리는 사건은 서로 독립이다. 따라서, 독립시행의 확률에 따라 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$이다.

(3) 정의역이 $\{x\,|\,x>1\}$인 함수 $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$에 대하여 $\ln f(x)=x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$이다. 따라서, 함수 $\ln f(x)$을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}$을 얻는다.

(4) 모든 실수 $x>1$에 대하여 $\frac{x}{x-1}>1$을 만족하므로, 제시문 (나)의 (c)를 활용하면,

$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<\frac{x}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}$이다.

위의 부등식과 문항 (3)의 결과로부터

$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}=-\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{1}{x-1}>0$이다.

즉, 함수 $\ln f(x)$은 구간 $(1,\infty)$에서 증가하는 함수이다. 따라서, 제시문 (나)의 로그함수의 성질 (b)를 활용하여 함수 $f(x)$도 구간 $(1,\infty)$에서 증가하는 함수임을 알 수 있다.

문항 (1)의 결과로부터 $\mathrm{P}(A_1)=0$, $\mathrm{P}(A_2)=\frac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(A_1)<\mathrm{P}(A_2)$이다. 또한, 1보다 큰 자연수 n에 대하여 확률 $\mathrm{P}(A_n)$은 함숫값 $f(n)$과 같고, 함수 $f(x)$가 구간 $(1,\infty)$에서 증가하는 함수이므로, $\mathrm{P}(A_{n+1})>\mathrm{P}(A_n)$이다. 따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_{n+1})>\mathrm{P}(A_n)$이다.

(5) 사건 B_n은 사건 A_n의 여사건이므로, $\mathrm{P}(B_n)=1-\mathrm{P}(A_n)$이다. 따라서, $\mathrm{P}(A_n)<\frac{1}{2}$이면 $\mathrm{P}(B_n)>\frac{1}{2}$이므로, 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_n)<\frac{1}{2}$임을 보이면 충분하다.

수열 $\{\mathrm{P}(A_n)\}$의 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0+}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0-}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{e}\text{이다.}$$

만약 어떤 자연수N 에 대하여 $\mathrm{P}(A_N)\geq\frac{1}{2}$이라면, 문항 (4)의 결과에 의하여

$\frac{1}{2}\leq\mathrm{P}(A_N)<\mathrm{P}(A_{N+1})<\mathrm{P}(A_{N+2})<\cdots$이므로, 수열의 극한의 대소관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n)=\frac{1}{e}\geq\frac{1}{2}$이다. 이는 제시문 (나)의 (a)에 모순이므로, 모든 자연수 n에 대하여

$\mathrm{P}(A_n)<\frac{1}{2}$이다.