러시아 사이에서 한국은 평화와 공존을 위해 역할과 책임, 그리고 기여할 바를 모색하여 중추국으로서 위상을 정립해야 한다. 안보와 경제적 안정이라는 양날의 검을 쥐고, 강대국의 자국 이익을 우선으로 한 패권 다툼을 견제할 수 있는 가치 외교에 중점을 두어야 한다. 경제・안보・재난 등의 환경 변화를 신중히 고려하여 지정학적 리스크를 최소화할 수 있도록 실리적 경제 외교에 주력하여야 한다. 즉, 안보가 보장되고, 경제적 지속 성장을 이루어낼 수 있는 실용주의 노선을 바탕으로 한 대응이 필요하다.

Ⅵ-5. 문항카드: 논술우수자전형(자연계열)

[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2023학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 계열 (수학) / <문제 1>	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅱ
	핵심개념 및 용어	다항함수의 도함수, 평균값 정리, 정적분
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 1> 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $g(x)$의 그래프가 원점을 지나고, 함수 $g(x)$에 대하여 사차함수 $f(x)$를

$$f(x) = x\int_0^x g(t)\,dt$$

로 정의할 때 $f(3)=0$이라 하자. 다음 질문에 답하시오. [총 25점]

(1) 다항함수 $g(x)$와 $f(x)$를 구하시오. [10점]

(2) 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율을 구하고, 그 값과 $f'(b)$가 같게 되는 실수 b의 값을 구간 $(0,3)$에서 구하시오. [7점]

(3) $\int_0^3 (|f''(x)| - f''(x))\,dx$의 값을 구하시오. [8점]

3. 제시문 요약

함수와 그 적분의 관계와 함수의 그래프가 지나는 점에 대한 조건을 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$의 식을 구한다. 그리고 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율을 구하여, 그 값과 $f'(b)$가 같게 되는 실수 b의 값을 구간 $(0,3)$에서 구한다. 마지막으로 구간 $[0,3]$에서 f''의 절댓값이 포함된 함수의 정적분 값을 구한다.

4. 출제의도

다항함수의 그래프가 지나는 점, 차수에 대한 조건과 적분의 성질을 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항을 결정하고, 함수의 식을 구할 수 있는지를 확인한다. 그리고 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율의 정의를 알고 평균값 정리를 이해하고 있으며, 평균값 정리의 식을 만족하는 실수 b의 값을 구간 $(0,3)$에서 구할 수 있는지 살펴본다. 마지막으로 구간 $[0,3]$에서 f''가 양의 값, 음의 값을 가지는 구간을 구분하여, f''의 절댓값이 포함된 함수의 식을 간단히 정리할 수 있고, 이에 대한 정적분 값을 구할 수 있는지 확인한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

<문제 1> (1)

적용 교육과정	[수학 Ⅱ] - (2) 미분 - 2 도함수 - (3) 적분 - 2 정적분
성취기준 / 영역별 내용	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

<문제 1> (2)

적용 교육과정	[수학 Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수 - (2) 미분 - 2 도함수 - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
성취기준 / 영역별 내용	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

<문제 1> (3)

적용 교육과정	[수학 Ⅱ] - (2) 미분 - ② 도함수 - (3) 적분 - ② 정적분
성취기준 / 영역별 내용	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 Ⅱ	박교식 외 19인	동아출판	2018	53, 62-67, 77-80	교과서	재구성
수학 Ⅱ	이준열 외 9인	천재교육	2018	121-126	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

(1) 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $g(x)$의 최고차항을 x^n이라고 하면 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt$로부터

$f(x)$의 최고차항은 $x\cdot\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}=\dfrac{1}{n+1}x^{n+2}$ 이고, 이것이 사차항이 되려면 $n=2$ 이다.

따라서 $g(x)=x^2+ax$ 꼴이다. (a는 상수)

그리고 주어진 식에 의해 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt = x\left[\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{a}{2}t^2\right]_0^x = \dfrac{1}{6}x^3(2x+3a)$ 인데,

주어진 조건 $f(3)=0$ 으로부터 $a=-2$ 이다.

따라서 $g(x)=x^2-2x$ 이고, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 이다.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 이므로, $f(0)=0$, $f(3)=0$ 이다.

따라서 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율은 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{0-0}{3}=0$ 이고,

$f'(x)=\dfrac{4}{3}x^3-3x^2=\dfrac{1}{3}x^2(4x-9)$ 이다.

이때 $f'(x)=0$ 은 구간 $(0,3)$에서 $x=\dfrac{9}{4}$일 때만 성립한다. 따라서 $b=\dfrac{9}{4}$ 이다.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 으로부터 $f''(x)=4x^2-6x=2x(2x-3)$ 이므로

$0\le x\le\dfrac{3}{2}$ 에서는 $f''(x)\le 0$ 이고,

$x<0$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ 이면 $f''(x)>0$ 이다.

따라서 $|f''(x)|-f''(x)=\begin{cases}-2f''(x), & 0\le x\le \frac{3}{2} \\ 0, & x<0 \text{ 또는 } x>\frac{3}{2}\end{cases}$

그러므로

$$\int_0^3 (|f''(x)|-f''(x))\,dx = -2\int_0^{\frac{3}{2}} f''(x)\,dx$$

$$= -2\,[f'(x)]_0^{\frac{3}{2}} = -2\left[\frac{1}{3}x^2(4x-9)\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ 이다.}$$

7. 채점 기준

<table>
<tr><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>

<문제 1> (1)

① $g(x)$의 최고차항을 x^n이라고 하면 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt$로부터 $f(x)$의 최고차항은 $\frac{1}{n+1}x^{n+2}$ 이다.
② $f(x)$의 최고차항이 사차항이 되려면 $n=2$ 이다.
③ 따라서 $g(x)=x^2+ax$ 꼴이다.
④ 그리고 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt = x\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{6}x^3(2x+3a)$ 이다.
⑤ 주어진 조건 $f(3)=0$ 으로부터 $a=-2$ 이다.
따라서 $g(x)=x^2-2x$ 이고, $f(x)=\frac{1}{3}x^4-x^3$ 이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ①~⑤단계까지 서술하였으나 ④~⑤ 과정 중 계산 실수가 1개 있는 경우
3등급: ①~③단계를 옳게 서술하고 ④단계부터 틀린 경우
4등급: ①~②단계를 옳게 서술하고 ③단계부터 틀린 경우
5등급: ①단계까지만 옳게 서술한 경우
6등급: 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급: 백지 답안

</td><td>10점</td></tr>
<tr><td><문제 1> (2)</td><td>7점</td></tr>
</table>

① 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율은 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{0-0}{3} = 0$ 이다.

② $f'(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - 3x^2$ 이다.

③ $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^2(4x-9) = 0$ 은 $x=0$ 또는 $x = \dfrac{9}{4}$에서 성립한다.

④ 이 중에서 구간 $(0,3)$에 속하는 것은 $x = \dfrac{9}{4}$ 뿐이다. 따라서 $b = \dfrac{9}{4}$ 이다.

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계까지 모두 서술했으나 계산 오류가 1개 있는 경우
3등급 : ③단계까지 서술하고, 해당하지 않는 경우를 포함하여 제시한 경우
4등급 : ①, ②단계까지만 옳게 제시한 경우
5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

<문제 1> (3)

① $f''(x) = 4x^2 - 6x = 2x(2x-3)$ 이므로

② $0 \le x \le \dfrac{3}{2}$ 에서는 $f''(x) \le 0$ 이고, $x < 0$ 또는 $x > \dfrac{3}{2}$ 이면 $f''(x) > 0$ 이다.

③ 따라서 $|f''(x)| - f''(x) = \begin{cases} -2f''(x), & 0 \le x \le \dfrac{3}{2} \\ 0, & x < 0 \text{ 또는 } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

④ 그러므로 $\displaystyle\int_0^3 (|f''(x)| - f''(x))\,dx = -2\int_0^{\frac{3}{2}} f''(x)\,dx$

$$= -2\left[f'(x)\right]_0^{\frac{3}{2}} = -2\left[\frac{1}{3}x^2(4x-9)\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}$$

이다.

8점

[채점 기준]
1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급 : ④단계까지 모두 서술했으나 계산 오류가 1개 있는 경우
3등급 : ③단계까지 서술하고, ④단계로 진행하지 못한 경우
4등급 : ①, ②단계까지만 옳게 제시한 경우
5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우
6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우
7등급 : 백지 답안

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

(1) 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $g(x)$의 최고차항을 x^n이라고 하면 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt$로부터

$f(x)$의 최고차항은 $x\cdot\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}=\dfrac{1}{n+1}x^{n+2}$ 이고, 이것이 사차항이 되려면 $n=2$ 이다.

따라서 $g(x)=x^2+ax$ 꼴이다. (a는 상수)

그리고 주어진 식에 의해 $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt=x\left[\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{a}{2}t^2\right]_0^x=\dfrac{1}{6}x^3(2x+3a)$ 인데,

주어진 조건 $f(3)=0$ 으로부터 $a=-2$ 이다.

따라서 $g(x)=x^2-2x$ 이고, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 이다.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 이므로, $f(0)=0$, $f(3)=0$ 이다.

따라서 구간 $[0,3]$에서의 $f(x)$의 평균변화율은 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{0-0}{3}=0$ 이고,

$f'(x)=\dfrac{4}{3}x^3-3x^2=\dfrac{1}{3}x^2(4x-9)$ 이다.

이때 $f'(x)=0$ 은 구간 $(0,3)$ 에서 $x=\dfrac{9}{4}$일 때만 성립한다. 따라서 $b=\dfrac{9}{4}$ 이다.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-x^3$ 으로부터 $f''(x)=4x^2-6x=2x(2x-3)$ 이므로

$0\le x\le\dfrac{3}{2}$ 에서는 $f''(x)\le 0$ 이고,

$x<0$ 또는 $x>\dfrac{3}{2}$ 이면 $f''(x)>0$ 이다.

따라서 $|f''(x)|-f''(x)=\begin{cases}-2f''(x), & 0\le x\le\dfrac{3}{2}\\ 0, & x<0 \text{ 또는 } x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$

그러므로

$$\int_0^3 (|f''(x)| - f''(x))\,dx = -2\int_0^{\frac{3}{2}} f''(x)\,dx$$

$$= -2\,[f'(x)]_0^{\frac{3}{2}} = -2\left[\frac{1}{3}x^2(4x-9)\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}$$ 이다.

[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2023학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 계열 (수학) / <문제 2>	
출제범위	교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	수열의 극한, 급수, 여러 가지 적분법
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 2> 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{n\pi + \frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx$$

로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 질문에 답하시오. [총 25점]

(1) $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(A\sin x + B\cos x)\,dx$를 만족시키는 상수 A, B를 구하시오. [7점]

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [10점]

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$의 값을 구하시오. [8점]

3. 제시문 요약

$a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx$를 치환적분을 통해 $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(A\sin x + B\cos x)\,dx$의 형태로 바꾸어 본다. 수열 a_n의 일반항을 구하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 계산해본다. a_n의 일반항으로부터 $a_n - a_{n+1}$를 계산하여 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$의 값을 구해본다.

4. 출제의도

치환적분을 통하여 정적분을 원하는 형태로 바꿀 수 있는지를 확인하고, 부분적분을 활용하여 주어진 정적분을 계산할 수 있는지를 물어본다. 마지막으로, 수열의 일반항을 구하여 주어진 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 확인한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

<문제 2> (1)

적용 교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
성취기준 / 영역별 내용	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

<문제 2> (2)

적용 교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
성취기준 / 영역별 내용	[12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

<문제 2> (3)

적용 교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - 2 급수
성취기준 / 영역별 내용	[12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	23-28, 37-44, 149-161,	교과서	재구성

미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2018	22-28, 34-40, 143-154	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

(1) 치환적분을 통해 $a_n = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 으로 나타낼 수 있다. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$ 임을 이용하면

$$a_n = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx$$

이 성립하므로 $A=1$, $B=1$임을 알 수 있다.

(2) 부분적분을 통해 $\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$ 가 됨을 알 수 있고,

비슷하게 $\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$ 가 된다. 따라서

$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C_1$ 이고, $\int e^{-x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)+C_2$

이므로 $\int e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx = -e^{-x}\cos x + C_3$ 가 된다. 또는 부분적분을 이용하여

$$\int e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = \int e^{-x}(-\cos x)'\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x + C_4$$

임을 알 수 있다. (단, C_1, C_2, C_3, C_4는 적분상수)

그러므로 $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{n\pi} = 1-(-1)^n e^{-n\pi} = 1-(-e^{-\pi})^n$이고, $|-e^{-\pi}|<1$이므로, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-(-e^{-\pi})^n\right)=1$이다.

(3) $a_n = 1-(-e^{-\pi})^n$이므로

$a_{n+1} = 1-(-e^{-\pi})^{n+1} = 1-(-e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n = 1+e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n$이다.

$a_n - a_{n+1} = -(-e^{-\pi})^n - e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n$이 되어

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = -(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n$ 이고 $|-e^{-\pi}|<1$이므로

급수의 합을 계산하여 $-(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})\frac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = e^{-\pi}$가 됨을 알 수 있

다.

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<문제 2> (1) ① 치환적분을 통해 $a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 으로 나타낼 수 있다. ② $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$ 임을 이용하면 $a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ $= \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx$ 이 성립하므로 $A=1$, $B=1$임을 알 수 있다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ②단계에서 A 혹은 B 둘 중 하나만 맞은 경우 3등급: ②단계에서 답을 찾으려고 시도했으나 A와 B 둘 다 틀린 경우 4등급: ①단계만 맞은 경우 5등급: ①단계에서 잘못된 치환적분을 사용한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	7점
<문제 2> (2) ① 부분적분을 통해 $\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C_1$ 가 됨을 알 수	10점

있고, 비슷하게 $\int e^{-x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x) + C_2$ 가 된다.

② 따라서 $\int e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = -e^{-x}\cos x + C_3$ 가 된다.

또는 부분적분을 이용하여

$$\int e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= \int e^{-x}(-\cos x)'\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x + C_4$$

임을 알 수 있다. (단, C_1, C_2, C_3, C_4는 적분상수)

③ 그러므로

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{n\pi}$$
$$= 1 - (-1)^n e^{-n\pi} = 1 - (-e^{-\pi})^n$$

이고,

④ $|-e^{-\pi}| < 1$이므로

⑤ 극한값은 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - (-e^{-\pi})^n\right) = 1$이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: 답은 맞았지만 ④단계를 언급하지 않은 경우
3등급: ③단계까지는 맞았으나 ⑤단계에서 틀린 경우
4등급: ②단계까지는 맞았으나 ③단계에서 틀린 경우
5등급: ①단계까지 맞은 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

<문제 2> (3)

8점

① $a_n = 1 - (-e^{-\pi})^n$ 이므로

$a_{n+1} = 1 - (-e^{-\pi})^{n+1} = 1 - (-e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n = 1 + e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n$ 이다.

② $a_n - a_{n+1} = -(-e^{-\pi})^n - e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n = -(1 + e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n$ 이 되어

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = -(1 + e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n$ 이고

④ $|-e^{-\pi}| < 1$이므로

⑤ 급수의 합을 계산하여 $-(1 + e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n = -(1 + e^{-\pi})\dfrac{-e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} = e^{-\pi}$가

됨을 알 수 있다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음

2등급: 답은 맞았으나 ④단계를 언급하지 않은 경우 3등급: ③단계까지는 맞았으나 ⑤단계에서 계산 실수가 있는 경우 4등급: ②단계까지 맞은 경우 5등급: ①단계만 맞은 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

(1) 치환적분을 통해 $a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ 으로 나타낼 수 있다. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$ 임을 이용하면

$$a_n = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{n+\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{n\pi} e^{-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx$$

이 성립하므로 $A=1$, $B=1$임을 알 수 있다.

(2) 부분적분을 통해 $\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$ 가 됨을 알 수 있고,

비슷하게 $\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$ 가 된다. 따라서

$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C_1$ 이고, $\int e^{-x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)+C_2$

이므로 $\int e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx = -e^{-x}\cos x + C_3$ 가 된다. 또는 부분적분을 이용하여

$$\int e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = \int e^{-x}(-\cos x)'\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x + C_4$$

임을 알 수 있다. (단, C_1, C_2, C_3, C_4는 적분상수)

그러므로 $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{n\pi} = 1-(-1)^n e^{-n\pi} = 1-(-e^{-\pi})^n$이고, $|-e^{-\pi}|<1$이므로, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-(-e^{-\pi})^n\right) = 1$이다.

(3) $a_n = 1-(-e^{-\pi})^n$이므로

$a_{n+1} = 1-(-e^{-\pi})^{n+1} = 1-(-e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n = 1+e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n$이다.

$a_n - a_{n+1} = -(-e^{-\pi})^n - e^{-\pi}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n$이 되어

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = -(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n$ 이고 $|-e^{-\pi}| < 1$이므로

급수의 합을 계산하여 $-(1+e^{-\pi})\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n = -(1+e^{-\pi})\dfrac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = e^{-\pi}$가 됨을 알 수 있다.

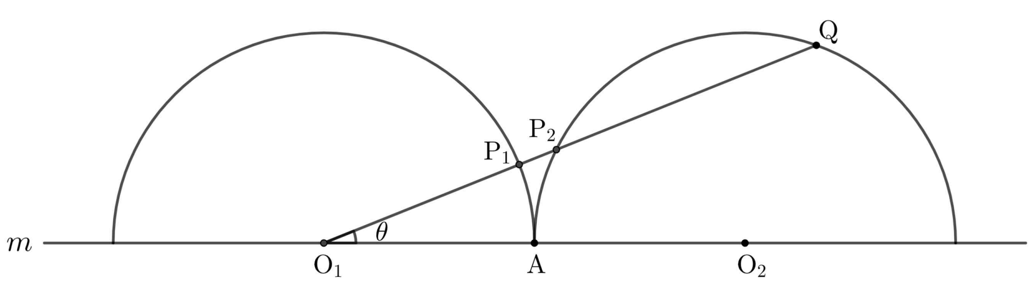
[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2023학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 계열 (수학) / <문제 3>	
출제범위	교육과정 과목명	수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 여러 가지 미분법
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 3> 아래 그림과 같이 한 직선 m위에 지름이 놓인 두 반원의 반지름이 모두 1이며, 중심이 각각 O_1, O_2이고, 직선 m위의 한 점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{O_1A}} = \overline{\mathrm{O_2A}} = 1$이다. 반원 O_1위의 한 점 P_1에 대해 $\angle \mathrm{P_1O_1A} = \theta$라고 할 때, 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P_1}}$이 반원 O_2와 만나는 두 점 중 점 P_1에 가까운 순서대로 각각 P_2, Q라 하자. 다음 질문에 답하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$이다.) [총 25점]



(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$일 때, 삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이를 구하시오. [7점]

(2) 선분 $\mathrm{P_1P_2}$의 길이를 $\ell(\theta)$라고 할 때, $\ell(\theta)$의 식을 구하고, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\ell(\theta)}{\theta^2}$의 값을 구하시오. [8점]

(3) 삼각형 $\mathrm{O_1AP_1}$의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 $\mathrm{O_1O_2Q}$의 넓이를 $g(\theta)$, 사각형 $\mathrm{AO_2P_2P_1}$의 넓이를 $h(\theta)$라고 하자. 이때, $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$를 구하고, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. [10점]

3. 제시문 요약

한 직선 m위에 지름이 놓인 두 반원의 반지름이 모두 1이며, 중심이 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$이고, 직선 m 위의 한 점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{O_1A}} = \overline{\mathrm{O_2A}} = 1$이다. $\angle \mathrm{P_1O_1A} = \theta$가 되도록 반원 위에 점 $\mathrm{P_1}$을 잡고, 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P_1}}$이 반원 $\mathrm{O_2}$와 만나는 두 점 중 점 $\mathrm{P_1}$에 가까운 순서대로 점 $\mathrm{P_2}$, 점 Q라 하자. 주어진 θ에 대하여 삼각형 $\mathrm{P_2O_2Q}$의 넓이를 구하고, 선분 $\mathrm{P_1P_2}$의 길이를 θ에 관한 식으로 나타낸 뒤, θ가 0으로 수렴할 때, 선분 $\mathrm{P_1P_2}$의 길이를 θ^2으로 나눈 식의 극한을 계산해본다. 마지막으로, 주어진 삼각형들의 넓이를 θ에 관한 식으로 표현해보고 극한을 계산해본다.

4. 출제의도

원의 성질을 활용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 확인해보며, 삼각비의 정의 또는 사인법칙과 코사인법칙 등을 이용하여 주어진 선분의 길이와 삼각형의 넓이를 식으로 표현할 수 있는지를 알아본다. 마지막으로 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는지도 확인한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

<문제 3> (1)

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

<문제 3> (2)

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

<문제 3> (3)

적용 교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수 [미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
성취기준 / 영역별 내용	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

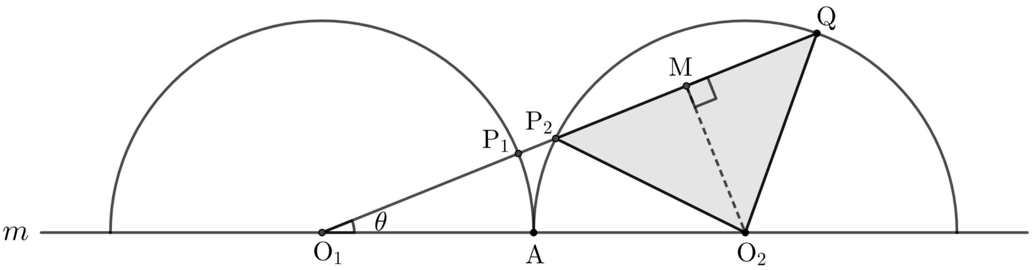
나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학 I	박교식 외 19인	동아출판	2018	86-100	교과서	재구성
수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2018	96-115	교과서	재구성
미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	64-73	교과서	재구성
미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2018	63-74	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

(1) 선분 P_2Q의 중점을 M이라 할 때, 이등변삼각형 P_2O_2Q에서 중선 O_2M의 길이는 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이다.

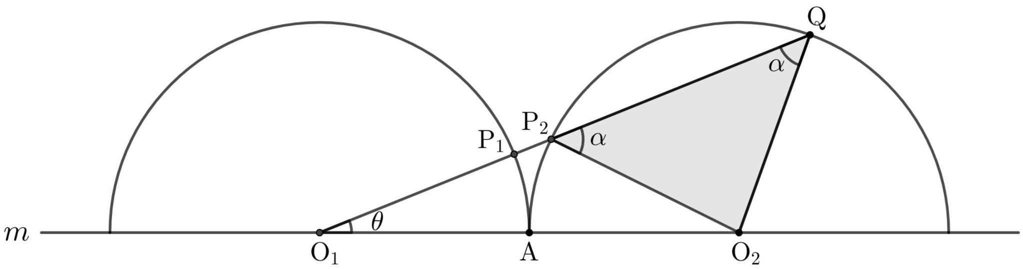


그러므로 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이면 $\overline{O_2M} = 2\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 $\overline{MQ} = \sqrt{\overline{O_2Q}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로,

삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{MQ}\times\overline{O_2M} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$이다.

[다른 풀이] $\angle O_1QO_2 = \angle O_2P_2Q = \alpha$라 하고, 삼각형 O_1O_2Q에 대해 사인법칙을 적용해보면 $\dfrac{\overline{O_1O_2}}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{O_2Q}}{\sin\theta}$가 된다. $\overline{O_1O_2} = 2$, $\overline{O_2Q} = 1$이므로, $\sin\alpha = 2\sin\theta$이 된다.



그리고 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{O_2P_2}\times\overline{O_2Q}\times\sin\angle P_2O_2Q = \dfrac{1}{2}\sin(\pi-2\alpha) = \dfrac{1}{2}\sin2\alpha$이다. 한편, $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$\sin\alpha = 2\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$이고 $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이다. 따라서 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\sin2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$이다.

(2) 직각삼각형 O_1O_2M에서 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이고, $\overline{O_1M} = \overline{O_1O_2}\cos\theta = 2\cos\theta$ 이다.

그리고 $\overline{P_2M} = \sqrt{\overline{O_2P_2}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이다.

따라서 $\ell(\theta) = \overline{P_1P_2} = \overline{O_1M} - \overline{P_2M} - \overline{O_1P_1} = 2\cos\theta - \sqrt{1-4\sin^2\theta} - 1$ 이다.

$\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2}$을 정리해보면

$$\frac{2\cos\theta - 1 - \sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$

이 되고, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)}=-1$이므로

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2}=-1+2=1$이 된다.

[다른 풀이] 삼각형 $O_1O_2P_2$에서 사인법칙을 이용하면 $\dfrac{\overline{O_1P_2}}{\sin\angle O_1O_2P_2}=\dfrac{\overline{O_2P_2}}{\sin\theta}$가 성립한다. 이때,

$\angle O_1QO_2=\angle O_2P_2Q=\alpha$라 하면, $\angle O_1O_2P_2=\alpha-\theta$이고 $\overline{O_2P_2}=1$이므로 $\overline{O_1P_2}=\dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}$이다. 따라서 선분 P_1P_2의 길이는 $\ell(\theta)=\dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}-1=\dfrac{\sin(\alpha-\theta)-\sin\theta}{\sin\theta}$이다.

$\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta$이며, $\sin\alpha=2\sin\theta$이고

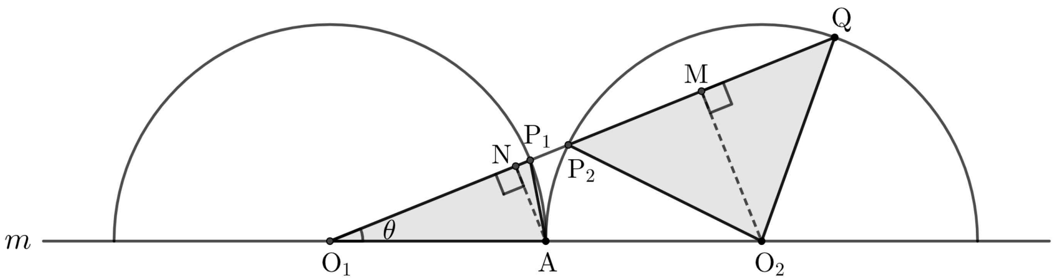
$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=\sqrt{1-4\sin^2\theta}$이다. 따라서 $\ell(\theta)=2\cos\theta-1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}$이다.

$$\begin{aligned}\frac{\ell(\theta)}{\theta^2}&=\frac{2\cos\theta-1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}\\&=\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2}+\frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}=\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2}+\frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}\end{aligned}$$

이 되고, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)}=-1$ 이므로

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2}=-1+2=1$이 된다.

(3) 점 A에서 선분 O_1Q에 내린 수선의 발을 N이라 할 때, 직각삼각형 O_1AN에서 $\overline{AN}=\overline{O_1A}\sin\theta=\sin\theta$ 이므로,



삼각형 O_1AP_1의 넓이는 $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{O_1P_1}\times\overline{AN}=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ 이다.

삼각형 O_1O_2Q의 넓이는 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{O_1Q}\times\overline{O_2M}$ 인데,

$\overline{O_1Q}=\overline{O_1M}+\overline{MQ}=2\cos\theta+\sqrt{\overline{O_2Q}^2-\overline{O_2M}^2}=2\cos\theta+\sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이므로

$g(\theta)=\left(2\cos\theta+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)\sin\theta$ 이다.

삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{P_2Q}\times\overline{O_2M}=\overline{MQ}\times\overline{O_2M}=\sqrt{1-4\sin^2\theta}\times 2\sin\theta$ 이고,

사각형 $AO_2P_2P_1$의 넓이는

$h(\theta)=$ (삼각형 O_1O_2Q의 넓이) $-$ (삼각형 P_2O_2Q의 넓이) $-$ (삼각형 O_1AP_1의 넓이)

이므로 $h(\theta)=g(\theta)-\sqrt{1-4\sin^2\theta}\times 2\sin\theta-f(\theta)$ 이다.

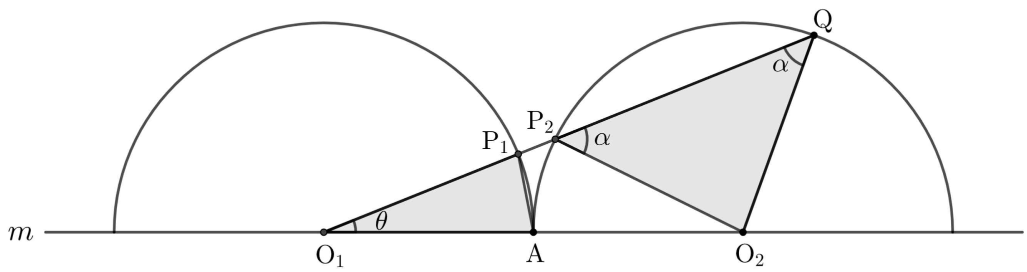
따라서 $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2g(\theta)-2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{4\sin\theta\cos\theta}{\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left(4\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\right)=4\times 1\times 1=4$ 이다.

[다른 풀이] 삼각형 O_1AP_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{O_1A}\times\overline{O_1P_1}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$이므로, $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$이다.

삼각형 O_1O_2Q의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_2Q}\times\sin\angle QO_2O_1=\sin(\pi-\alpha-\theta)$이고,

$\sin(\pi-\alpha-\theta)=\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta=\sin 2\theta+\cos\alpha\sin\theta$
이므로 $g(\theta)=\sin 2\theta+\cos\alpha\sin\theta$가 된다. 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{O_2Q}\times\overline{O_2P_2}\times\sin\angle P_2O_2Q=\frac{1}{2}\sin(\pi-2\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$이고,
(사각형 $AO_2P_2P_1$의 넓이) = (삼각형 O_1O_2Q의 넓이) − (삼각형 P_2O_2Q의 넓이) − (삼각형 O_1AP_1의 넓이)로부터 $h(\theta)=g(\theta)-\frac{1}{2}\sin 2\alpha-f(\theta)$ 임을 알 수 있다.



$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos\alpha\sin\theta$ 임을 이용하면

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2g(\theta)-\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2\sin 2\theta}{\theta}=4$이 된다.

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<문제 3> (1) ① 이등변삼각형 P_2O_2Q에서 중선 $\overline{O_2M}$의 길이는 $\overline{O_2M}=\overline{O_1O_2}\sin\theta=2\sin\theta$ 이다.	7점

② 그러므로 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$이면 $\overline{O_2M} = 2\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 이다. ③ 따라서 $\overline{MQ} = \sqrt{\overline{O_2Q}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로, ④ 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times\overline{MQ}\times\overline{O_2M} = \frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$이다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 한 개만 있는 경우 3등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 두 개만 있는 경우 4등급: ①~③단계를 시도했으나 마무리하지 못한 경우 5등급: ①단계를 시도한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안 **[다른 풀이]** ① $\angle O_1QO_2 = \angle O_2P_2Q = \alpha$라 하고, 삼각형 O_1O_2Q에 대해 사인법칙을 적용해 보면 $\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{O_2Q}}{\sin\theta}$가 된다. ② $\overline{O_1O_2} = 2$, $\overline{O_2Q} = 1$이므로, $\sin\alpha = 2\sin\theta$이 된다. ③ 그리고 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{O_2P_2}\times\overline{O_2Q}\times\sin\angle P_2O_2Q = \frac{1}{2}\sin(\pi-2\alpha) = \frac{1}{2}\sin2\alpha$이다. ④ 한편, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 $\sin\alpha = 2\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$이고 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$이다. ⑤ 따라서 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\frac{1}{2}\sin2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{5}$이다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ⑤단계까지의 과정 중 계산 실수가 한 개만 있는 경우 3등급: ③단계까지만 맞은 경우 4등급: ②단계까지만 맞은 경우 5등급: ①단계를 시도한 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	
<문제 3> (2) ① 직각삼각형 O_1O_2M에서 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이고,	8점

② $\overline{O_1M} = \overline{O_1O_2}\cos\theta = 2\cos\theta$ 이다.

③ 그리고 $\overline{P_2M} = \sqrt{\overline{O_2P_2}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이다.

④ 따라서 $\ell(\theta) = \overline{P_1P_2} = \overline{O_1M} - \overline{P_2M} - \overline{O_1P_1} = 2\cos\theta - \sqrt{1-4\sin^2\theta} - 1$ 이다.

⑤ $\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{2\cos\theta - 1 - \sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}$

$= \dfrac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \dfrac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \dfrac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \dfrac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$

이 되고,

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} = \lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)} = \lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)} = -1$ 이

므로 $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2} = -1+2 = 1$이 된다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 맞았으나 ⑤단계에서 계산 실수가 있는 경우
3등급: ④단계까지 맞은 경우
4등급: ③단계까지 맞은 경우
5등급: ①단계만 맞은 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

[다른 풀이]

① 삼각형 $O_1O_2P_2$에서 사인법칙을 이용하면 $\dfrac{\overline{O_1P_2}}{\sin\angle O_1O_2P_2} = \dfrac{\overline{O_2P_2}}{\sin\theta}$가 성립한다.

② 이때, $\angle O_1QO_2 = \angle O_2P_2Q = \alpha$라 하면, $\angle O_1O_2P_2 = \alpha - \theta$이고 $\overline{O_2P_2} = 1$이므로 $\overline{O_1P_2} = \dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}$이다.

③ 따라서 선분 P_1P_2의 길이는 $\ell(\theta) = \dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta} - 1 = \dfrac{\sin(\alpha-\theta) - \sin\theta}{\sin\theta}$이다.

④ $\sin(\alpha-\theta) = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta$이며, $\sin\alpha = 2\sin\theta$이고

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$이다. 따라서

$\ell(\theta) = 2\cos\theta - 1 - \sqrt{1-4\sin^2\theta}$이다.

⑤ $\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{2\cos\theta - 1 - \sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}$

$= \dfrac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \dfrac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \dfrac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \dfrac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$

이 되고,

⑥ $\lim_{\theta \to 0+} \frac{2(\cos\theta - 1)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{2(\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)}{\theta^2(\cos\theta + 1)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta + 1)} = -1$ 이므로 $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\ell(\theta)}{\theta^2} = -1 + 2 = 1$이 된다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ⑤단계까지 맞았으나 ⑥단계에서 계산 실수가 있는 경우 3등급: ⑤단계까지 맞은 경우 4등급: ④단계까지 맞은 경우 5등급: ①단계만 맞은 경우 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 7등급: 백지 답안	
<문제 3> (3) ① 직각삼각형 O_1AN에서 $\overline{AN} = \overline{O_1A}\sin\theta = \sin\theta$ 이므로, 삼각형 O_1AP_1의 넓이는 $f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{O_1P_1} \times \overline{AN} = \frac{1}{2}\sin\theta$ 이다. ② 삼각형 O_1O_2Q의 넓이는 $g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{O_1Q} \times \overline{O_2M}$ 인데, $\overline{O_1Q} = \overline{O_1M} + \overline{MQ} = 2\cos\theta + \sqrt{\overline{O_2Q}^2 - \overline{O_2M}^2} = 2\cos\theta + \sqrt{1 - 4\sin^2\theta}$ 이므로 $g(\theta) = \left(2\cos\theta + \sqrt{1 - 4\sin^2\theta}\right)\sin\theta$ 이다. ③ 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{P_2Q} \times \overline{O_2M} = \overline{MQ} \times \overline{O_2M} = \sqrt{1 - 4\sin^2\theta} \times 2\sin\theta$ 이고, 사각형 $AO_2P_2P_1$의 넓이는 $h(\theta) =$ (삼각형 O_1O_2Q의 넓이) − (삼각형 P_2O_2Q의 넓이) − (삼각형 O_1AP_1의 넓이) 이므로 $h(\theta) = g(\theta) - \sqrt{1 - 4\sin^2\theta} \times 2\sin\theta - f(\theta)$ 이다. ④ 따라서 $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) + g(\theta) + h(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{2g(\theta) - 2\sin\theta\sqrt{1 - 4\sin^2\theta}}{\theta}$ $= \lim_{\theta \to 0+} \frac{4\sin\theta\cos\theta}{\theta}$ ⑤ $= \lim_{\theta \to 0+}\left(4 \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \cos\theta\right) = 4 \times 1 \times 1 = 4$ 이다. [채점 기준] 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급: ⑤단계까지의 과정 중 계산 실수가 한 개만 있는 경우 3등급: ③단계까지만 맞은 경우 4등급: ②단계까지만 맞은 경우 5등급: ①단계를 시도한 경우	10점

6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

[다른 풀이]

① 삼각형 O_1AP_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{O_1A}\times\overline{O_1P_1}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$이므로,

$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$이다.

② 삼각형 O_1O_2Q의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_2Q}\times\sin\angle QO_2O_1=\sin(\pi-\alpha-\theta)$이고,

$\sin(\pi-\alpha-\theta)=\sin(\alpha+\theta)=\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta$
$=\sin2\theta+\cos\alpha\sin\theta$

이므로 $g(\theta)=\sin2\theta+\cos\alpha\sin\theta$가 된다.

③ 삼각형 P_2O_2Q의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{O_2Q}\times\overline{O_2P_2}\times\sin\angle P_2O_2Q=\frac{1}{2}\sin(\pi-2\alpha)=\frac{1}{2}\sin2\alpha$이고,

(사각형 $AO_2P_2P_1$의 넓이) = (삼각형 O_1O_2Q의 넓이) − (삼각형 P_2O_2Q의 넓이) − (삼각형 O_1AP_1의 넓이)로부터 $h(\theta)=g(\theta)-\frac{1}{2}\sin2\alpha-f(\theta)$ 임을 알 수 있다.

④ $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos\alpha\sin\theta$ 임을 이용하면

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2g(\theta)-\frac{1}{2}\sin2\alpha}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin2\theta}{\theta}=4$$
이 된다.

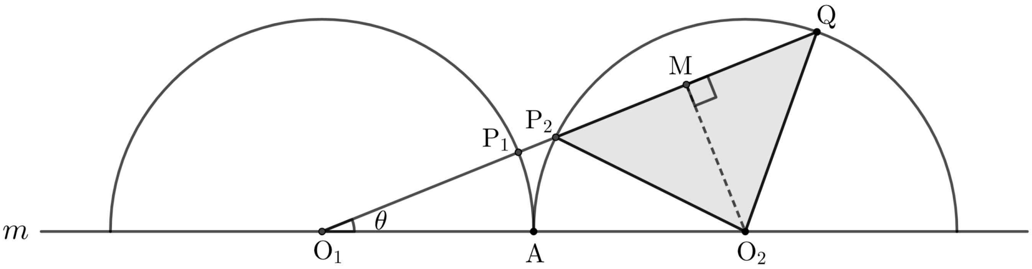
[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ③단계까지는 맞았으나 ④단계에서 실수가 있는 경우
3등급: ③단계까지 시도하였으나 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$ 중 적어도 한 개가 잘못되어 ④단계에서 잘못된 답을 구한 경우
4등급: ②단계까지 맞은 경우
5등급: ①단계만 맞은 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

(1) 선분 P_2Q의 중점을 M이라 할 때, 이등변삼각형 P_2O_2Q에서 중선 O_2M의 길이는 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이다.



그러므로 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이면 $\overline{O_2M} = 2\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 $\overline{MQ} = \sqrt{\overline{O_2Q}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로,

삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{MQ}\times\overline{O_2M} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$이다.

(2) 직각삼각형 O_1O_2M에서 $\overline{O_2M} = \overline{O_1O_2}\sin\theta = 2\sin\theta$ 이고, $\overline{O_1M} = \overline{O_1O_2}\cos\theta = 2\cos\theta$ 이다.

그리고 $\overline{P_2M} = \sqrt{\overline{O_2P_2}^2 - \overline{O_2M}^2} = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이다.

따라서 $\ell(\theta) = \overline{P_1P_2} = \overline{O_1M} - \overline{P_2M} - \overline{O_1P_1} = 2\cos\theta - \sqrt{1-4\sin^2\theta} - 1$ 이다.

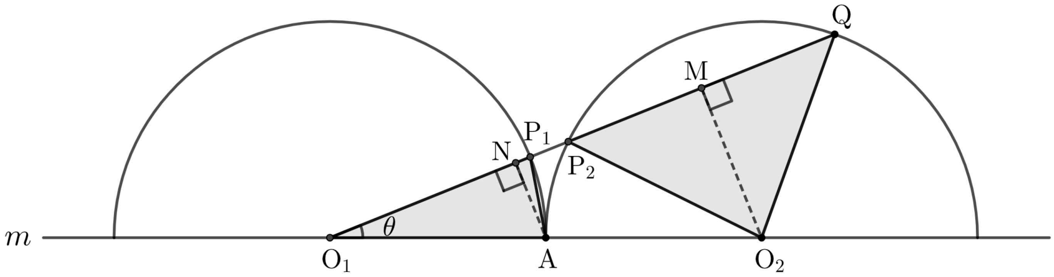
$\dfrac{\ell(\theta)}{\theta^2}$을 정리해보면

$$\frac{2\cos\theta - 1 - \sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} + \frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$

이 되고, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{2(\cos\theta-1)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{2(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{-2\sin^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)} = -1$이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\ell(\theta)}{\theta^2} = -1+2 = 1$이 된다.

(3) 점 A에서 선분 O_1Q에 내린 수선의 발을 N이라 할 때, 직각삼각형 O_1AN에서 $\overline{AN} = \overline{O_1A}\sin\theta = \sin\theta$ 이므로,



삼각형 O_1AP_1의 넓이는 $f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{O_1P_1}\times\overline{AN}=\frac{1}{2}\sin\theta$ 이다.

삼각형 O_1O_2Q의 넓이는 $g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{O_1Q}\times\overline{O_2M}$ 인데,

$\overline{O_1Q}=\overline{O_1M}+\overline{MQ}=2\cos\theta+\sqrt{\overline{O_2Q}^2-\overline{O_2M}^2}=2\cos\theta+\sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이므로

$g(\theta)=\left(2\cos\theta+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)\sin\theta$ 이다.

삼각형 P_2O_2Q의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{P_2Q}\times\overline{O_2M}=\overline{MQ}\times\overline{O_2M}=\sqrt{1-4\sin^2\theta}\times2\sin\theta$ 이고,

사각형 $AO_2P_2P_1$의 넓이는

$h(\theta)=$ (삼각형 O_1O_2Q의 넓이) $-$ (삼각형 P_2O_2Q의 넓이) $-$ (삼각형 O_1AP_1의 넓이)

이므로 $h(\theta)=g(\theta)-\sqrt{1-4\sin^2\theta}\times2\sin\theta-f(\theta)$ 이다.

따라서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)+h(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2g(\theta)-2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin\theta\cos\theta}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\left(4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\right)=4\times1\times1=4$ 이다.

[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2023학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 계열 (수학) / <문제 4>	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	경우의 수, 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열, 조합, 중복순열
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 4> 수정이가 인터넷 사이트에 가입하기 위해서 아이디를 만들고 비밀번호를 정하고 있다. 이 사이트는 비밀번호의 각 자리에 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중 하나의 숫자를 사용하도록 한다고 하자. 다음 질문에 답하시오. [총 25점]

(1) 같은 숫자가 세 번 이상 들어있는 다섯 자리 비밀번호(예를 들어 00111, 50559 등)의 가짓수를 구하시오. [7점]

(2) 같은 숫자가 세 번 이상 연속하여 나타나는 다섯 자리 비밀번호(예를 들어 01111, 12223 등)의 가짓수를 구하시오. [10점]

(3) 이 사이트의 보안정책은 사용자가 다섯 자리 비밀번호를 사용하도록 하지만, 사용자가 선택한 비밀번호에 같은 숫자가 세 번 이상 연속하여 나타나면 뒤쪽에 두 자리를 추가하여 일곱 자리의 비밀번호를 사용하도록 강제한다. 이러한 보안정책에 따라 수정이가 선택할 수 있는 모든 비밀번호의 가짓수를 구하시오. [8점]

3. 제시문 요약

다섯 자리의 비밀번호를 정할 때, 같은 숫자가 세 번 이상 들어있는 경우의 수와 세 번 이상 연속해서 나타나는 경우의 수를 구하고, 비밀번호를 정하기 위한 규칙이 다섯 자리의 비밀번호를 사용하도록 하지만 선택한 비밀번호에서 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 있으면 뒤쪽에 두 자리를 추가하는 비밀번호를 사용하도록 강제할 때 가능한 모든 비밀번호의 가짓수를 구한다.

4. 출제의도

하나의 조건에서 다른 조건을 추가함에 따라 각각 해당 조건들을 만족하는 경우의 수를 계산하는 능력이 있는지 평가한다. 이러한 조건들을 조합하여 하나의 정책으로 적용했을 때, 수학적 의미를 이해하여 해당하는 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

<문제 4> (1)

적용 교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 - 1 경우의 수 [수학] - (5) 확률과 통계 - 2 순열과 조합 [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합
성취기준 / 영역별 내용	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

<문제 4> (2)

적용 교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 - 1 경우의 수 [수학] - (5) 확률과 통계 - 2 순열과 조합 [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합
성취기준 / 영역별 내용	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

<문제 4> (3)

적용 교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 - 1 경우의 수 [수학] - (5) 확률과 통계 - 2 순열과 조합 [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합
성취기준 / 영역별 내용	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학	이준열 외 9인	천재교육	2018	263-280	교과서	재구성
확률과 통계	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	11-25	교과서	재구성

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

(1) 다섯 자리 비밀번호를 만들 때 세 번 이상 들어있는 숫자는 하나만 선택할 수 있다. 임의의 숫자 a가 n번만 들어있는 경우의 수는 다섯 개의 자리에서 n개를 골라 a를 쓰고, 나머지 $5-n$개의 자리에 숫자 a가 아닌 숫자를 각각 선택하는 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_n \times 9^{5-n}$ 이다.

숫자 a가 세 번만 들어있는 경우는 ${}_5\mathrm{C}_3 \times 9^2 = 10 \times 81 = 810$가지, 숫자 a가 네 번만 들어있는 경우는 ${}_5\mathrm{C}_4 \times 9 = 5 \times 9 = 45$가지, 숫자 a가 다섯 번 들어있는 경우는 1가지이다. 숫자 a를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 들어있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $10 \times (810+45+1) = 8560$가지이다.

(2) 다섯 자리의 비밀번호에서 숫자 a가 세 번만 연속하여 나타나는 것은 aaa□□, □aaa□, □□aaa의 꼴로 배열되는 경우이다. 여기에서 a는 세 번만 연속이므로 a의 앞이나 뒤의 □에는 a가 올 수 없다. 따라서 가능한 가짓수는 $(9\times10)+(9\times9)+(10\times9)=261$ 가지이다. 마찬가지로, 숫자 a가 네 번만 연속하여 나타나는 것은 $aaaa$□, $aaaa$□의 꼴로 배열되는 경우이다. 따라서 가능한 가짓수는 $9+9=18$ 가지이다. 숫자 a가 다섯 번 반복되는 경우는 1가지이다. 숫자 a를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 연속하여 나타나는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $10\times(261+18+1) = 2800$가지이다.

(3) 주어진 보안정책에 따라 수정이가 비밀번호를 정할 때 가능한 비밀번호의 길이는 다섯 자리(같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나지 않는 비밀번호)와 일곱 자리(앞 다섯 자리에 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호)이다. 아무 숫자나 사용할 수 있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $10^5 = 100000$이고, 여기에서 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호는 허용되지 않으므로 (2)에서 구한 2800개를 제외하여 가능한 다섯 자리의 비밀번호의 가짓수 $100000-2800=97200$가지를 구할 수 있다. 일곱 자리의 비밀번호는 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 다섯 자리 비밀번호의 뒤쪽에 두 자리가 더해졌으므로 가능한 가짓수는 $2800\times10^2 = 280000$가지로 구할 수 있다. 따라서 모든 가능한 비밀번호의 가짓수는 $97200+280000=377200$가지이다.

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<문제 4> (1) ① 다섯 자리 비밀번호를 만들 때, 세 번 이상 들어있는 숫자는 하나만 선택할 수 있다. ② 임의의 숫자 a가 n번만 들어있는 경우의 수는 다섯 개의 자리에서 n개를 골라 a를 쓰고, 나머지 $5-n$개의 자리에 숫자 a가 아닌 숫자를 각각 선택하는 수이므로 ${}_5C_n \times 9^{5-n}$ 이다.	7점

③ 숫자 a가 세 번만 들어있는 경우는 ${}_5\mathrm{C}_3 \times 9^2 = 10 \times 81 = 810$가지, 숫자 a가 네 번만 들어있는 경우는 ${}_5\mathrm{C}_4 \times 9 = 5 \times 9 = 45$가지, 숫자 a가 다섯 번 들어있는 경우는 1가지이다.

④ 숫자 a를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 들어있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $10 \times (810 + 45 + 1) = 8560$가지이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ④단계까지 서술하였으나 ①~③단계를 맞고 답이 틀린 경우
3등급: ①~② 단계를 옳게 서술하고 ③단계 계산에서 1~2개 맞은 경우
4등급: ①~② 단계를 옳게 서술하고 ③단계 계산을 접근하지 못한 경우
5등급: ①을 옳게 계산한 경우 또는 ②를 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

<문제 4> (2)

① 다섯 자리의 비밀번호에서 숫자 a가 세 번만 연속하여 나타나는 것은 $aaa\square\square$, $\square aaa \square$, $\square\square aaa$의 꼴로 배열되는 경우이다. 여기에서 a는 세 번만 연속이므로 a의 앞이나 뒤의 $\square$에는 a가 올 수 없다. 따라서 가능한 가짓수는 $(9 \times 10) + (9 \times 9) + (10 \times 9) = 261$ 가지이다.

② 마찬가지로, 숫자 a가 네 번만 연속하여 나타나는 것은 $aaaa\square$, $aaaa\square$의 꼴로 배열되는 경우이다. 따라서 가능한 가짓수는 $9 + 9 = 18$가지이다.

③ 숫자 a가 다섯 번 반복되는 경우는 1가지이다.

④ 숫자 a를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 연속하여 나타나는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $10 \times (261 + 18 + 1) = 2800$가지이다.

10점

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ①~④단계의 전개 과정은 맞았으나 계산 실수로 답이 틀린 경우
3등급: ①, ②, ③ 단계에서 세 가지 단계를 옳게 서술한 경우
4등급: ①, ②, ③ 단계에서 두 가지 단계를 옳게 서술한 경우
5등급: ①, ②, ③ 단계에서 한 가지 단계를 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

<문제 4> (3)

8점

① 주어진 보안정책에 따라 가능한 비밀번호의 길이는 다섯 자리와 일곱 자리이다. 다섯 자리의 비밀번호는 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나지 않는 비밀번호이다.
② 일곱 자리의 비밀번호는 앞의 다섯 자리에 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나고 뒤에 두 자리가 추가된 비밀번호이다.
③ 아무 숫자나 사용할 수 있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $10^5 = 100000$이고, 여기에서 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호는 허용되지 않으므로 (2)에서 구한 2800개를 제외하여 허용된 다섯 자리의 비밀번호의 가짓수 $100000 - 2800 = 97200$가지를 구할 수 있다.
④ 일곱 자리의 비밀번호는 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 다섯 자리 비밀번호의 뒤쪽에 두 자리가 더해졌으므로 가능한 가짓수는 $2800 \times 10^2 = 280000$가지로 구할 수 있다.
⑤ 따라서 모든 가능한 비밀번호의 가짓수는 $97200 + 280000 = 377200$가지이다.

[채점 기준]
1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
2등급: ①~④단계의 전개 과정은 맞았으나 계산 실수나 ⑤단계의 오류로 답이 틀린 경우
3등급: ①, ②, ③, ④단계에서 세 가지 단계를 옳게 서술한 경우
4등급: ①, ②, ③, ④단계에서 두 가지 단계를 옳게 서술한 경우
5등급: ①, ②, ③, ④단계에서 한 가지 단계를 옳게 서술한 경우
6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
7등급: 백지 답안

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

(1) 다섯 자리 비밀번호를 만들 때, 세 번 이상 들어있는 숫자는 하나만 선택할 수 있다. 따라서 0이 세 번 이상, 또는 1이 세 번 이상, ..., 또는 9가 세 번 이상으로 10가지 숫자 중 하나를 선택하는 것이 가능하다. 한 숫자가 n번만 들어있는 경우의 수는 하나의 숫자를 선택한 후, 다섯 자리에서 n개를 골라 이 숫자로 채우고, 나머지 $5-n$개의 자리에 앞에서 선택하지 않은 숫자 중 하나를 각각 선택하는 수이므로 $10 \times {}_5\mathrm{C}_n \times 9^{5-n}$ 이다.

한 숫자가 세 번만 들어있는 경우는 $10 \times {}_5\mathrm{C}_3 \times 9^2 = 10 \times 10 \times 81 = 8100$가지, 한 숫자가 네 번만 들어있는 경우는 $10 \times {}_5\mathrm{C}_4 \times 9 = 10 \times 5 \times 9 = 450$가지, 한 숫자가 다섯 번 들어있는 경우는

10가지이다. 따라서 같은 숫자가 세 번 이상 들어있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $8100+450+10=8560$개다.

(2) 다섯 자리의 비밀번호에서 숫자 a가 세 번 이상 연속하여 나타나는 것은 $aaa\square\square$, $\square aaa\square$, $\square\square aaa$의 꼴로 배열되는 경우이다.

① $aaa\square\square$에서 $10\times10=100$가지 경우가 가능하다.

② $\square aaa\square$에서 앞과 마찬가지로 100가지 경우가 가능하지만 $aaa\square\square$와 중복되는 경우는 제외하고 전체 가짓수를 세어야 한다. $aaaa\square$는 $aaa\square\square$와 중복되는 경우를 나타내고 10가지의 경우의 수가 있다. 따라서 $100-10=90$가지의 경우가 추가된다.

③ $\square\square aaa$에서 앞과 마찬가지로 100가지 경우가 가능하지만 $aaa\square\square$, $\square aaa\square$와 중복되는 경우는 제외하고 전체 가짓수를 세어야 한다. $aaaaa$는 $aaa\square\square$와 중복되는 하나의 경우다. $\square aaaa$는 $\square aaa\square$와 중복되는 경우를 나타내고 $10\times10=100$가지의 경우의 수가 있으며 앞의 $aaaaa$의 경우를 포함한다. 따라서 $100-10=90$가지의 경우가 추가된다.

숫자 a를 선택하는 경우의 수는 10가지이므로 임의의 같은 숫자가 세 번 이상 연속하여 나타나는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $10\times(100+90+90)=2800$가지이다.

(3) 주어진 보안정책에 따라 수정이가 비밀번호를 정할 때 가능한 비밀번호의 길이는 다섯 자리(같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나지 않는 비밀번호)와 일곱 자리(앞의 다섯 자리에 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호)이다. 아무 숫자나 사용할 수 있는 모든 다섯 자리 비밀번호의 가짓수는 $10^5=100000$이고, 여기에서 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 비밀번호는 허용되지 않으므로 (2)에서 구한 2800개를 제외하여 허용된 다섯 자리의 비밀번호의 가짓수 $100000-2800=97200$가지를 구할 수 있다. 일곱 자리의 비밀번호는 같은 숫자가 세 번 이상 연속해서 나타나는 다섯 자리 비밀번호의 뒤쪽에 두 자리가 더해졌으므로 가능한 가짓수는 $2800\times10^2=280000$가지로 구할 수 있다. 따라서 모든 가능한 비밀번호의 가짓수는 $97200+280000=377200$가지이다.