◆ 문항카드5 (자연계열(오전)_1번 문항)

[한양대학교 문항정보]

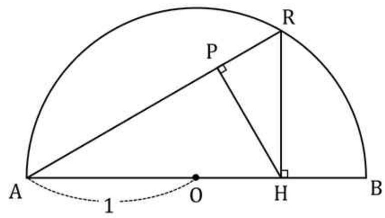
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오전)(수학) / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	코사인법칙, 삼각함수의 뜻, 여러 가지 함수의 미분, 여러 가지 미분법, 여러 가지 적분법
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

오른쪽 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 점 O는 선분 AB의 중점이다. 호 AB 위의 한 점 R에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H에서 선분 AR에 내린 수선의 발을 P라 하자.



1. $\angle \mathrm{ROB} = \dfrac{\pi}{3}$ 일 때, $\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$ 의 값을 구하시오.

2. 점 R가 A에서 B까지 호 AB 위를 움직일 때, 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오.

3. 점 R가 A에서 B까지 호 AB 위를 움직일 때, 점 P가 이루는 곡선과 선분 AB로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 선분 AB에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열 오전-1번 문제는 고교 수학과정 중 “수학 Ⅰ - 삼각함수” 단원의 사인법칙과 코사인법칙, “미적분 - 여러 가지 함수의 미분” 단원의 사인함수와 코사인 함수의 도함수, “미적분 - 여러 가지 미분법” 단원의 합성함수의 미분법, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법, “미적분 - 여러 가지 적분법” 단원의 넓이와 부피를 주요 내용으로 하고 있다. 도형의 성질을 잘 이해하고 활용하기 위한 중요한 도구인 삼각함수의 덧셈정리 및 곡선의 매개변수 표현 등의 지식을 적절히 활용해서 평면도형이 갖고 있는 성질들을 분석하고, 미적분의 다양한 기술을 적절하게 이용해서 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
문제 1-1	수학Ⅰ- (2)삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-2	수학Ⅰ - (2)삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. 수학Ⅱ - (2)미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 - (2)미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. 미적분 - (2)미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.
문제 1-3	미적분 - (3)적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외	신사고	2018	92 ~ 97
	수학 I	홍성복 외	지학사	2018	76
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	108 ~ 111
	미적분	고성은 외	신사고	2019	85 ~ 86
	수학 II	이준열 외	천재교과서	2018	83 ~ 97
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	183 ~ 188

5. 문항 해설

문항1은 반원 안에 놓인 삼각형들이 만족시키는 조건을 적절이 활용해서 주어진 선분의 길이를 구하기

문항2는 곡선의 매개변수 표현, 미분의 기술 등을 효과적으로 이용해서 주어진 함수의 최솟값을 구하기

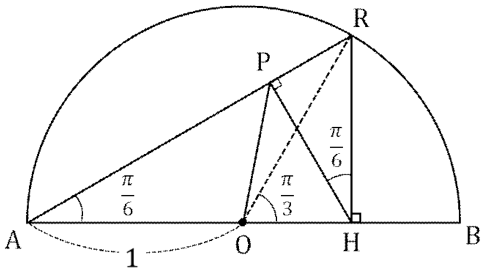
문항3은 입체도형의 부피를 구하기 위해 필요한 함수를 기술하고 적분의 기술을 적절히 사용하기

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	선분 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 길이를 구했는가?	10	30
	$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ 을 구했는가?	20	
2	OP 의 길이를 한 문자에 대한 식으로 나타내었는가?	20	40
	OP 의 길이의 최솟값을 구했는가?	20	
3	정사각형의 한 변의 길이인 y 또는 길이의 제곱 y^2 을 x 에 대한 함수로 표현하였는가?	20	30
	주어진 입체의 부피를 구했는가?	10	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{AR}}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\times1\times1\times cos\frac{2\pi}{3} = 3$ 이다.

$\overline{\mathrm{AR}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{RH}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{PR}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

이고 따라서

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ 이다.

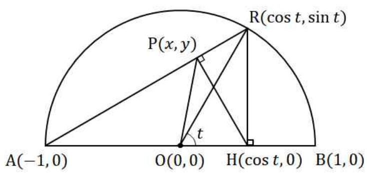
$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{OA}}^2 - 2\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\cos\frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{16}$$

$$\overline{\mathrm{BP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - 2\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19}{16}$$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = \frac{7}{16} + \frac{19}{16} = \frac{13}{8}$

답 : $\frac{13}{8}$

2. 지름의 양 끝점이 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$가 되고,
호 AB가 x축 윗부분에 오도록 반원을 좌표평면에
두자. $\angle\mathrm{ROB} = t\ (0 \le t \le \pi)$라 하면,
$\mathrm{R}(\cos t, \sin t)$, $\mathrm{H}(\cos t, 0)$이라 할 수 있다.



$0 < t < \pi$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{R}(\cos t, \sin t)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 0 = \frac{\sin t - 0}{\cos t - (-1)}(x - (-1))$$

이고, 점 H를 지나고 선분 AR에 수직인 직선의 방정식은

$$y - 0 = -\frac{1+\cos t}{\sin t}(x - \cos t)$$

이다. 점 P는 이 두 직선의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립해서 풀면,
점 $\mathrm{P}(x, y)$의 좌표는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\cos^2 t + 2\cos t - 1) \\ y = \frac{1}{2}\sin t(1+\cos t) \end{cases}$$

($t = 0$이면 $\mathrm{P} = \mathrm{B}$, $t = \pi$이면 $\mathrm{P} = \mathrm{A}$이다.)

따라서

$$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\cos^2 t + 2\cos t - 1)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin t(1+\cos t)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^3 t + \cos^2 t - \cos t + 1)}$$

이고, $f(t) = \cos^3 t + \cos^2 t - \cos t + 1$이라 하면,

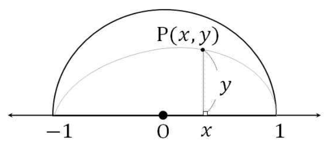
$f'(t) = -\sin t(\cos t + 1)(3\cos t - 1)$ 이고,
$0 \le t \le \pi$ 일 때 $-1 \le \cos t \le 1$ 이므로,
오른쪽 표에서 $f(t)$ 의 최솟값은
$t = \alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ 일 때, $f(t) = \dfrac{22}{27}$ 이다.

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\cos t$	1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	-1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(t)$	2	$\searrow$	$\frac{22}{27}$	$\nearrow$	2

따라서 구하는 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은
$\sqrt{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{22}{27}} = \dfrac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{33}}{9}$ 이다

답 : $\dfrac{\sqrt{33}}{9}$

3. 2번에서 구한 $\mathrm{P}(x, y)$ 의 좌표로부터,
$\cos t = -1 + \sqrt{2+2x}$ 이고,



$$y^2 = \left(\frac{1}{2}\sin t(1+\cos t)\right)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos t)(1+\cos t)^3$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2+2x}\right)\left(\sqrt{2+2x}\right)^3 = \sqrt{2}\,(1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x)^2$$

이다. $-1 \le x \le 1$ 이므로 구하는 부피는

$$\int_{-1}^{1} y^2\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx - \int_{-1}^{1}(1+x)^2 dx$$
$$= \left[\frac{2\sqrt{2}}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+x)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$

이다.

답 : $\dfrac{8}{15}$

◆ 문항카드6 (자연계열(오전)_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오전)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 등비급수, 치환적분법, 이항정리, 정규분포
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{a_n}{n+1} = \displaystyle\int_0^{\beta} \sin^n x \cos x\, dx$를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{6}$일 때, $\tan\beta$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} \right)$

2. 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 이 모집단의 확률변수를 X라 할 때, 두 확률변수 X, $\overline{X}$가 다음 세 조건을 만족시킨다. 이때, $m+\sigma+n$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
   $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) = 0.4332$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.0) = 0.4772$,
   $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5) = 0.4938$로 계산한다.)

   (가) $\mathrm{P}(X \ge 8) + \mathrm{P}(\overline{X} \ge 8) = 1$
   (나) $\mathrm{P}(X \ge 12) + \mathrm{P}(\overline{X} \ge 7.5) = 1$
   (다) 표본평균의 값이 $\overline{x}$일 때, m에 대한 신뢰도 $95.44\,\%$의 신뢰구간이 $\overline{x} - 1 \le m \le \overline{x} + 1$이다.

3. 평평한 면과 둥근 면이 나올 확률이 각각 p, $1-p$인 윷짝 한 개를 2023번 던졌을 때, 평평한 면이 나온 횟수가 짝수일 확률을 p에 대한 식으로 나타내시오. (단, 0은 짝수이다.)

3. 출제 의도

자연계열 오전의 [문제 2]는 고등학교에서 고교과정을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 수학 I, 미적분, 확률과 통계의 주요 내용인 삼각함수, 등비급수, 치환적분법, 이항정리, 정규분포를 이용하여 중요한 성질들을 분석하고 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취기준**
문제 2-1	수학 I - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. 미적분 - (1) 수열의 극한 - 2 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-2	확률과 통계 - (3) 통계 - 1 확률분포 [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. 확률과 통계 - (3) 통계 - 2 통계적 추정 [12확통03-06] 표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.
문제 2-3	확률과통계 - (1) 경우의 수 - 2 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 확률과통계 - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용 [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱 외	미래엔	2018	74~79
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	35~39, 164~169
	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2019	35~37, 49~53, 114~120, 126~131
	확률과 통계	고성은 외	좋은책신사고	2019	27~30, 43~48, 97~103, 117~119

5. 문항 해설

문항1은 치환적분법을 이해하고 이를 활용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 구할 수 있는지 평가한다.

문항2는 정규분포의 성질을 통해 주어진 확률분포의 평균과 표준편차, 그리고 모평균의 추정된 신뢰구간으로부터 표본의 크기를 찾을 수 있는지 평가한다.

문항3은 확률의 기본 성질을 이용하여 주어진 확률을 조합에 관련된 식으로 표현하고 이항정리를 이용하여 식으로 나타낼 수 있는지 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	치환적분법을 사용하여 a_n을 구하였는가?	10	40
	a_n의 등비급수 합을 찾아 $\sin\beta$를 구하였는가?	20	
	$\tan\beta$를 잘 구하였는가?	10	
2	정규분포의 성질을 통해 주어진 확률분포의 평균 m과 표준편차 σ를 구했는가? 모평균의 추정된 신뢰구간을 통해 표본의 크기 n을 구했는가?	20	30
	앞서 구한 평균, 표준편차, 표본의 크기를 이용하여 $m+\sigma+n$을 계산했는가?	10	
3	평평한 면이 나온 횟수가 짝수인 확률을 조합에 관련된 식으로 표현하였는가?	10	30
	조합으로 표현한 식을 이항정리를 통해 p에 대한 식으로 나타냈는가?	20	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. $t=\sin x$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $t=0, x=\beta$일 때 $t=\sin\beta$이므로

$\dfrac{a_n}{n+1}=\displaystyle\int_0^{\beta}(\sin x)^n\cos x\,dx=\int_0^{\sin\beta}t^n dt=\dfrac{(\sin\beta)^{n+1}}{n+1}$에서 $a_n=(\sin\beta)^{n+1}$ 을 얻는다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $(\sin\beta)^2$이고 공비가 $\sin\beta$인 등비수열이다.

주어진 $0<\beta<\pi/2$에서 $0<\sin\beta<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴하고,

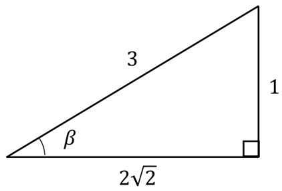
그 합은 $\dfrac{(\sin\beta)^2}{1-\sin\beta}$ 이다.

$\dfrac{(\sin\beta)^2}{1-\sin\beta}=\dfrac{1}{6}$에서 $6(\sin\beta)^2=1-\sin\beta$ 이므로

$y = \sin\beta$ 라고 할 때, $6y^2 + y - 1 = (3y-1)(2y+1) = 0$ 에서

$y = \dfrac{1}{3}$ 이므로 $\sin\beta = \dfrac{1}{3}$

그러므로 $\tan\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$



답 : $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2. 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$ 는 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다. 정규분포의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x = m$ 에 대하여 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다. 따라서 조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X \geq 8) + \mathrm{P}(\overline{X} \geq 8) = 1$ 이므로 $m = 8$ 이다.

두 확률변수 $Z_1 = \dfrac{X-8}{\sigma}$, $Z_2 = \dfrac{\overline{X}-8}{\sigma/\sqrt{n}}$ 은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르고 확률밀도함수 $f(z)$의 그래프는 직선 $z = 0$ 에 대하여 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다. 조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X \geq 12) + \mathrm{P}(\overline{X} \geq 7.5) = 1$ 이므로

$\mathrm{P}\left(Z_1 \geq \dfrac{12-8}{\sigma}\right) + \mathrm{P}\left(Z_2 \geq \dfrac{7.5-8}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1$ 이다. 즉, $\dfrac{4}{\sigma} = \dfrac{0.5\sqrt{n}}{\sigma}$ 이므로 $n = 64$ 이다.

m 에 대한 신뢰도 $95.44\,\%$의 신뢰구간은 $\overline{x} - 2 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{64}} \leq m \leq \overline{x} + 2 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$ 이고

조건 (다)에서 $\overline{x} - 1 \leq m \leq \overline{x} + 1$ 이므로 $2 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{64}} = 1$ 이다. 즉, $\sigma = 4$ 이다.

따라서 $m + \sigma + n = 8 + 4 + 64 = 76$ 이다.

답 : 76

3. 이항정리를 이용하여 $\{p + (1-p)\}^{2023}$ 와 $\{p + (p-1)\}^{2023}$ 을 각각 전개하면 다음과 같다.

$$\{p + (1-p)\}^{2023} = \sum_{k=0}^{2023} {}_{2023}\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{2023-k}$$

$$\{p + (p-1)\}^{2023} = \sum_{k=0}^{2023} {}_{2023}\mathrm{C}_k p^k (p-1)^{2023-k} = \sum_{k=0}^{2023} {}_{2023}\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{2023-k} (-1)^{2023-k}$$

여기서 $(-1)^{2023-k}$ 의 값은 k가 홀수이면 1, k가 짝수이면 -1 을 가진다.

이때 $\{p + (1-p)\}^{2023} - \{p + (p-1)\}^{2023}$ 을 계산하면

$$\begin{aligned} 1 - (2p-1)^{2023} &= \sum_{k=0}^{2023} {}_{2023}\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{2023-k} - \sum_{k=0}^{2023} {}_{2023}\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{2023-k} (-1)^{2023-k} \\ &= 2\sum_{j=0}^{1011} {}_{2023}\mathrm{C}_{2j} p^{2j} (1-p)^{2023-2j} \end{aligned}$$

이 된다.

즉, $1-(2p-1)^{2023}=2\sum_{j=0}^{1011}{}_{2023}\mathrm{C}_{2j}\,p^{2j}(1-p)^{2023-2j}$는 윷짝 한 개를 2023번을 던졌을 때 평평한 면이 나온 횟수가 짝수일 확률의 2배와 같다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{2}-\frac{(2p-1)^{2023}}{2}$ 또는 $\frac{1}{2}+\frac{(1-2p)^{2023}}{2}$ 이다.

답 : $\frac{1}{2}-\frac{(2p-1)^{2023}}{2}$ 또는 $\frac{1}{2}+\frac{(1-2p)^{2023}}{2}$

◆ 문항카드7 (자연계열(오후1)_1번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후1)(수학) / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	접선의 방정식, 변곡점, 부분적분법, 정적분
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$$f(x)=\int_0^x (xt-t^2)e^{x-t}dt$$

<나> 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $g(0)=0$

(2) $e^{-x}\int_0^x g'(t)dt=\int_0^x e^{-t}g'(t)dt-x\sin(2\pi x)$

1. 제시문 <가>에서 주어진 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 조사하고 변곡점의 좌표를 구하시오.

2. 제시문 <가>에서 주어진 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선을 ℓ_1, 점 $(2, f(2))$에서의 접선을 ℓ_2라고 하자. 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 ℓ_1, ℓ_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

3. 제시문 <나>에서 주어진 함수 $g(x)$에 대하여, $\int_0^{2023} g(x)dx < 4046\pi e^{2023}$이 성립함을 보이시오.

3. 출제 의도

자연계열 오후(1)의 [문제 1]는 고등학교에서 고교과정을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 미적분의 주요내용인 변곡점, 부분적분법, 정적분을 이용하여 중요한 성질들을 분석하고 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취기준**
문제 1-1	미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-10]이계도함수를 구할 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-02]부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-2	미적분 - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-11]접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12]함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 1-3	미적분 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03]여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	172~175
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	155~156
	미적분	김원경 외	비상교육	2019	99~103
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	106~108, 110~116

5. 문항 해설

문항1은 곡선의 오목과 볼록 및 변곡점을 이계도함수를 사용하여 구할 수 있는지 평가한다.

문항2는 도형의 넓이를 정적분을 활용하여 구하고 이를 계산하는데 필요한 정보들을 파악하고 사용하는지 평가한다.

문항3은 미분과 적분의 관계를 이용하여 함수를 구할 수 있고 삼각함수의 성질을 파악하고 있는지 묻고 있다. 삼각함수의 최댓값을 파악하고 이를 이용하여 부등식을 보일 수 있는지 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	함수의 이계도함수를 구하였는가?	10	20
	이계도함수의 부호를 파악하여 아래로 볼록과 위로 볼록을 조사하고 변곡점을 구하였는가?	10	
2	접선의 방정식들을 구하였는가?	10	40
	함수의 그래프가 항상 접선 ℓ_2보다 위에 놓여있는지를 파악하였는가?	10	
	정적분을 사용하여 도형의 넓이를 잘 구하였는가?	20	
3	함수 $g(x)$를 구하였는가?	20	40
	삼각함수의 최댓값을 잘 이용하여 부등식을 보였는가?	20	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. $f(0)=0$ 이다. $s=x-t$라 놓으면, $ds/dt=-1$이고,

$$f(x)=\int_x^0 (x-s)se^s(-1)ds = \int_0^x (x-s)se^s ds = \int_0^x xse^s ds - \int_0^x s^2e^s ds.$$

$f(x)$를 x로 미분을 하면,

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x\int_0^x se^s ds - \int_0^x s^2e^s ds\right] = \int_0^x se^s ds + x^2e^x - x^2e^x = \int_0^x se^s ds$$

이고 $f'(0)=0$이다.

$f'(x)$를 한번 더 x에 대하여 미분하면, $f''(x)=xe^x$ 이고 $f''(0)=0$이다.

함수의 오목과 볼록을 조사하기 위해서, $x<0$일 때 $f''(x)<0$이고 $x>0$일 때 $f''(x)>0$이다.

따라서, 열린구간 $(-\infty,0)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $(0,\infty)$에서 아래로 볼록하다.

변곡점의 판정으로 $f''(0)=0$ 이고, $x=0$ 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 달라졌기에 점 $(0,f(0))$ 는 주어진 곡선의 변곡점이다.

답 : $(-\infty,0)$에서 위로 볼록, $(0,\infty)$에서 아래로 볼록. 변곡점은 $(0,0)$

2. $f(x)=xe^{x}\int_{0}^{x}te^{-t}dt-e^{x}\int_{0}^{x}t^{2}e^{-t}dt$. $A=xe^{x}\int_{0}^{x}te^{-t}dt$, $B=e^{x}\int_{0}^{x}t^{2}e^{-t}dt$

라고 하자.

$$\begin{aligned} A&=xe^{x}\int_{0}^{x}te^{-t}dt=xe^{x}\left[(-1)te^{-t}\right]_{0}^{x}-\int_{0}^{x}(-1)e^{-t}dt \\ &=xe^{x}\left[-xe^{-x}+\int_{0}^{x}e^{-t}dx\right]=xe^{x}\left[-xe^{-x}-e^{-x}+1\right] \\ &=-x^{2}-x+xe^{x} \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} B&=e^{x}\int_{0}^{x}t^{2}e^{-t}dt=e^{x}\left[(-1)t^{2}e^{-t}\right]_{0}^{x}-\int_{0}^{x}(2t)(-1)e^{-t}dt \\ &=e^{x}\left[-x^{2}e^{-x}+2\int_{0}^{x}te^{-t}dt\right]=e^{x}\left[-x^{2}e^{-x}+2\left\{\left[(-1)te^{-t}\right]_{0}^{x}+\int_{0}^{x}e^{-t}dt\right\}\right] \\ &=e^{x}\left[-x^{2}e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x}+1)\right]=-x^{2}-2x-2+2e^{x} \end{aligned}$$

따라서,

$$f(x)=(-x^{2}-x+xe^{x})-(-x^{2}-2x-2+2e^{x})=xe^{x}-2e^{x}+x+2$$

$$f'(x)=xe^{x}-e^{x}+1$$

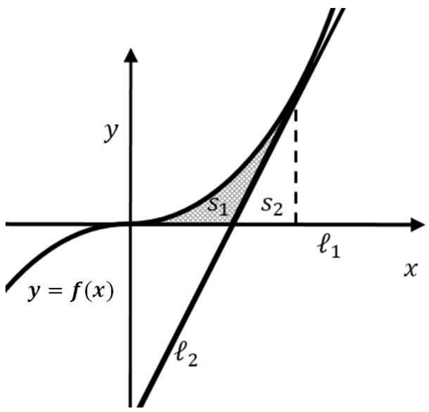
이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=0$이므로 접선 ℓ_1의 방정식은 $y=0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^{2}+1$이므로 접선 ℓ_2의 방정식은 $y=(e^{2}+1)x-2(e^{2}-1)$ 이다.

$$f(x)-\{(e^{2}+1)x-2(e^{2}-1)\}=xe^{x}-2e^{x}+x+2-(e^{2}+1)x+2(e^{2}-1)$$

$$=(x-2)(e^{x}-e^{2})\geq 0$$

이므로 곡선 $f(x)$는 접선 ℓ_2보다 항상 위에 있다.



영역 S_1+S_2는

$$S_1+S_2=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(xe^x-2e^x+x+2\right)dx=\left[xe^x-3e^x+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2$$

$$=9-e^2$$

ℓ_2의 x절편이 $\dfrac{2(e^2-1)}{e^2+1}$이므로 삼각형 S_2의 넓이는

$$\left(2-\frac{2(e^2-1)}{e^2+1}\right)\times 4\times\frac{1}{2}=4-\frac{4(e^2-1)}{e^2+1}$$

따라서 구하고자 하는 영역 S_1의 넓이는

$$(S_1+S_2)-S_2=(9-e^2)-\left(4-\frac{4(e^2-1)}{e^2+1}\right)=5-e^2+\frac{4(e^2-1)}{e^2+1}$$

$$=9-e^2-\frac{8}{e^2+1}=\frac{-e^4+8e^2+1}{e^2+1}$$

답 : $\dfrac{-e^4+8e^2+1}{e^2+1}$

3. 양변을 x에 대해 미분하면

$$-e^{-x}\int_0^x g'(t)dt+e^{-x}g'(x)=e^{-x}g'(x)-\sin(2\pi x)-2\pi x\cos(2\pi x)$$

$g(0)=0$이고,

$$g(x)-g(0)=e^x[\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)]$$

$$g(x)=e^x[\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)]$$

모든 양의 실수 x에 대해 $\sin(2\pi x)\le 1$, $\cos(2\pi x)\le 1$ 이므로
$\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\le 1+2\pi x$ 이다.
그러므로 $g(x)=e^x\{\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\}\le e^x(1+2\pi x)$이다.

$$\int_0^{2023} g(x)dx\le\int_0^{2023} e^x(1+2\pi x)dx=\int_0^{2023} e^x dx+2\pi\int_0^{2023} xe^x dx$$

$$=[e^x]_0^{2023}+2\pi\left([xe^x]_0^{2023}-\int_0^{2023} e^x dx\right)=e^{2023}-1+2\pi\left(2023e^{2023}-e^{2023}+1\right)$$

$$=4046\pi e^{2023}+(1-2\pi)(e^{2023}-1)$$

$(1-2\pi)(e^{2023}-1)<0$이므로

$$\int_0^{2023} g(x)dx\le 4046\pi e^{2023}+(1-2\pi)(e^{2023}-1)<4046\pi e^{2023}$$

◆ 문항카드8 (자연계열(오후1)_2번 문항)

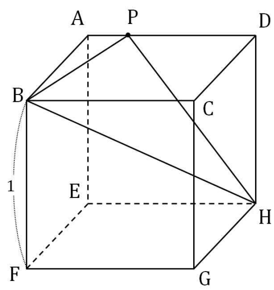
[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후1)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분, 확률과통계, 기하
	핵심개념 및 용어	코사인법칙, 수열의 귀납적 정의, 정사영, 이항정리
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)



1. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체의 모서리 AD 위에 $\overline{\mathrm{AP}} \le \overline{\mathrm{PD}}$를 만족시키는 점 P가 있다. 삼각형 PBH의 넓이가 $\frac{\sqrt{7}}{4}$일 때, 삼각형 PBH의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

2. 3개의 바구니 X, Y, Z 각각에 1부터 n까지 자연수가 각각 하나씩 적힌 공 n개가 들어 있다. 각 바구니에서 공을 하나씩 꺼냈을 때, X, Y, Z에서 나온 공에 적힌 세 수를 각각 x, y, z라 하자. x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이가 되는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 A_n이라 할 때, $A_{n+1} - A_n$을 n에 대한 식으로 나타내시오.

3. 함수 $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}(x+1)$은 $x > 1$인 범위에서 1.9보다 작은 최솟값을 갖는다. 이를 이용하여 3의 배수인 자연수 n에 대해 $\sum_{k=0}^{\frac{n}{3}} {}_n\mathrm{C}_k < 1.9^n$이 성립함을 보이시오.

3. 출제 의도

자연계열 오후(1)의 [문제 2]는 고등학교에서 고교과정을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 수학 I, 미적분, 확률과 통계, 기하의 주요내용인 코사인법칙, 수열의 귀납적 정의, 정사영, 이항정리를 이용하여 중요한 성질들을 분석하고 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취기준
문제 2-1	수학 I - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문제 2-2	수학 I - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학 I - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문제 2-3	미적분 - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 확률과 통계 - (1) 경우의 수 - ② 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2018	92~97
	수학 I	황선욱 외	미래엔	2018	142~145, 155~157
	미적분	류희찬	천재교과서	2019	128~132
	확률과 통계	배종숙	금성출판사	2019	35~45
	기하	김원경	비상교육	2019	118~121

5. 문항 해설

문항1은 공간도형에 대한 기본적인 이해를 바탕으로 삼각함수의 기본적인 법칙과 정사영에 대한 지식을 적절히 활용해서 원하는 결과를 이끌어낼 수 있는지를 묻는다.

문항2는 수열의 귀납적 정의를 이해하고 주어진 수열 사이의 관계식을 추측하고 $\sum$

의 성질을 활용하여 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻는다.

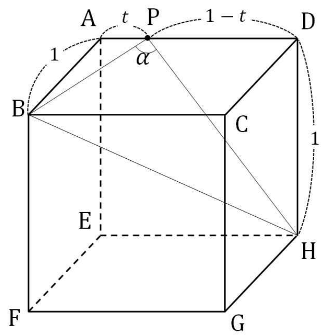
문항3은 이항정리를 이해하고 이를 주어진 함수의 최솟값과 연결 지어 부등식을 증명할 수 있는지를 묻는다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	삼각형 BPH 의 넓이 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 을 $\overline{\mathrm{AP}}$ 또는 $\overline{\mathrm{PD}}$ 에 대한 식으로 나타내었는가?	20	30
	정사영의 넓이를 구했는가?	10	
2	$A_{n+1}-A_n$의 의미를 이해하고 가능한 경우를 나누어 분석하였는가?	20	30
	$A_{n+1}-A_n$을 n에 대한 식으로 정확하게 표현하였는가?	10	
3	이항정리를 이용하여 이항계수의 합과 함수 $f(x)$의 관계를 파악하였는가?	20	40
	함수 $f(x)$의 최솟값을 이용하여 이항계수의 합에 대한 부등식을 증명하였는가?	20	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AP}}=t\ \left(0\le t\le \frac{1}{2}\right)$라 하면,



$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{t^2+1}$

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(1-t)^2+1}=\sqrt{t^2-2t+2}$

이다.

$\angle\mathrm{BPH}=\alpha$ 라 하면, 삼각형 BPH 에서

$\overline{\mathrm{BH}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2-2\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\cos\alpha$

이고 정리하면

$$\cos\alpha=\frac{t^2-t}{\sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2-2t+2}}$$

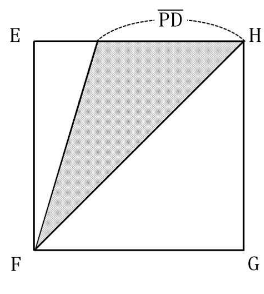
이다.

삼각형 BPH 의 넓이는

$$\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2-2t+2}\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{t^2-t+1}{2}}$$

이고, 이로부터 $t=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\ \left(0\le t\le\frac{1}{2}\right)$ 를 구한다.



따라서 정사영의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\overline{\mathrm{PD}}=\frac{2+\sqrt{2}}{8}$ 이다.

답 : $\dfrac{2+\sqrt{2}}{8}$

2. 공을 꺼내어 얻은 세 숫자를 x,y,z라 하자. 그러면 $A_{n+1}-A_n$는 x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이가 되면서 그 중 적어도 하나가 $n+1$인 경우의 수와 같다.

먼저 $x=n+1$이고 $y \le n, z \le n$이라 가정하자.

만약 $y=1$이면 조건을 만족하는 z를 고를 수 없고, $a>1$인 각 $y=a$마다 z를 $a-1$개의 숫자 $n-a+2, n-a+3, \cdots ,n$ 중에서 고르면 충분하다. 따라서 이 경우 $\sum_{a=2}^{n}(a-1)=\sum_{a=1}^{n-1}a=\dfrac{n(n-1)}{2}$만큼의 가짓수가 있다.

대칭적으로 생각하면 y만 $n+1$이거나 z만 $n+1$인 경우의 수도 이와 같다. 만약 두 숫자 x,y가 모두 $n+1$이고 $z \le n$이라면, z는 1부터 n중 어느 숫자여도 x, y, z가 삼각형의 세 변이 된다. 이와 대칭적인 경우들도 모두 따져 보면 합쳐서 $3n$가지 경우의 수가 된다.

마지막으로 $x=y=z=n+1$의 경우도 세어 주면

$A_{n+1}-A_n=\dfrac{3n(n-1)}{2}+3n+1=\dfrac{3n(n+1)}{2}+1$을 얻는다.

답 : $\dfrac{3n^2+3n+2}{2}$

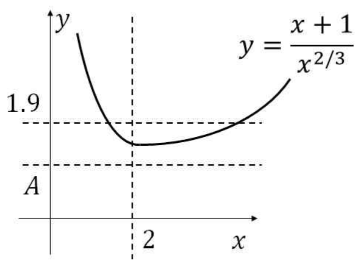
3. 대칭성에 의해 $\sum_{k=0}^{n/3}{}_nC_k=\sum_{k=0}^{n/3}{}_nC_{n-k}=\sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k$임을 알 수 있다.

모든 $x>1$에 대해 $\sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k \le \sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k\,x^{k-2n/3}$이 성립하므로

$$\sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k \le \sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k\,x^{k-2n/3} \le \sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^{k-2n/3}=x^{-2n/3}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^k=\left(\frac{1+x}{x^{2/3}}\right)^n$$

을 얻는다.

$A=\left(\sum_{k=0}^{n/3}{}_nC_k\right)^{1/n}$라 하자.



$f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 $x=2$에서 1.9보다 작은 최솟값을 갖고, $x>1$범위에서 항상 A보다 크기 때문에 $A<f(2)<1.9$임을 알 수 있다.

그러므로 $\sum_{k=0}^{n/3}{}_nC_k<1.9^n$임이 증명된다.

◆ 문항카드9 (자연계열(오후2)_1번 문항)

[한양대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후2)(수학) / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I , 확률과 통계,
	핵심개념 및 용어	이항계수, 등비수열, $\sum_{k=1}^{n} a_k$
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 자연수 n에 대하여 $a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k}$이다.

<나> 정수 n과 k가 $0 \le k < n$을 만족시킬 때, ${}_{n}\mathrm{C}_{k} + {}_{n}\mathrm{C}_{k+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$이 성립한다.

1. 정수 n과 k가 $1 \le k \le n$을 만족시킬 때, 제시문 <나>를 이용하여 ${}_{3n+3}\mathrm{C}_{3k} = {}_{3n}\mathrm{C}_{3k-3} + 3 \times {}_{3n}\mathrm{C}_{3k-2} + 3 \times {}_{3n}\mathrm{C}_{3k-1} + {}_{3n}\mathrm{C}_{3k}$가 성립함을 보이시오.

2. 자연수 n에 대해 $a_{n+1} = 2 + \sum_{k=1}^{n} {}_{3n+3}\mathrm{C}_{3k}$를 이용하여 $a_n + a_{n+1} = 3 \times 2^{3n}$이 성립함을 보이시오.

3. $\sum_{k=1}^{100} {}_{300}\mathrm{C}_{3k-1}$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열 오후(2) [문제 1]은 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 이항계수의 성질과 이항계수의 대칭성을 이용하여 중요한 성질들을 분석하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취기준**
문제 1-1	확률과 통계 - (1) 경우의 수 - ② 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-2	확률과 통계 - (1) 경우의 수 - ② 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 수학Ⅰ - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-3	수학Ⅰ - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. 확률과 통계 - (1) 경우의 수 - ② 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	홍성복 외	지학사	2019	137~139, 125~131
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2019	143~145, 130~136
	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2019	31~34, 35~37
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	27~30

5. 문항 해설

문항1은 이항계수의 기본 성질을 이용하여 식을 전개할 수 있는지를 묻는다.

문항2는 기호 $\sum$ 로 표현된 식을 문항 1에서 얻은 관계식을 이용하여 바꾼 후 각 항이 몇 번씩 더해지는 지를 계산하고, 이항계수의 $3k$번째 열을 모두 더했을 때 2^{3k}이 되는 것을 이용하여 원하는 식을 얻을 수 있는 지를 묻는 문제이다.

문항3은 등비수열의 합을 이용하여 a_{100}의 값을 계산하고, 이항계수의 대칭성을 이용하여 원하는 값을 찾도록 하는 문제이다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th colspan="2">배점</th></tr>
<tr><td>1</td><td>이항계수의 기본 성질을 이용하여 좌변으로부터 우변을 얻는 과정이 명료하게 기술되었는가?</td><td>20</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>기호 $\sum$ 로 표현된 식을 잘 정리하였는가?</td><td>20</td><td rowspan="2">40</td></tr>
<tr><td>이항계수의 $3k$번째 열을 모두 더했을 때 2^{3k} 임을 이용하여 $a_n + a_{n+1}$ 을 구하였는가?</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>등비수열의 합을 이용하여 a_{100}을 정확히 구하였는가?</td><td>20</td><td rowspan="2">40</td></tr>
<tr><td>이항계수의 대칭성을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k-1}$ 의 값을 구하였는가?</td><td>20</td></tr>
</table>

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 제시문 <나>에 의해 ${}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}$ 이다. 이를 이용하면

$$
\begin{aligned}
{}_{3n+3}C_{3k} &= {}_{3n+2}C_{3k-1} + {}_{3n+2}C_{3k} \\
&= {}_{3n+1}C_{3k-2} + 2\times {}_{3n+1}C_{3k-1} + {}_{3n+1}C_{3k} \\
&= {}_{3n}C_{3k-3} + 3\times {}_{3n}C_{3k-2} + 3\times {}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k}
\end{aligned}
$$
를 얻는다.

2. 1번의 결과를 이용하면

$$a_{n+1} + a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n} {}_{3n+3}C_{3k} + \sum_{k=0}^{n} {}_{3n}C_{3k}$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n} \left({}_{3n}C_{3k-3} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-2} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k} \right) + \sum_{k=0}^{n} {}_{3n}C_{3k}$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n} \left({}_{3n}C_{3k-3} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-2} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-1} \right) + 2\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}C_{3k} - 1$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n} \left(3 \times {}_{3n}C_{3k-2} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-1} \right) + 3\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}C_{3k} - 2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(3 \times {}_{3n}C_{3k-2} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-1} \right) + 3\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}C_{3k}$$

$$= 3\sum_{k=0}^{3n} {}_{3n}C_{k} = 3 \times 2^{3n}$$

3. 수열 $\left\{(-1)^{n+1}(a_n + a_{n+1})\right\}$이 등비수열이다.

$$a_1 + a_{100} = (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + \cdots - (a_{98} + a_{99}) + (a_{99} + a_{100})$$

$$= \sum_{k=1}^{99} (-1)^{k+1}(3 \times 2^{3k}) = \frac{24(1-(-8)^{99})}{1-(-8)} = \frac{8}{3}(8^{99}+1)$$

$a_1 = 2$ 이므로 $a_{100} = \frac{8}{3}(8^{99}+1) - 2 = \frac{1}{3}(8^{100}+2)$ 이다.

대칭성에 의해 $\sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-1} = \sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-2}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-1} = \frac{1}{2}(8^{100} - a_{100}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}8^{100} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(8^{100}-1)$ 이다.

답 : $\frac{1}{3}(8^{100}-1)$

◆ 문항카드10 (자연계열(오후2)_2번 문항)

[한양대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후2)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	도함수의 활용, 접선의 방정식, 삼각함수의 덧셈정리
예상 소요 시간	45분	

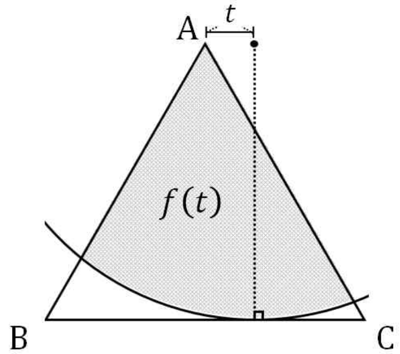
2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

1. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln(x+\alpha)}{x+\alpha}$ 에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=\dfrac{1}{e}$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 α 의 범위를 구하시오. $\left(\text{단, } \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\right)$

2. 미분가능한 함수 $f(x)$가 네 조건
$$f'(1)<0,\ f'(-1)>0,\ f'(-1)-f'(1)=23,\ f(1)=f(-1)=0$$
을 만족시킨다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,0)$에서의 접선과 점 $\mathrm{B}(1,0)$에서의 접선의 교점을 P, 삼각형 APB의 넓이를 S라 할 때, $\cot(\angle\mathrm{APB})$를 S에 대한 식으로 나타내시오.

3. 높이가 1인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 중심으로 하고 변 BC에 접하는 원이 있다. 오른쪽 그림과 같이 이 원을 직선 BC에 접한 채 거리 t만큼 $(0<t<1)$ 평행이동한 원과 변 AB, 변 AC로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(t)$라고 하자.
이때 도함수 $f'(t)$를 구하시오.



3. 출제 의도

자연계열 오후(2) [문제 2]는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 수학 I, 수학 II, 미적분의 주요내용을 다루고 있다. 삼각함수의 덧셈정리와 도함수를 이용하여 중요한 성질들을 분석하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취기준
문제 2-1	미적분 - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 2-2	미분법 - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문제 2-3	수학Ⅱ- (2) 미분 - ② 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. 수학 Ⅰ- (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2018	97~101
	수학 Ⅰ	김원경 외	비상	2018	95~104
	수학 Ⅱ	이준열 외	천재교육	2018	60~72, 74~77, 91~96
	수학 Ⅱ	김원경 외	비상	2018	71~73, 86~89
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	97~99, 102~108, 109~110
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	124~127, 128~134, 135~138

5. 문항 해설

3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

문항1은 미분을 통해 주어진 함수의 개형을 이해하고 이를 방정식의 근의 개수와 연관지을 수 있는지를 묻고 있다.

문항2는 미분계수의 의미를 이해하고 이를 삼각함수 덧셈정리에 적용할 수 있는지를 묻고 있다.

문항3은 사인법칙을 이용하여 도형의 삼각형 부분 넓이를 구하고, 도함수의 성질과 호와 현 사이 영역이 일정하다는 사실을 이용하여 도함수를 계산해낼 수 있는지를 묻고 있다.

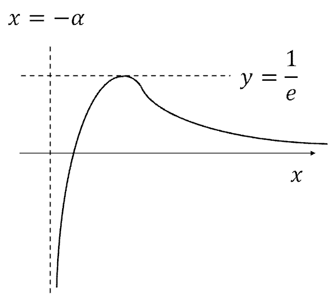
6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	$f(x)$의 개형과 최댓값 e^{-1}을 정확히 파악하였는가?	20	30
	올바른 α의 범위를 구하였는가?	10	
2	삼각형의 넓이 S를 $f'(-1)$과 $f'(1)$의 식으로 나타내었는가?	20	30
	삼각함수 덧셈정리를 이용하여 $\cot(\angle \mathrm{APB})$를 S의 식으로 나타내었는가?	10	
3	원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 원과 삼각형의 교점을 구하였는가?	20	40
	현의 길이가 일정함을 보이고 이를 이용하여 $f'(t)$를 정확히 구하였는가?	20	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln(x+\alpha)}{x+\alpha}$ 을 미분하면 $f'(x)=\dfrac{1}{(x+\alpha)^2}(1-\ln(x+\alpha))$를 얻는다.

따라서 도함수 $f'(x)$는 $-\alpha<x<e-\alpha$ 범위에서 양수, $x>e-\alpha$ 범위에서 음수, $x=e-\alpha$에서는 0이 되며, $f(x)$는 $x=e-\alpha$에서 최댓값 $1/e$를 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x>-\alpha$ 범위에서만 정의되고 x가 $-\alpha$로 가까이 갈수록 음의 무한대로 발산하므로, 문제에 주어진 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$과 종합하여 $f(x)$의 개형을 그려 보면 오른쪽과 같은 그림을 얻는다.



그러므로 $(f\circ f)(x)=\dfrac{1}{e}$ 이라면 $f(x)=e-\alpha$ 인데, $f(x)=t$ 인 x가 정확히 두 개가 되는 것은 $0<t<\dfrac{1}{e}$ 에서만 가능하다. 그러므로 $0<e-\alpha<\dfrac{1}{e}$ 이고, 이것은 $e-\dfrac{1}{e}<\alpha<e$ 과 동치이다.

답 : $e-\dfrac{1}{e}<\alpha<e$

2. $f'(-1)=a$, $f'(1)=-b$로 놓자. 그러면 곡선 $y=f(x)$위의 점 $\mathrm{A}(-1,0)$과 $\mathrm{B}(1,0)$에서의 접선의 방정식은 각각 $y=a(x+1)$, $y=-b(x-1)$로 주어지는데, 이를 연립하면 교점의 좌표 $\left(\dfrac{b-a}{a+b},\dfrac{2ab}{a+b}\right)$를 얻는다. 따라서 $S=\dfrac{2ab}{a+b}$임을 알 수 있다. $f(x)$의 두 접선이 x축과 이루는 예각 $\angle\mathrm{PAB}$와 $\angle\mathrm{PBA}$를 각각 α와 β라 하면, $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$임을 알 수 있다. 이제 $\theta=\angle\mathrm{APB}$라 하면 $\theta=\pi-\alpha-\beta$이고, 따라서

$\tan\theta=\tan(\pi-\alpha-\beta)=-\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta-1}=\dfrac{a+b}{ab-1}$이다.

그러므로 $\cot\theta=\dfrac{ab}{a+b}-\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{S}{2}-\dfrac{1}{23}$이 된다.

답 : $\cot\theta=\dfrac{S}{2}-\dfrac{1}{23}$

3. 원의 방정식은 $(x-t)^2+(y-1)^2=1$이고 직선 AB과 AC의 방정식은 각각 $y=\sqrt{3}x+1$, $y=-\sqrt{3}x+1$로 주어진다. 이를 연립하여 원과 직선 AB, AC가 각각 만나는 두 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$를 구하려면 이차방정식

$(x-t)^2+(\sqrt{3}x)^2=1$을 풀어야 하며, 그 결과로 $x_1=\frac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})$,

$x_2=\frac{1}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})$를 얻는다. 그러므로 $y_1=1+\frac{\sqrt{3}}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})$,

$y_2=1-\frac{\sqrt{3}}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})$임을 알 수 있다. 이제 선분 PQ의 길이를 계산해 보면

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{4-3t^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)^2}=1$이 되므로, 호 PQ와 현 PQ사이 영역의 넓이는 t와 관계없이 항상 상수 C로 일정하다. 삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\sin(\angle\mathrm{PAQ})=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}$로 주어지는데,

$\overline{\mathrm{AP}}^2=x_1^2+(y_1-1)^2=\frac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})^2$,

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=x_2^2+(y_2-1)^2=\frac{1}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})^2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=-\frac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})(t+\sqrt{4-3t^2})=1-t^2$이 된다.

따라서 $f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-t^2)+C$이고, $f'(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}t$를 얻는다.

답 : $f'(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}t$