2-5. 문항카드 ⑤ <자연계열 1회차 1, 2, 3번 문항>

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2023학년도 수시모집 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	부분적분, 극소, 수열의 수렴, 덧셈정리, 극한
예상 소요 시간	90분 / 전체 100분	

2. 문항 및 자료

<가>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

함수 $f(x)g(x)$를 x에 대하여 미분하면 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이다.

구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수가 연속이면

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \text{ 이다.}$$

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

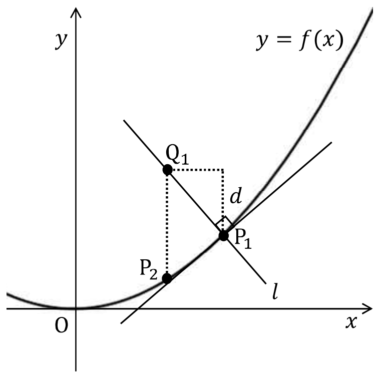
1-1. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$는 미분 가능하고, $f(x+1) = (x+1)f(x)$, $f(1) = 1$을 만족시킨다. $f'(4) - 9f'(2) - 6f'(1)$의 값을 구하시오.

1-2. 함수 $f(u)$는 $f(u) = \int_0^1 x^u (1-x)^{10} dx$, $u \geq 1$이다. $u \geq 2$일 때, $f(u) = g(u)f(u-1)$인 $g(u)$를 구하고, $f(u+1) = \frac{1}{12} f(u-1)$인 u의 값을 구하시오.

<나>

오른쪽 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$에 대하여 점 P_1을 지나고 점 P_1에서의 접선과 수직인 직선을 l이라 하자. 양수 d에 대하여 직선 $y = y_1 + d$와 직선 l의 교점을 Q_1이라 하고, 점 Q_1을 지나고 y축과 평행한 직선과 $y = f(x)$의 그래프의 교점을 점 $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$라 하자.

같은 방법으로 점 P_2를 지나고 점 P_2에서의 접선과 수직인 직선이 직선 $y=y_2+d$와 만나는 점을 Q_2라 하고, 점 Q_2를 지나고 y축과 평행한 직선과 $y=f(x)$의 그래프의 교점을 점 $P_3(x_3, y_3)$이라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 n번째 얻은 점을 $P_n(x_n, y_n)$이라 하자. 점 P_n의 x좌표로 이루어진 수열 $\{x_n\}$의 수렴과 발산은 d의 값에 따라 달라지고, 수렴하는 경우 수열 $\{x_n\}$의 극한값은 함수 $y=f(x)$가 극소가 되는 x의 값이다.



<다> 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 조사해보자.

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad (\text{단, } p,\ q\text{는 상수이고 } n=1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots \ ①$$

이 수열이 수렴하는 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$이므로 식 ①에서

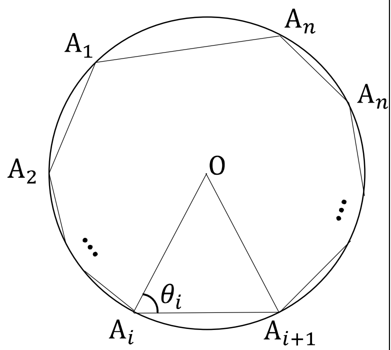
$$\alpha = p\alpha + q \qquad \cdots\cdots \ ②$$

이다.
이때 수열 $\{a_n\}$이 α로 수렴하는 것은 수열 $\{a_n-\alpha\}$가 0으로 수렴하는 것과 같다.
식 ①에서 식 ②를 빼면 $a_{n+1}-\alpha = p(a_n-\alpha)$이므로 수열 $\{a_n-\alpha\}$는 공비가 p인 등비수열이다.
따라서 p의 값에 따라 수열 $\{a_n\}$의 수렴 여부가 달라진다.
제시문 <나>에서 구한 점 P_n의 x좌표를 x_n이라 할 때 다음 문제에 답하시오.

2-1. $f(x)=3x^2$에 대하여 점 $P_1(1,3)$, $d=\frac{1}{5}$일 때, 수열 $\{x_n\}$을 귀납적으로 정의하시오.

2-2. $f(x)=3(x^2-x)$에 대하여 점 $P_1(1,0)$일 때, 수열 $\{x_n\}$이 수렴하도록 하는 d의 값의 범위를 구하시오.

<라> 반지름의 길이가 1인 원 O에 n각형이 내접하고 있다. n각형의 꼭짓점을 각각 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이라 하자. 원의 중심 O는 n각형의 내부에 있고 $\theta_i = \angle OA_iA_{i+1}$이다.
(단, $\theta_n = \angle OA_nA_1$)
현 A_iA_{i+1}의 길이를 x, 원의 중심 O에서 현 A_iA_{i+1}에 내린 수선의 길이를 h라 하면 삼각형 OA_iA_{i+1}의 넓이는 $\frac{1}{2}xh$이다.



<마> 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록이면 그 구간에 있는 n개의 점 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여 부등식 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ 가 성립한다.
여기서 등호는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$일 때 성립한다.

<바> 기원전 3세기의 고대 그리스 수학자 아르키메데스는 원에 내접하는 정다각형의 둘레와 외접하는 정다각형의 둘레를 비교하여 원주율을 계산하였다. 원의 둘레는 그 원에 외접하는 정다각형의 둘레보다 짧고 내접하는 정다각형의 둘레보다 길다. 이때 정다각형의 변이 많아질수록 외접하는 정다각형의 둘레와 내접하는 정다각형의 둘레의 차는 작아지므로 정다각형의 둘레는 원의 둘레에 가까워진다. 아르키메데스는 원에 내접하는 정96각형의 둘레와 원에 외접하는 정96각형의 둘레를 구하여 원주율이 $3\frac{10}{71}$보다 크고 $3\frac{1}{7}$보다 작은 것을 보였다. 이 값을 계산하면 원주율은 3.1408과 3.1429 사이에 있음을 알 수 있다. 원에 내접하는 정n각형의 둘레와 외접하는 정n각형의 둘레에서 n의 값이 한없이 커질 때 극한을 구하면 원주율을 구할 수 있다.
제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 제시문 **<라>**의 원에 내접하는 n각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)$임을 보이고 그 넓이의 최댓값을 구하시오.

3-2. 다음 <보기>와 수열의 극한을 이용하여 반지름의 길이가 1인 원의 넓이는 π임을 보이시오.

< 보 기 >

원의 넓이는 그 원에 외접하는 n각형의 넓이보다 작고 내접하는 n각형의 넓이보다 크다.

3. 출제 의도

함수, 미분과 적분, 방정식과 부등식, 삼각함수와 그 활용, 명제 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 미분과 적분, 삼각함수의 활용과 부등식의 증명, 수열의 수렴과 극한에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	2015 개정 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 1 <가>	[12수학Ⅱ02-05] 수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-1	[12수학Ⅱ02-05] 수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
문제 1-2	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
제시문 2 <나>, <다>	[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
문제 2-1	[12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문제 2-2	[12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
제시문 3 <라>,<마>,<바>	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문제 3-1	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
문제 3-2	[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2020	52-54
	수학	최부림 외	천재교육	2020	52-57
	수학Ⅰ	김원경 외	비상	2020	71-75, 145-150
	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2020	76-80, 157-160
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2020	71-74
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	62-69
	미적분	김원경 외	비상	2020	20-22, 58-66, 96-98, 131-133
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2020	19-25 58-69 97-101
	미적분	황선욱 외	미래엔	2020	151-154

5. 문항 해설

제시문 <가>에서는 함수의 곱의 미분법과 부분적분법에 대한 기본 공식을 서술하고 있다. 문제 1-1은 함수의 곱의 미분법을 이용하여 주어진 함수식을 계산할 수 있는지를 평가한다. 문제 1-2는 부분적분법을 이용하여 주어진 함수식 간의 관계를 유도하고 이차방정식으로 표시되는 관계에서 근을 찾을 수 있는지를 평가한다.

제시문 <나>에서는 함수가 극소가 되는 x의 값으로 수렴하는 수열을 만드는 과정을 설명한다. 제시문 <다>에서는 귀납적으로 정의된 수열의 수렴, 발산을 조사하는 과정을 소개한다. 문제 2-1은 제시문 <나>에서 설명한 수열을 주어진 함수에 대하여 귀납적으로 정의할 수 있는지를 평가한다. 문제 2-2는 제시문 <다>의 과정을 이해하여 제시문 <나>에서 설명한 수열이 수렴하게 하는 d의 값을 바르게 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <라>에서는 원에 내접하는 n각형의 넓이를 n개의 삼각형으로 나누어 각각의 넓이를 구하는 과정을 설명한다. 제시문 <마>에서는 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록일 때 성립하는 부등식을 소개한다. 제시문 <바>에서는 원에 내접하는 다각형의 둘레와 외접하는 다각형의 둘레를 비교하여 원주율을 계산하는 아르키메데스의 방법을 소개한다.

문제 3-1은 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 원에 내접하는 n각형의 넓이가 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)$ 임을 유도하고 사인함수의 그래프가 구간 $(0,\pi)$에서 위로 볼록임을 확인하여 제시문 <마>의 부등식을 활용할 수 있는지를 평가한다.

문제 3-2는 제시문 <바>의 과정을 이해하여 원에 내접하는 다각형의 넓이와 외접하는 다각형의 넓이를 원의 넓이와 비교하고 삼각함수의 극한을 이용하여 원의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1>, <1-2>

① $f(1)=1,\ f(2)=2f(1)=2,\ f(3)=3f(2)=6$임을 보인다.

② $f(x+1)=(x+1)f(x)$를 미분하면 $f'(x+1)=f(x)+(x+1)f'(x)$임을 보인다.

③ ①과 ②의 관계를 이용하여 $f'(4)-9f'(2)-6f'(1)=17$임을 보인다.

④ 부분적분법에 의해 $f(u)=\frac{u}{11}\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{11}dx$임을 보인다.

⑤ ④의 적분식이 $f(u)=\frac{u}{11}\int_0^1 (x^{u-1}-x^u)(1-x)^{10}dx=\frac{u}{11}f(u-1)-\frac{u}{11}f(u)$가 되고

이를 정리하면 $g(u)=\frac{u}{u+11}$ 임을 보인다.

⑥ $g(u)=\frac{u}{u+11}$ 임을 이용하여 $f(u+1)=\frac{u+1}{u+12}f(u)=\frac{(u+1)u}{(u+12)(u+11)}f(u-1)$이 되고

$\frac{u(u+1)}{(u+11)(u+12)} = \frac{1}{12} \Rightarrow u^2 - u - 12 = 0$를 만족하는 $u = -3, 4$이며
$u \geq 2$이므로 $u = 4$ 임을 보인다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ④와 ⑤ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ **문제 <2-1>, <2-2>**

① 점 P_n을 지나고 점 P_n에서의 접선과 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{f'(x_n)}$임을 보인다.

② x_{n+1}과 x_n의 관계식이 $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)d$임을 구한다.

③ <2-1>에서 수열 $\{x_n\}$의 귀납적 정의가 $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = (-\frac{1}{5})x_n$임을 보인다.

④ <2-2>에서 수열 $\{x_n\}$의 귀납적 정의가 $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = (1-6d)x_n + 3d$임을 보인다.

⑤ <2-2>에서 $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$라 할 때 수열 $\{x_n - \alpha\}$가 $x_{n+1} - \alpha = (1-6d)(x_n - \alpha)$을 만족시키고 따라서 공비가 $(1-6d)$인 등비수열임을 보인다.

⑥ 수열 $\{x_n - \alpha\}$가 수렴하기 위한 d의 값의 범위가 $0 < d < \frac{1}{3}$임을 바르게 보인다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ①과 ② 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ **문제 <3-1>, <3-2>**

① 삼각형 $\mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$의 넓이는 $\sin\theta_i\cos\theta_i = \frac{1}{2}\sin(2\theta_i)$이고 n각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)$임을

보인다. (별해. $\angle \mathrm{A}_i \mathrm{O} \mathrm{A}_{i+1} = \pi - 2\theta_i$이므로 삼각형 $\mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\sin(\pi - 2\theta_i) = \frac{1}{2}\sin(2\theta_i)$이고 n각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)$이다.)

② 구간 $(0, \pi)$에서 $(\sin x)'' = -\sin x < 0$이므로 $y = \sin x$의 그래프는 위로 볼록이고(또는 $\sin$함수의 그래프의 그림으로 설명) 제시문 <마>에 의해 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i) \le \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2\theta_i\right)$ 이 성립함을 보인다.

③ $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$ 일 때 등호가 성립하고 $\sum_{i=1}^{n}2\theta_i = (n-2)\pi$이므로

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i) \le \frac{n}{2}\sin\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{n}{2}\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

따라서 n각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$임을 보인다.

④ 원에 외접하는 정n 각형의 넓이는 $n\tan\frac{\pi}{n}$임을 보인다.

⑤ 원의 넓이를 A라 하면 $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} < A < n\tan\frac{\pi}{n}$임을 보인다.

⑥ 삼각함수의 극한을 사용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = \pi \le A \le \pi = \lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{n}$이므로 원의 넓이는 π임을 보인다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지를 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 4가지를 만족하는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 3가지를 만족하는 경우
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지를 만족하나 논리 전개가 다소 미흡한 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지를 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지를 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1

함수의 곱의 미분법에 의해 다음의 관계가 성립한다.

$$f'(x+1) = f(x) + (x+1)f'(x) \Rightarrow f'(x+1) - (x+1)f'(x) = f(x) \qquad \cdots\cdots ①$$

정의된 함수의 관계를 이용하면

$f(1) = 1$, $f(2) = 2f(1) = 2!$, $f(3) = 3f(2) = 3!$, $\cdots$ 이고

$f'(4) - 9f'(2) - 6f'(1)$에 식 ①의 관계를 적용하면

$$\begin{aligned} f'(4) - 9f'(2) - 6f'(1) &= f'(4) - 4f'(3) + 4(f'(3) - 3f'(2)) + 3(f'(2) - 2f'(1)) \\ &= f(3) + 4f(2) + 3f(1) = 3! + 4\times 2! + 3\times 1 = 17 \end{aligned}$$ 이다.

■ 1-2

부분적분에 의해

$$f(u)=\int_0^1 x^u(1-x)^{10}dx=-x^u\frac{1}{11}(1-x)^{11}\Big|_{x=0}^{1}+\frac{u}{11}\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{11}dx=\frac{u}{11}\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{11}dx$$

이 식이 $f(u)$ 또는 $f(u-1)$의 꼴이 되기 위해서는 $(1-x)$의 지수가 10이 되어야 하므로

$$\begin{aligned}f(u)&=\frac{u}{11}\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{11}dx=\frac{u}{11}\int_0^1 x^{u-1}(1-x)(1-x)^{10}dx\\&=\frac{u}{11}\int_0^1(x^{u-1}-x^u)(1-x)^{10}dx=\frac{u}{11}\left(\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{10}dx-\int_0^1 x^u(1-x)^{10}dx\right)\\&=\frac{u}{11}f(u-1)-\frac{u}{11}f(u)\end{aligned}$$

위 관계식을 정리하면 $f(u)=\frac{u}{u+11}f(u-1)$이므로 $g(u)=\frac{u}{u+11}$이다.

이 관계식을 이용하면 $f(u+1)=\frac{(u+1)}{u+12}f(u)=\frac{(u+1)u}{(u+12)(u+11)}f(u-1)$ 이므로,

$\frac{u(u+1)}{(u+11)(u+12)}=\frac{1}{12}$을 만족시키는 u를 찾는다.

$12u^2+12u=u^2+21u+132 \Rightarrow 11u^2-11u-132=0 \Rightarrow u^2-u-12=(u-4)(u+3)=0$

$u\ge 2$이므로 $u=4$이다.

■ 2-1

점 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$과 $\mathrm{Q}_n(x_{n+1},y_n+d)$을 지나는 직선은 점 P_n에서의 접선과 수직이므로

기울기가 $-\frac{1}{f'(x_n)}$이다. 따라서 $\frac{(y_n+d)-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{d}{x_{n+1}-x_n}=-\frac{1}{f'(x_n)}$이다.

그러므로 $x_{n+1}=x_n-f'(x_n)d$이다. $f'(x)=6x$이므로 수열 $\{x_n\}$은 귀납적으로 정의된 수열

$x_1=1,\quad x_{n+1}=x_n-6x_n\times\frac{1}{5}=(-\frac{1}{5})x_n$ 임을 알 수 있다.

■ 2-2

$f'(x)=3(2x-1)$이므로 수열 $\{x_n\}$은 귀납적으로 정의된 수열

$$x_1=1$$

$$x_{n+1}=x_n-3(2x_n-1)d=(1-6d)x_n+3d \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.

수열 $\{x_n\}$이 수렴하는 경우 $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ 라 하면 $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\alpha$ 이므로 식 ①에서

$$\alpha=(1-6d)\alpha+3d \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

이다.

식 ①에서 식 ②를 빼면 $x_{n+1}-\alpha=(1-6d)(x_n-\alpha)$이고,

따라서 수열 $\{x_n-\alpha\}$는 공비가 $(1-6d)$인 등비수열이다.

이 수열이 수렴하기 위해서는 $-1<1-6d\le 1$이어야 하고 $0\le d<\frac{1}{3}$이다.

그런데 d는 양수이므로 $0<d<\frac{1}{3}$이다.

■ 3-1

삼각형 $\mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$의 넓이는 $\frac{1}{2}xh$ 이고 $x = 2\cos\theta_i$, $h = \sin\theta_i$이므로

$$\frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}2\sin\theta_i\cos\theta_i = \frac{1}{2}\sin(2\theta_i)$$

$(\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ 이므로 $2\sin\theta_i\cos\theta_i = \sin(\theta_i+\theta_i) = \sin(2\theta_i)$이다.)

따라서 원에 내접하는 n각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)$이다.

(별해. $\theta_i = \angle\mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$이므로 $\angle\mathrm{A}_i\mathrm{O}\,\mathrm{A}_{i+1} = \pi - 2\theta_i$이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\sin(\pi-2\theta_i) = \frac{1}{2}\sin(2\theta_i)$이고 n각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)$이다.)

한편 $f(x) = \sin x$라 하면 $f''(x) = -\sin x$이므로 구간 $(0, \pi)$에서 $f''(x) < 0$이다.
따라서 구간 $(0, \pi)$에서 함수 $f(x) = \sin x$의 그래프는 위로 볼록이고
제시문 <마>에 의해 부등식 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i) \le \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2\theta_i\right)$이 성립한다.

즉, $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i) = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)\right) \le \frac{n}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2\theta_i\right)$

여기서 $\sum_{i=1}^{n}2\theta_i$ 는 n각형의 내각의 합이므로

$\sum_{i=1}^{n}2\theta_i = (n-2)\pi$이고, 등호는 $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$ 일 때 성립하므로

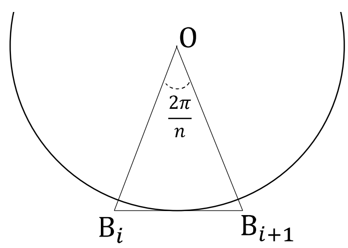
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i) \le \frac{n}{2}\sin\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{n}{2}\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

즉, 원에 내접하는 n각형의 넓이가 최대인 경우는 정n 각형이고 그 넓이는 $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ 이다.

■ 3-2

문제 3-1에서 원에 내접하는 정n각형의 넓이는 $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ 이다. ...... ①

원에 외접하는 정n각형의 넓이를 구하자. 원 O에 외접하는 정n각형의 꼭짓점을 각각 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \cdots, \mathrm{B}_n$이라 하면 $\angle\mathrm{B}_i\mathrm{OB}_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ 이다. 따라서 $\overline{\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}} = 2\tan\frac{2\pi}{2n}$ 이고 원의 중심 O에서 현 $\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}$에 내린 수선의 길이는 반지름의 길이와 같으므로 삼각형 $\mathrm{B}_i\mathrm{OB}_{i+1}$의 넓이 S_i는 $S_i = \tan\frac{\pi}{n}$ 이다.



(별해. $\angle\mathrm{OB}_i\mathrm{B}_{i+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ 이므로 삼각형 $\mathrm{B}_i\mathrm{OB}_{i+1}$의 넓이는 $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \tan\frac{\pi}{n}$ 이다.)

따라서 원에 외접하는 정n각형의 넓이는 $n\tan\frac{\pi}{n}$ 이다. ...... ②

①, ②에서 원의 넓이를 A라 하면 $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} < A < n\tan\frac{\pi}{n}$

위 식에 $n\to\infty$인 극한을 구하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\frac{2\pi}{n}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}=\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}n\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}\lim_{n\to\infty}\sec\frac{\pi}{n}$$ 이다.

여기서 $\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}n\frac{\pi}{n}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi$, $\lim_{n\to\infty}\sec\frac{\pi}{n}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{\pi}{n}=\pi$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=\pi\le A\le\pi=\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{\pi}{n}$이므로 $A=\pi$

즉, 반지름의 길이가 1인 원의 넓이는 π이다.