

[이학계열 1번]

1. 문항 및 제시문

【문제 1】 (70점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오.(답만 기재하면 0점 처리)

가) 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등차중항이라 하고 $2b = a + c$ 를 만족시킨다.
 0이 아닌 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등비중항이라 하고 $b^2 = ac$ 를 만족시킨다.

나) 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a) = 0$ 이고, $x = a$ 의 좌우에서
 (1) $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이다.
 (2) $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이다.

다) 어떤 기준에 따라 대상을 분명하게 정할 수 있을 때, 그 대상들의 모임을 집합이라 한다. 이때 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 원소라고 한다. 두 집합 A, B 에 대하여 A 에도 속하고 B 에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A 와 B 의 교집합이라 하고 이를 기호로 $A \cap B$ 와 같이 나타낸다.

라) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 할 때,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

이다.

【문제 1-1】 함수 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (1) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 교점의 개수가 2이기 위한 두 실수 a 와 b 의 값의 범위를 각각 구하시오.
- (2) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 곡선 $y = (x + p)(x + 2p)$ 의 교점의 개수가 3이기 위한 실수 p 의 값의 범위를 구하시오.

【문제 1-2】 서로 다른 세 실수 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루고 $abc = 8$ 이다. 세 실수 a, b, c 를 다른 순서로 적당히 나열하여 등차수열을 만들 수 있을 때, 세 실수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 를 모두 구하시오.

【문제 1-3】 함수 $f(x) = 2x - x^2$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 만나는 두 점을 각각 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$ 이라 하자. $0 < b < 2$ 인 실수 b 에 대하여 점 $B(b, f(b))$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이고, 선분 OB 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $C(c, f(c))$ ($0 < c < b$)는 삼각형 OBC 의 넓이가 최대가 되게 하는 점이다. 사각형 $OABC$ 의 넓이의 최댓값을 구하시오.

【문제 1-4】 전체집합 $U = \{f(x) | f(x) = ax + b, a, b \text{는 실수}\}$ 의 세 부분집합

$$A = \left\{ f(x) \left| \int_0^1 f(x)(3x-1)dx = 0 \right. \right\}$$

$$B = \left\{ f(x) \left| \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 1 \right. \right\}$$

$$C = \left\{ f(x) \left| \int_0^1 \{f(x) - (3x-1)\}^2 dx = 1 \right. \right\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $f(x) \in A$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 항상 점 P를 지난다. 점 P의 좌표를 구하시오.

(2) $f(x) \in A \cap B$ 일 때, $\int_0^1 \{f(x) - (3x-1)\}^2 dx$ 의 값을 구하시오.

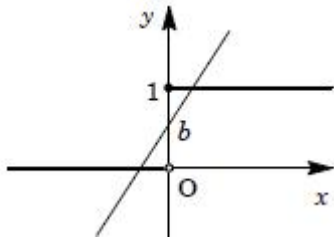
(3) $f(x) \in B \cap C$ 인 함수 $f(x)$ 를 모두 구하시오.

2. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]

(1) (6점)

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 교점의 개수가 2이기 위해서는 다음과 같아야 한다.



-----[2점]

따라서 직선 $y = ax + b$ 가 $y = f(x)$ 의 그래프와 2개의 교점을 가지려면 직선의 y 절편 b 는 0초과 1 이하여야 하고 기울기 a 는 0보다 커야 한다.

따라서 $a > 0, 0 < b \leq 1$

-----[4점]

정답) $a > 0, 0 < b \leq 1$

(2) (7점)

곡선 $y = (x+p)(x+2p)$ 는 $p \neq 0$ 이면 서로 다른 두 점 $(-p, 0), (-2p, 0)$ 에서 x 축과 만난다.

-----[2점]

곡선 $y = (x+p)(x+2p)$ 가 $y = f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면 곡선 $y = (x+p)(x+2p)$ 는 $x < 0$ 에서 두 점에서 x 축과 만나고 y 축과 교점의 y 좌표는 0 초과 1 이하여야 한다.

-----[2점]

따라서 $p > 0$ 이고 $0 < 2p^2 \leq 1$ 이므로 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

즉 $0 < p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

-----[3점]

$$\text{정답) } 0 < p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[문제 1-2]

(15점)

a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $b^2 = ac$ 이고

$$8 = abc = b^3 \text{ 이므로 } b = 2, ac = 4$$

-----[3점]

세 실수 a, b, c 를 다른 순서로 나열하면 등차수열이므로 다음과 같이

(i) b 가 등차중항인 경우

(ii) a 가 등차중항인 경우

(iii) c 가 등차중항인 경우

의 세 가지 경우가 있다. 각 경우를 살펴보자.

(i) b 가 등차중항인 경우

$$\text{그러면 } 2b = a + c \text{이고 } b = 2 \text{이므로 } a + c = 4$$

$$ac = 4 \text{이므로 } a \text{와 } c \text{는 } t^2 - (a+c)t + ac = 0 \text{의 두 근이다. 그러므로 } a = c = 2$$

$$\text{따라서 } a = 2, b = 2, c = 2$$

하지만 a, b, c 가 서로 다르다는 가정을 만족하지 않는다.

-----[3점]

(ii) a 가 등차중항인 경우

$$\text{그러면 } 2a = b + c = 2 + c \text{이고 } c = 2a - 2$$

$$ac = 4 \text{이므로 } 2a^2 - 2a = 4 \text{이고, } 2(a^2 - a - 2) = 2(a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\text{그러므로 } a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

하지만 $a = 2$ 이면 $c = 2$ 가 되어 a, b, c 가 서로 다르다는 가정을 만족하지 않는다.

$$\text{따라서 } a = -1, b = 2, c = -4$$

-----[3점]

(iii) c 가 등차중항인 경우

$$\text{그러면 } 2c = a + b = a + 2 \text{이고 } a = 2c - 2$$

$$ac = 4 \text{이므로 } 2c^2 - 2c = 4 \text{이고, } 2(c^2 - c - 2) = 2(c - 2)(c + 1) = 0$$

$$\text{그러므로 } c = -1 \text{ 또는 } c = 2$$

하지만, $c = 2$ 이면 $a = 2$ 가 되어 a, b, c 가 서로 다르다는 가정을 만족하지 않는다.

$$\text{따라서 } a = -4, b = 2, c = -1 \text{ 이다.}$$

-----[3점]

결국 구하는 세 실수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 는 $(-1, 2, -4), (-4, 2, -1)$ 이다.

-----[3점]

$$\text{정답) } (-1, 2, -4), (-4, 2, -1)$$

[문제 1-3]

(17점)

점 $B(b, 2b - b^2)$ 라 하면 $0 < b < 2$ 이고, 선분 OB의 길이는

$$\sqrt{b^2 + (-b^2 + 2b)^2} = b\sqrt{1 + (b-2)^2}$$

직선 OB의 방정식은 $y = \frac{2b-b^2}{b}x = (2-b)x$

-----[2점]

이제 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $C(c, 2c - c^2)$ 와 직선 OB 사이의 거리는

$$\frac{|(2-b)c - (-c^2 + 2c)|}{\sqrt{1 + (2-b)^2}} = \frac{|c^2 - bc|}{\sqrt{1 + (2-b)^2}}$$

그러므로 삼각형 OBC의 넓이는

$$\frac{1}{2}(\text{선분 OB의 길이}) \times (\text{점 C와 직선 OB 사이의 거리})$$

$$= \frac{1}{2}(b\sqrt{1 + (b-2)^2}) \frac{|c^2 - bc|}{\sqrt{1 + (2-b)^2}} = \frac{b}{2}|c^2 - bc|$$

그런데 $0 < t < b$ 인 실수 t 에 대하여 점 $P(t, 2t - t^2)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이고 선분 OB에 대하여 삼각형 OBP의 넓이를 구하면

$$\begin{aligned}(\text{삼각형 OBP의 넓이}) &= \frac{b}{2}|t^2 - bt| \\&= \frac{b}{2}(bt - t^2) \\&= -\frac{b}{2}\left(\left(t - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}\right) \\&\leq \frac{b^3}{8}\end{aligned}$$

그러므로 $t = \frac{b}{2}$ 일 때, 삼각형 OBP의 넓이가 최대이다. 따라서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{b}{2}, b - \frac{b^2}{4}\right)$ 이다.

-----[4점]

이제 사각형 OABC의 넓이의 최댓값을 구하면

(사각형 OABC의 넓이) = (삼각형 OBC의 넓이) + (삼각형 OAB의 넓이)

$$\begin{aligned}&= \frac{b^3}{8} + \frac{1}{2} \times 2 \times (-b^2 + 2b) \\&= \frac{b^3}{8} - b^2 + 2b\end{aligned}$$

-----[3점]

$g(b) = \frac{b^3}{8} - b^2 + 2b$ 라 하면

$$g'(b) = \frac{3}{8}b^2 - 2b + 2 = \frac{1}{8}(3b-4)(b-4)$$

$$b = \frac{4}{3} \text{ 또는 } b = 4 \text{일 때 } g'(b) = 0$$

-----[3점]

$y = g(b)$ 의 증감표는 다음과 같다.

b	0	...	$\frac{4}{3}$...	2
$g'(b)$		+	0	-	
$g(b)$	0	\nearrow	$\frac{32}{27}$	\searrow	0

-----[3점]

따라서 사각형 OABC의 넓이의 최댓값은 $\frac{32}{27}$ 이다.

-----[2점]

정답) $\frac{32}{27}$

[문제 1-4]

(1) (6점)

일차함수 $f(x) = ax + b$ 를 집합 A 의 원소라 하면 $\int_0^1 (3x-1)f(x)dx = 0$ 이 성립한다.

-----[1점]

따라서

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (3x-1)(ax+b)dx &= \int_0^1 \{3ax^2 + (3b-a)x - b\}dx \\
 &= \left[ax^3 + \frac{1}{2}(3b-a)x^2 - bx \right]_0^1 \\
 &= a + \frac{1}{2}(3b-a) - b \\
 &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0
 \end{aligned}$$

이고 $b = -a$

-----[3점]

따라서 모든 실수 a 에 대해 $f(x) = ax - a = a(x-1)$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 a 에 상관없이 항상 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

-----[2점]

정답) $(1, 0)$

(2) (8점)

일차함수 $f(x)$ 가 집합 $A \cap B$ 의 원소라 하면, $f(x)$ 는 집합 A 의 원소이므로

$$\int_0^1 f(x)(3x-1)dx = 0$$

또한 $f(x)$ 는 집합 B 의 원소이므로 $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 1$

-----[2점]

따라서

$$\int_0^1 \{f(x) - (3x-1)\}^2 dx = \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx - 2 \int_0^1 f(x)(3x-1)dx + \int_0^1 (3x-1)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 0 + \int_0^1 (9x^2 - 6x + 1)dx \\
&= 1 + [3x^3 - 3x^2 + x]_0^1 \\
&= 1 + 3 - 3 + 1 = 2
\end{aligned}$$

-----[6점]

정답) 2

(3) (11점)

일차함수 $f(x) = ax + b$ 를 집합 $B \cap C$ 의 원소라 하자. 그러면 $f(x)$ 는 집합 B 의 원소이므로 $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 1$ 이 성립한다.

-----[1점]

따라서

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx &= \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\
&= \int_0^1 (a^2 x^2 + 2abx + b^2) dx \\
&= \left[\frac{1}{3} a^2 x^3 + abx^2 + b^2 x \right]_0^1 = \frac{1}{3} a^2 + ab + b^2 = 1
\end{aligned}$$

이고

$$\frac{1}{3} a^2 + ab + b^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

-----[3점]

$f(x)$ 는 집합 C 의 원소이므로 $\int_0^1 \{f(x) - (3x - 1)\}^2 dx = 1$ 이 성립한다.

-----[1점]

그런데 $f(x) \in B$ 이므로 $\int_0^1 f(x)^2 dx = 1$ 이 성립하여

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \{f(x) - (3x - 1)\}^2 dx &= \int_0^1 [\{f(x)\}^2 - 2f(x)(3x - 1) + (3x - 1)^2] dx \\
&= \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx - 2 \int_0^1 f(x)(3x - 1) dx + \int_0^1 (3x - 1)^2 dx \\
&= 1 - 2 \int_0^1 (ax + b)(3x - 1) dx + \int_0^1 (9x^2 - 6x + 1) dx \\
&= 1 - 2 \left[ax^3 + \frac{1}{2}(3b - a)x - bx \right]_0^1 + [3x^3 - 3x^2 + x]_0^1 \\
&= 1 - a - b + 1 = 1
\end{aligned}$$

즉,

$$a + b = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

-----[3점]

이제 ①과 ②를 연립하면

$$1 = \frac{1}{3}a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{3}a^2 + a(1-a) + (1-a)^2 = \frac{1}{3}a^2 - a + 1$$

이고

$$a^2 - 3a = 0$$

따라서 $a = 0$, $b = 1$ 또는 $a = 3$, $b = -2$

-----[2점]

그러므로 $f(x) = 1$ 또는 $f(x) = 3x - 2$

-----[1점]

정답) $f(x) = 1$ 또는 $f(x) = 3x - 2$

1. 문항 및 제시문

【문제 2】 (30점)

※ 다음 제시문과 표를 참조하여 물음에 답하시오.

가)

자연의 주인은 인간이 아닌 자연!

미국 전역에는 요세미티 국립 공원을 포함해 약 60여 개의 국립 공원이 있다. 미국의 국립 공원 정책은 자연을 있는 그대로 보존하는 데 초점을 맞추고 있다. 그래서 국립 공원에서 산불이 나도 자연 현상에 의해 일어난 불일 경우 웬만해서는 인간이 나서서 끄지 않는다. 인간이 개입할 일이 아니라고 판단하기 때문이다. 이 사례에서 우리는 생태 중심주의적 태도를 찾아볼 수 있다. 생태 중심주의는 인간을 포함한 자연 전체를 하나로 보는 전일론적 관점을 취한다. 전일론적 관점에 따르면, 자연은 인간, 동식물, 환경 등과 같은 다양한 구성원이 유기적으로 엮여 있는 생태계이다. 따라서 인간은 자연과 독립적으로 존재할 수 없다. 또한, 생태 중심주의는 자연의 내재적 가치를 강조한다. 즉, 자연은 인간의 이익을 위한 수단으로만 고려될 수 없다는 것이다. 따라서, 인간은 자신뿐만 아니라 자연 전체에 도덕적 의무를 지니며, 자연에 대해 옳고 그름은 그것이 생태계의 균형과 안정에 얼마나 이바지하느냐에 달려 있다. 생태 중심주의는 인간이 자연으로부터 독립되어있다는 사고방식을 거부하고 전체 생태계의 관점에서 문제를 바라보도록 한다. 나아가 인간이 생태계를 보전해야 할 의무가 있다는 점을 일깨움으로써 환경 문제를 바라보는 새로운 시각을 제공해 준다.

나)

열대 과일 팜의 열매로부터 얻어지는 식물성 기름인 팜유는 립스틱부터 치약, 도넛, 초콜릿 바까지 수천 가지 제품의 원료로 이용된다. 팜유의 최대 생산지는 인도네시아이다. 원시림에 불을 놓아 만들어진 인도네시아의 대규모 팜유 농장은 많은 일자리를 창출하고 수출을 통해 외화를 벌어들여 인도네시아 경제 발전에 크게 이바지했다.

다)

환경적으로 건전하고 지속 가능한 개발을 실현하기 위해서는 ‘좀 더 빠르게, 좀 더 높게, 좀 더 강하게’와 같은 양적 성장주의를 반성하고, 진정한 행복이 무엇인지에 대한 깊은 성찰이 필요하다. 슈마허는 “작은 것이 아름답다.”라고 하면서 경제 성장을 외면하지 않는 동시에 환경을 보호할 수 있는 방안을 강구했다. 행복이라는 보이지 않는 가치에 집중해 온 그는 불교 사상을 통해 그 해결책을 찾았다. 그는 그 핵심을 소박함과 비폭력이라고 말한다. 적은 수단으로 만족할 만한 결과를 만들어 내는 것, 혹은 최소한의 소비로 최대한의 복지를 확보하는 것이 합리적이다. 반대로 많이 소비할수록 행복하다는 양적인 접근은 비합리적인 것이다. 또한, 나무와 물은 물론이고, 심지어 석탄이나 원유 등도 보존을 위해 노력해야 하며, 이를 함부로 사용하는 것을 일종의 폭력 행위로 규정한다.

<표> 세계 행복 지수와 다양한 통계 순위 비교

구분	국제연합(UN)의 세계 행복 보고서, 2016년	국제 부흥 개발은행(IBRD)의 1인당 국내 총생산*, 2016년	국제 투명성 기구(TI)의 부패 인식 지수**, 2015년	세계 경제 포럼(WEF)의 환경 성과 지수***, 2016년
덴마크	1위	10위	1위	4위
스위스	2위	2위	7위	16위
아이슬란드	3위	13위	13위	2위
노르웨이	4위	4위	5위	17위
핀란드	5위	19위	2위	1위
캐나다	6위	17위	9위	25위
우리나라	157개국 중 58위	215개국 중 35위	167개국 중 37위	180개국 중 80위

* 1인당 국내 총생산: 일정 기간 한 나라 안에서 생산되어 최종적으로 사용되는 모든 재화와 서비스의 시장 가치의 합으로 측정한 국내 총생산(GDP)을 국가 인구수로 나눈 것이다.

** 부패 인식 지수: 국제 투명성 기구(TI)가 매년 발표하는 국가별 부패 인식 지수이다. 국가별 공직자의 부패 정도에 관한 설문 조사를 종합하여 분석하고 평가한다.

*** 환경 성과 지수: 생태계 지속성과 환경 보건 관리에 관한 국가별 성과를 측정한 지수로, 보건 영향, 대기의 질, 식수 및 위생, 기후와 에너지, 생물 종의 다양성과 서식지 등의 지표를 사용한다.

[문제 2] 제시문 나)의 자연에 대한 ‘관점과 가치’를 제시문 가)의 생태 중심주의적 ‘관점과 가치’와 대조하고, <표>에 제시된 우리나라 행복 지수의 순위를 향상하는 데 필요한 방법은 무엇인지 제시문 다)의 입장에서 논술하시오. (500자 내외, 띄어쓰기 공백 제외)

7. 예시 답안 혹은 정답

제시문 나)의 자연관은 인간을 가장 가치 있는 존재로 여기고, 인간과 자연의 관계에서 인간의 이익이나 행복을 먼저 고려하는 **인간 중심주의 자연관**이다. 즉 자연의 가치를 인간의 이익에 따라 평가하는 관점이다. 인간 중심주의 자연관은, 자연을 인간, 동식물, 환경 등과 같은 다양한 구성원이 유기적으로 엮여 있는 생태계로 바라보는 제시문 나)의 생태 중심주의 자연관과 대조적으로 인간을 자연과 분리하여 바라보는 **이분법적 관점**을 취한다. 또한 자연의 내재적 가치를 강조하는 생태 중심주의 자연관과 대조적으로, 자연이 인간의 풍요로운 삶을 위한 도구에 불과하다는 **자연의 도구적 가치**를 강조한다.

제시문 다)의 입장은 지나친 인간 중심주의를 지양하고 무분별한 개발과 지나친 소비라는 문제를 해결하기 위해 환경적으로 건전하고 지속가능한 개발을 추구하자는 것이다. <표 1>을 보면 우리나라의 GDP는 상위 16%이나 환경성과지수는 상위 44%에 불과하고 행복순위도 상위 37%에 속한다. 우리나라의 행복지수를 높이기 위해서는 **환경성과지수가 다른 지표에 비해 낮은 점과 경제발전의 가능성을 고려하면서 생태계 지속성과 환경에 보다 많은 관심을 기울여야 한다.** 이를 위해 **환경 친화적인 상품으로 소비 패턴을 전환하거나, 분리수거를 통해 쓰레기 소각량을 줄여 환경 오염을 줄이고, 녹지 공간을 만들어 자연생태계를 보호하며, 자동차 대신 자전거를 이용하여 화석연료의 사용을 줄이려는 노력** 등을 할 수 있다.