[공학계열 1번]

1. 문항 및 제시문

【문제 1】 (50점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오. (답만 기재하면 0점 처리)

가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

다) 다음은 탄젠트함수의 덧셈정리이다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[문제 1-1] 자연수 n에 대하여 점 $(0, -n)$에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 x절편을 x_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}$의 값을 구하시오.

[문제 1-2] 직선 $y=kx$가 점 $(a, \ln a)$에서 곡선 $y=\ln x$에 접할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, k는 상수)

(1) a와 k의 값을 각각 구하시오.

(2) 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하고, 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=kx$ 및 직선 $x=a^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 할 때, S_1, S_2를 각각 구하시오.

[문제 1-3] 곡선 $y=\ln x$ 위의 서로 다른 두 점 P_1, P_2의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하고, 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 P_1에서의 접선과 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 P_2에서의 접선이 만나는 점을 R라 하자. $\tan(\angle \mathrm{P}_1\mathrm{R}\mathrm{P}_2)$를 x_1, x_2에 대한 식으로 나타내시오.

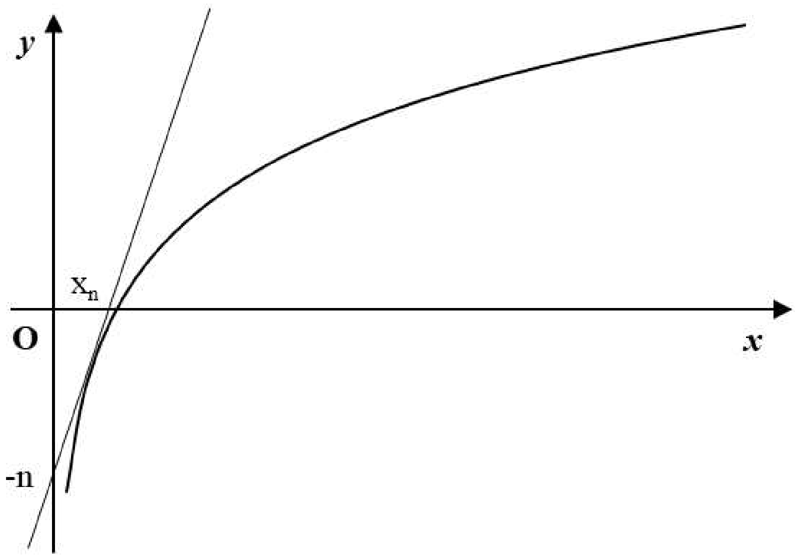
[문제 1-4] 함수 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선이 직선

$x=1$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_1이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q_1에서의 접선이 직선 $x=1$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q_{n-1}에서의 접선이 직선 $x=1$과 만나는 점을 P_n이라 하고, 점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$의 길이를 l_k $(k=1,2,3,\cdots)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} l_k$의 값을 구하시오.

2. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]

(10점)



점 $(0,-n)$와 곡선 $y=\ln x$ 위의 임의의 점 $(a, \ln a)$를 지나면서 $y=\ln x$에 접하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{a}$ 이므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$$

$$y=\frac{1}{a}x+\ln a-1$$

위의 접선 방정식에서 y절편이 $-n$이므로

$$\ln a-1=-n$$

따라서 $a=\frac{1}{e^{n-1}}$

---[2점]

접선의 x 절편 x_n은

$0=\frac{1}{a}\times x_n - n = e^{n-1}\times x_n - n$

$x_n = \frac{n}{e^{n-1}}$

---[3점]

$0=\frac{1}{a}\times x_n - n = e^{n-1}\times x_n - n$

$x_n = \frac{n}{e^{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e^{n-1}}\frac{e^n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(e\times\frac{n}{n+1}\right)=e$

---[5점]

정답) e

[문제 1-2]

(1) **(4점)**

직선 $y=kx$가 점 $(a,\ln a)$에서 곡선 $y=\ln x$에 접하므로 $(a,\ln a)=(a,ka)$, 즉 $\ln a = ka$

접선의 기울기는

$\frac{1}{a}=k, ka=1$

$ka=1=\ln a$

$a=e$

---[2점]

$k=\frac{1}{e}$

---[2점]

정답) $a=e, k=\frac{1}{e}$

(2) 접점의 x 좌표가 e 이므로 영역 S_1과 S_2 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_1 = \int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^e = 1$$

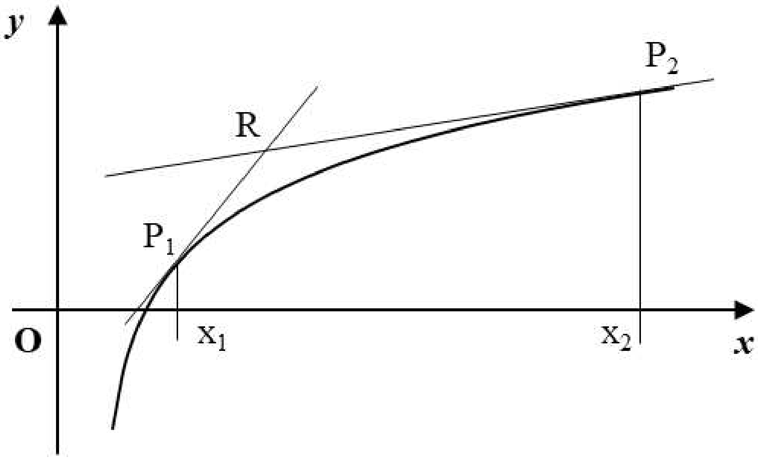
--[3점]

$$S_2 = \int_e^{e^2}\left(\frac{1}{e}x - \ln x\right)dx = \left[\frac{1}{2e}x^2 - x\ln x + x\right]_e^{e^2} = \frac{1}{2}e^3 - e^2 - \frac{1}{2}e$$

--[3점]

정답) $S_1 = 1, S_2 = \frac{1}{2}e^3 - e^2 - \frac{1}{2}e$

[문제 1-3]
(15점)



$\angle P_1RP_2 = \theta$ 라 하자.

접선 P_1R이 x축과 만나서 이루는 예각을 θ_1, 접선 RP_2이 x축과 만나서 이루는 예각을 θ_2라 할 때, $\tan\theta_1$과 $\tan\theta_2$는 각각 접선 P_1R 및 접선 RP_2 의 기울기와 같다.

따라서, 점 P_1에서 곡선 $y = \ln x$에 대한 접선의 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

곡선 $y = \ln x$의 x_1에서의 기울기가 $\frac{1}{x_1}$ 이므로 $\tan\theta_1 = \frac{1}{x_1}$ 이다.

--[2점]

같은 방법으로 계산하면 $\tan\theta_2 = \frac{1}{x_2}$ 이다.

--[2점]

$\theta = \pi - (\theta_1 - \theta_2)$
$\tan\theta = \tan(\pi - (\theta_1 - \theta_2)) = -\tan(\theta_1 - \theta_2)$

--[3점]

탄젠트함수의 덧셈공식에 의해

$$-\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}$$

--[3점]

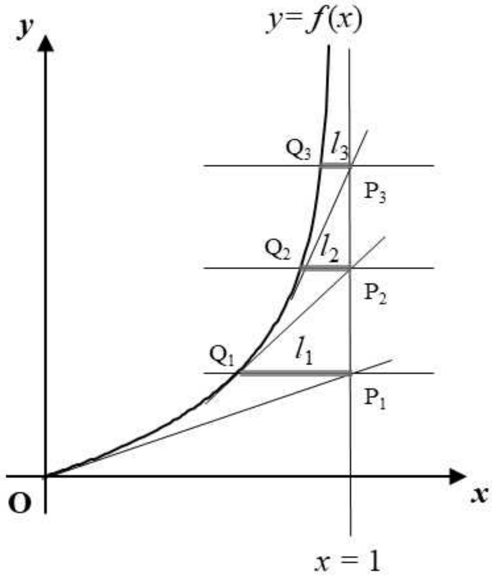
$$\therefore \tan\theta = -\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{1 + \frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 + 1}$$

---[5점]

정답) $\therefore \tan\theta = -\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{1 + \frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 + 1}$

[문제 1-4]

(15점)



함수 $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$의 도함수는 다음과 같다.

$f'(x) = \frac{1}{1-x}$

---[3점]

따라서 점 P_n과 점 Q_n은 다음의 과정으로 구할 수 있다.

먼저 점 P_1을 구하기 위해 접선의 관계식을 생각해 보면, 기울기가 $f'(0) = 1$이고, 점 $(0,0)$을 지나는 접선은 $y = x$ 이므로 점 P_1의 좌표는 $(1,1)$이 된다.

점 Q_1은 곡선 $f(x)$의 y 좌표가 1 일때의 점이므로 $f(x) = -\ln(1-x) = 1, x = 1 - e^{-1}$이 되어 점 Q_1의 좌표는 $(1-e^{-1}, 1)$이 된다.

점 P_2을 구하기 위해 먼저 점 $\mathrm{Q}_1(1-e^{-1}, 1)$을 지나며 기울기가 $f'(1-e^{-1}) = \left(\frac{1}{1-(1-e^{-1})}\right) = e$ 인 접선의 방정식을 구하면 $y = ex + (2-e)$ 이므로, x좌표가 1인 점 P_2의 좌표는 $(1,2)$가 된다.

점 Q_2는 y 좌표가 2이므로 $f(x) = -\ln(1-x) = 2, x = 1 - e^{-2}$ 이 되어 점 Q_2의 좌표는 $(1-e^{-2}, 2)$이

된다. 따라서 다음과 같이 정리할 수 있다.

$P_n(1,n)$, $Q_n(1-e^{-n},n)$ (P_n과 Q_n을 n에 대한 식으로 표현하면 6점, 하나만 구하면 3점)

--[6점]

즉, $l_k = e^{-k}$ 이며 이는 첫 번째 항이 e^{-1}이고 공비가 e^{-1}인 등비수열이 된다.

--[3점]

공비 $0 < e^{-1} < 1$ 이므로,

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} l_k = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}$$

--[3점]

정답) $\therefore \sum_{k=1}^{\infty} l_k = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}$

[공학계열 2번]

1. 문항 및 제시문

가) 두 실수 x, y가 $x^2+y^2=1$을 만족할 때, $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$와 같이 매개변수 θ로 나타낼 수 있다.

나) 다음은 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리이다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

다) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$ 에서 극소이고, $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$ 에서 극대이다.

[문제 2-1] 두 실수 x, y가 $x^2+y^2=1$을 만족할 때, $xy-2xy^3$의 최댓값을 구하시오.

[문제 2-2] 두 자연수 a, b와 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-32$
(나) 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(\alpha,0)$, $\mathrm{B}(0,\beta)$, $\mathrm{C}(b,b)$로 이루어진 삼각형 ABC의 넓이는 19이다.

$a+b$의 최솟값을 구하시오.

[문제 2-3] 함수 $f(x)=(3x^2-4)(x-t)$의 극댓값과 극솟값의 차를 $g(t)$라 하자. $g(t)$의 최솟값을 구하시오. (단, t는 실수)

[문제 2-4] 함수 $f(x)=x+\ln(1-x)$ $(0<x<1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선을 l이라 하고, 점 $(t,f(t))$를 지나고 직선 l에 수직인 직선을 m이라 하자. 두 직선 l, m의 y절편을 각각 $g(t)$, $h(t)$라 할 때, $g(t)-h(t)$의 최솟값을 구하시오.

2. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1] (11점)

$$\begin{aligned}xy-2xy^3&=\cos\theta\sin\theta-2\cos\theta\sin^3\theta\\&=\cos\theta\sin\theta(1-2\sin^2\theta)\\&=\cos\theta\sin\theta\cos(2\theta)\end{aligned}$$

---[5점]

$= \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos(2\theta)$

$= \frac{1}{4}\sin(4\theta)$

$\leq \frac{1}{4}$

--[6점]

[문제 2-2] (12점)

두 점 A, B를 지나는 직선 l의 방정식을 구하면,

$\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$ 또는 $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$

$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = -32$이므로

점 C와 직선 l사이의 거리는 $\frac{|\beta b + \alpha b - \alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \frac{|ab + 32|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}\frac{|ab + 32|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{|ab + 32|}{2} = 19$

--[7점]

$ab = -70$ 또는 $ab = 6$. a, b는 자연수이므로 $ab = 6$

자연수의 곱으로 가능한 순서쌍 (a,b)의 경우는 $(1,6)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(6,1)$이므로

$a + b$의 최솟값은 5

--[5점]

[문제 2-3] (13점)

$f'(x) = 9x^2 - 6tx - 4 = 0$이므로 $x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{3}$에서 극값을 가진다.

$f'(x) = 0$의 두 근을 α, β $(\alpha < \beta)$라고 하면,

$\alpha + \beta = \frac{2t}{3}$, $\alpha\beta = -\frac{4}{9}$, $\alpha - \beta = -\frac{2}{3}\sqrt{t^2 + 4}$ 이므로

--[5점]

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)-f(\beta) &= (3\alpha^2-4)(\alpha-t)-(3\beta^2-4)(\beta-t) \\
&= 3\alpha^3-4\alpha-3\beta^3+4\beta-3t(\alpha^2-\beta^2) \\
&= 3\alpha^3-4\alpha-3\beta^3+4\beta-3t(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \\
&= 3(\alpha^3-\beta^3)-4(\alpha-\beta)+4t^2\frac{\sqrt{t^2+4}}{3} \\
&= (\alpha-\beta)\{3(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-4\}+\frac{4}{3}t^2\sqrt{t^2+4} \\
&= (\alpha-\beta)[3\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-4]+\frac{4}{3}t^2\sqrt{t^2+4} \\
&= -\frac{2}{3}\sqrt{t^2+4}\left\{3\left(\frac{2}{3}t\right)^2-3\left(-\frac{4}{9}\right)-4\right\}+\frac{4}{3}t^2\sqrt{t^2+4} \\
&= \frac{4}{9}\sqrt{t^2+4}\,(t^2+4)
\end{aligned}
$$

--[5점]

$t^2 \ge 0$이므로 $t=0$일 때 $g(t)=f(\alpha)-f(\beta) \ge \frac{4}{9}\sqrt{4}\cdot 4=\frac{32}{9}$

--[3점]

[문제 2-4] (14점)

$f'(t)=1-\frac{1}{1-t}=-\frac{t}{1-t}$

--[2점]

직선 l의 방정식: $y=-\frac{t}{1-t}(x-t)+t+\ln(1-t)$

--[2점]

직선 m의 방정식: $y=\frac{1-t}{t}(x-t)+t+\ln(1-t)$

--[2점]

직선 l의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$g(t)=-\frac{t}{1-t}(-t)+t+\ln(1-t)$

--[2점]

직선 m의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$h(t)=\frac{1-t}{t}(-t)+t+\ln(1-t)$

--[2점]

$$
\begin{aligned}
g(t)-h(t) &= \frac{t^2}{1-t}+1-t \\
&= -2t+\frac{1}{1-t}
\end{aligned}
$$

--[2점]

$$= 2(1-t) + \frac{1}{1-t} - 2 \ (0 < t < 1)$$

$$\geq 2\sqrt{2} - 2$$

--[2점]