7. 대학별고사 논술전형 문항(문항카드)

1) 자연계열 I

[서울시립대학교 문항정보1]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I (공과대학) 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	중복조합, 조건부 확률
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (총 85점)

시립이는 아래와 같은 규칙으로 주사위를 반복해 던져서 나오는 눈의 수만큼 주머니에 공을 넣는 게임을 한다. 게임을 시작할 때 주머니에 있는 공의 개수는 0이다.

> (1) 주머니에 있는 공의 개수가 5 이하이면 시립이는 주사위를 새로 던져서 나오는 눈의 수만큼 공을 넣는다.
> (2) 주머니에 있는 공의 개수가 6 이상이면 시립이는 주사위를 던지는 것을 멈추고 게임을 끝낸다.

(a) 게임이 끝났을 때 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률 $\frac{q}{p}$를 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (45점)

(b) 시립이가 주사위를 4번 던져서 게임이 끝났을 때 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률 $\frac{s}{r}$를 구하여라. (단, r과 s는 서로소인 자연수이다.) (40점)

3. 출제 의도

본 문항은 중복조합과 조건부확률을 이해하고, 구체적인 상황에 적용하는 능력을 평가한다.
구체적으로 (a)는 중복조합을 상황에 맞게 적용하는 능력과 (b)는 조건부확률을 적용하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 I 1번	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - 2 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	홍성복 외 10명	㈜지학사	2019	20-23, 63-66
	확률과 통계	배종숙 외 6명	㈜금성출판사	2019	25-27, 67-68

5. 문항 해설

문제에 중복조합을 적용하여 경우의 수를 구하고 확률을 계산하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
a	주어진 문제에서 중복조합을 적용할 수 있는 경우로 나누고 이를 이용하여 확률을 계산할 수 있다.	45
b	한 사건이 발생했을 때 나머지 한 사건이 발생할 조건부확률을 계산할 수 있다.	40

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

(a) $1 \le k \le 6$에 대하여 주사위를 k번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 6이 되는 경우의 수는 방정식 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 6$에서 $a_1, a_2, \cdots, a_k$가 모두 6 이하의 자연수인 해의 개수와 같다. 이는 방정식 $z_1 + z_2 + \cdots + z_k = 6 - k$에서 $z_1, z_2, \cdots, z_k$가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로 ${}_k\mathrm{H}_{6-k}$이다. 따라서 주사위를 k번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률은

$$\frac{{}_k\mathrm{H}_{6-k}}{6^k} = \frac{{}_5\mathrm{C}_{6-k}}{6^k} = \frac{{}_5\mathrm{C}_{k-1}}{6^k}$$

이다. 그러므로 게임이 끝났을 때 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률은

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{{}_5\mathrm{C}_{k-1}}{6^k} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \frac{{}_5\mathrm{C}_k}{6^k} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6}\right)^5 = \frac{7^5}{6^6}$$

이다.

(b) 게임이 끝났을 때 주머니에 있는 공의 개수가 6인 사건을 A라 하고 주사위를 4번 던져서 게임이 끝나는 사건을 B라 하자. (a)와 마찬가지로 $3 \le n \le 5$에 대하여 주사위를 3번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 n이 되는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$이다. 따라서 주사위를 3번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 n이 될 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{H}_{n-3}}{6^3} = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}}{6^3} = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2}{6^3}$$

이다. 주사위를 3번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 n $(3 \le n \le 5)$일 때, 다음 주사위를 던져 나오는 눈의 수가 $6-n$ 이상이면 게임이 끝나고 주사위를 던진 횟수가 4가 된다. 따라서 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(B) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{6^3} \times \frac{4}{6} + \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{6^3} \times \frac{5}{6} + \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{6^3} \times \frac{6}{6} = \frac{55}{6^4}$$

이다. $\mathrm{P}(A \cap B)$는 주사위를 4번 던져서 주머니에 있는 공의 개수가 6일 확률이므로 $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{{}_4\mathrm{H}_2}{6^4} = \frac{10}{6^4}$ 이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{2}{11}$$

이다.

[서울시립대학교 문항정보2]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅰ(공과대학) 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	적분법
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (95점)

함수 $f(x) = -x^3 - x + 3$의 역함수 $g(x)$에 대하여 연속함수 $h(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (1) $h(x) = \begin{cases} 3x & (0 \le x < 1) \\ 4g'(x) + 4 & (1 \le x < 3) \end{cases}$
> (2) 모든 실수 x에 대하여 $h(x+3) = h(x)$이다.

정적분 $\int_0^6 xh(x)\,dx$의 값을 구하여라.

3. 출제 의도

적분 구간을 적절하게 나누고 역함수의 성질과 여러 가지 적분법을 활용하여 주어진 함수의 정적분을 계산하는 능력을 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열Ⅰ 2번	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오남 외 14명	교학사	2019	149-161
	미적분	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2019	132-144

5. 문항 해설

역함수를 이용해서 정의된 함수를 이해하고 적분 구간을 적절히 나누어 여러 가지 적분법을 활용하여 정적분을 계산하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 함수의 성질을 이용해서 적분 구간을 적절히 나누어 정적분을 간단하게 정리한다.	30
	역함수의 성질과 여러 가지 적분법을 활용하여 정적분을 정확하게 계산할 수 있다.	65

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

주어진 정적분을 조건 (2)를 이용해서 정리하면

$$\int_0^6 xh(x)dx = \int_0^3 xh(x)dx + \int_3^6 xh(x)dx = \int_0^3 xh(x)dx + \int_0^3 (x+3)h(x)dx$$

$$= 2\int_0^3 xh(x)dx + 3\int_0^3 h(x)dx$$

이다.

$f(1)=1$이므로 $g(1)=1$이고 $f(0)=3$이므로 $g(3)=0$이다. 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로

$$\int_1^3 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - 1 = \frac{5}{4}$$

이고

$$\int_1^3 xg'(x)dx = [xg(x)]_1^3 - \int_1^3 g(x)dx = -\frac{9}{4}$$

이다. 따라서

$$\int_0^3 xh(x)dx = \int_0^1 3x^2dx + \int_1^3 x\{4g'(x)+4\}dx = 8$$

이고

$$\int_0^3 h(x)dx = \int_0^1 3xdx + \int_1^3 \{4g'(x)+4\}dx = \frac{3}{2} + 4\{g(3)-g(1)\} + 8 = \frac{11}{2}$$

이다. 구하는 정적분의 값은

$$\int_0^6 xh(x)dx = 2\cdot 8 + 3\cdot\frac{11}{2} = \frac{65}{2}$$

이다.

[서울시립대학교 문항정보3]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I (공과대학) 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	수열
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] (105점)

다음을 만족시키는 서로 다른 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

$$\log_2(a+4b)+2\log_2 c-\log_2 3=100$$

3. 출제 의도

주어진 조건을 로그의 성질을 이용해서 간단히 정리하고 등비수열의 합을 이용해서 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 계산하는 능력을 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열 I 3번	[수학] - (1) 지수함수와 로그함수 - 1 지수와 로그 [12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학] - (3) 수열 - 1 등차수열과 등비수열 [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제항까지의 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외 10명	지학사	2018	26-32, 125-130
	수학	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	29-35, 133-138

5. 문항 해설

주어진 조건을 로그의 성질을 이용해서 간단히 정리하고 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 등비수열의 합을 이용해서 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
	로그의 성질을 이용해서 주어진 조건을 간단히 정리한다.	30
	조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 등비수열의 합을 이용해서 정확히 계산한다.	75

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

조건에서 주어진 식을 정리하면

$$(a+4b)c^2 = 3 \cdot 2^{100} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. 따라서 $c = 2^r(r = 0, 1, \cdots, 49)$이다. $r = 0, 1, \cdots, 49$에 대해

$$a = 4 \cdot (3 \cdot 2^{98-2r} - b)$$

이므로 ①을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $3 \cdot 2^{98-2r} - 1$이다. 따라서 ①을 만족시키는 자연수의 모든 순서쌍의 개수는

$$\sum_{r=0}^{49}(3 \cdot 2^{98-2r} - 1) = 2^{100} - 51$$

이다.
a, b, c는 서로 다른 세 자연수이므로 아래 (i), (ii), (iii), (iv)를 생각해야 한다.

(i) $a = b$인 경우
$a + 4b = 5a$이므로 ①의 좌변은 5의 배수이지만 우변은 5의 배수가 아니다. 따라서 ①을 만족시키는 자연수의 순서쌍은 없다.
(ii) $a = c$인 경우
$(a+4b)a^2 = 3 \cdot 2^{100}$이므로 $a^3 < 3 \cdot 2^{100}$이고 $a = 2^r(r = 0, 1, \cdots, 33)$이다. 이때 $b = 3 \cdot 2^{98-2r} - 2^{r-2}$이고 b는 자연수이므로 $r = 2, 3, \cdots, 33$이다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 32이다.
(iii) $b = c$인 경우
$(a+4b)b^2 = 3 \cdot 2^{100}$이므로 $4b^3 < 3 \cdot 2^{100}$이고 $b = 2^r(r = 0, 1, \cdots, 33)$이다. 이때 $a = 3 \cdot 2^{100-2r} - 2^{r+2}$이고 a는 자연수이므로 $r = 0, 1, 2, \cdots, 33$이다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 34이다.
(iv) $a = b = c$인 경우
(i)에 의해서 ①을 만족시키는 자연수의 순서쌍은 없다.
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$2^{100} - 51 - 32 - 34 = 2^{100} - 117$$

이다.

[서울시립대학교 문항정보4]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅰ(공과대학) 4번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하, 수학Ⅰ
	핵심개념 및 용어	타원, 쌍곡선, 초점
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 4] (총 115점)

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-5,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 C_1과 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 C_2가 있다. 두 곡선 C_1, C_2의 제1사분면 위의 교점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}} = 20$일 때, 다음에 답하여라.

(a) $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}}$의 값의 범위를 구하여라. (75점)

(b) $\angle \mathrm{FPF'} = \dfrac{\pi}{3}$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}}$의 값을 구하여라. (40점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 타원 위의 점과 두 초점 사이의 거리 관계, 쌍곡선 위의 점과 두 초점 사이의 거리 관계를 잘 이해하고 있는지를 평가하는 문항이다.
(a) 타원과 쌍곡선 위의 점과 두 초점 사이의 거리의 비를 하나의 문자로 표현하고 함수의 미분을 이용하여 범위를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
(b) 코사인법칙을 활용하여 방정식을 만들고 해를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열Ⅰ4번 a	[기하] - (1) 이차곡선 - 이차곡선 [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
자연계열Ⅰ4번 b	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	이준열 외	천재교육	2019	18-22, 26-30
	기하	홍성복 외	지학사	2019	16-20, 22-27
	수학I	박교식 외	동아출판	2018	86-90
	수학I	홍성복 외	지학사	2018	95-100

5. 문항 해설

이차곡선인 타원과 쌍곡선의 정의를 이용하여 두 이차곡선의 교점과 두 초점 사이의 거리의 비를 1개의 문자로 표현하여 그 범위를 구하는 문항이다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
a	타원 위의 점과 초점 사이의 거리, 쌍곡선 위의 점과 초점 사이의 거리 관계를 이용하여 거리의 비의 범위를 구한다.	75
b	코사인법칙을 활용하여 방정식을 만들어 해를 구한다.	40

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

(a) 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_1의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>5$, $b^2=a^2-25$), 쌍곡선 C_2의 방정식을 $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1$ (단, $5>c>0$, $d^2=25-c^2$)이라 하자.

타원과 쌍곡선의 정의로부터 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=2a$이고 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2c$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=a-c$이고 $\overline{\mathrm{PF'}}=a+c$이다. $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=20$이므로 $a^2=c^2+20$이다. 또한, 타원 C_1에서 $a>5$이고 쌍곡선 C_2에서 $0<c<5$이므로 $\sqrt{5}<c<5$이다.

$a^2=c^2+20$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}}=\frac{\overline{\mathrm{PF}}^2}{\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}}=\frac{(a-c)^2}{20}=\frac{(\sqrt{c^2+20}-c)^2}{20}$$

이다. $f(t)=\sqrt{t^2+20}-t$라 하면 $f(t)>0$이고 $f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+20}}-1<0$이다. 따라서 $\frac{\{f(t)\}^2}{20}$은 감소함수이다.

$\sqrt{5}<c<5$일 때 $\frac{\{f(5)\}^2}{20}<\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}}<\frac{\{f(\sqrt{5})\}^2}{20}$이므로 $\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}}$의 범위는

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{2} < \frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

이다.

(b) $\overline{\mathrm{FF'}} = 10$이므로 코사인법칙에 의하여

$$100 = \overline{\mathrm{PF}}^2 + \overline{\mathrm{PF'}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}} \times \cos\frac{\pi}{3} = \overline{\mathrm{PF}}^2 + \overline{\mathrm{PF'}}^2 - 20 = (a-c)^2 + (a+c)^2 - 20$$

이다. 위 식을 정리하면 $a^2 + c^2 = 60$이다. $a^2 = c^2 + 20$이므로 $a^2 = 40$, $c^2 = 20$이다. 따라서

$$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{10}+2\sqrt{5}} = 3-2\sqrt{2}$$

이다.

(b) $\overline{\mathrm{FF'}} = 10$이므로 코사인법칙에 의하여

$$100 = \overline{\mathrm{PF}}^2 + \overline{\mathrm{PF'}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}} \times \cos\frac{\pi}{3} = \overline{\mathrm{PF}}^2 + \overline{\mathrm{PF'}}^2 - 20 = (a-c)^2 + (a+c)^2 - 20$$

이다. 위 식을 정리하면 $a^2 + c^2 = 60$이다. $a^2 = c^2 + 20$이므로 $a^2 = 40$, $c^2 = 20$이다. 따라서

$$\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{10}+2\sqrt{5}} = 3-2\sqrt{2}$$

이다.

2) 자연계열Ⅱ

[서울시립대학교 문항정보5]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅱ(자연과학대학, 도시과학대학 자연계열) 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	미분계수, 도함수
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (85점)

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이면서 다음을 만족시키는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 개수가 2가 되도록 하는 실수 a, b의 조건을 구하여라.

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(p,q)$에서의 접선을 l_1이라 하고, 점 P를 지나고 직선 l_1에 수직인 직선을 l_2라 하자. 직선 l_2와 y축의 교점을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=2|p|>0$이다.

3. 출제 의도

본 문항은 다항함수의 접선을 구하고 이를 활용하는 능력과 방정식의 실근의 개수를 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열Ⅱ 1번	[수학Ⅱ] - (2)미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2018	80-82 100-102
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	67-70 92-96

5. 문항 해설

본 문항은 삼차함수의 그래프의 주어진 점을 지나며 이 점에서의 접선에 수직인 직선에 관한 주어진 조건을 확인할 수 있는지를 평가한다. 또한, 접선의 기울기가 0이 되지 않도록 삼차식의 계수에 관한 조건을 찾을 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
	삼차함수의 그래프의 주어진 점에서의 접선의 기울기가 0이 되지 않도록 하는 삼차식의 계수에 관한 조건을 찾는다.	20
	삼차함수의 그래프의 주어진 점을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선을 찾은 후 문제에서 주어진 조건을 만족하는지를 확인한다.	65

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

$f'(x)=3x^2+2ax+b$가 모든 x에 대해 0이 아니므로, 모든 x에 대해 $f'(x)>0$이다. 따라서, $a^2-3b<0$이다. 또한, 직선 l_2는 $y=-\dfrac{1}{3p^2+2ap+b}(x-p)+q$이며, 점 Q는 $\left(0, \dfrac{p}{3p^2+2ap+b}+q\right)$이다. 문제의 조건에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2|p|$를 만족시켜야 하므로

$$\sqrt{p^2+\frac{p^2}{(3p^2+2ap+b)^2}}=2|p|$$

가 성립한다. 조건에서 $p\neq 0$이므로 위 식을 정리하면 $3p^2+2ap+b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다. 또한 $f'(p)=3p^2+2ap+b>0$이므로 $3p^2+2ap+b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다. 이 이차방정식의 해가 서로 다른 두 실근일 조건은 $a^2-3b>-\sqrt{3}$이다.

한편, $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이면 이차방정식 $3p^2+2ap+b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$의 한 근이 $p=0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 점 P는 하나만 존재한다. 따라서 구하는 조건은

$$-\sqrt{3}<a^2-3b<0,\ b\neq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이다.

[서울시립대학교 문항정보6]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅱ(자연과학대학, 도시과학대학 자연계열) 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	삼각함수
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (95점)

세 점 $\mathrm{P, Q, R}$은 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 세 변 위를 시계 반대 방향으로 움직인다. 세 점 $\mathrm{P, Q, R}$은 시각 $t=0$일 때 한 꼭짓점에서 동시에 출발하며 순서대로 $1, \sqrt{2}, 2$의 일정한 속력으로 움직인다. 시각 $t=\sqrt{2}$에서 시각 $t=2$까지 세 점 $\mathrm{P, Q, R}$이 움직일 때, 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되는 시각과 최소가 되는 시각을 각각 구하여라.

3. 출제 의도

본 문항은 사인을 이용하여 삼각형의 면적을 구하고 이차함수의 최대, 최소를 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열Ⅱ 2번	수학 - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학 02-03]사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	97-104
	수학	황선욱 외 8명	미래엔	2018	97-101

5. 문항 해설

이차함수에 대한 기본적인 이해와 사인을 이용한 삼각형의 면적공식을 사용하여 면적이 최댓값과 최솟값을 갖는 때를 구하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
	문제의 조건에서 경우를 두 개로 나누고 각 경우에 사인법칙을 사용하여 면적을 함수로 표현한다.	60
	이차함수의 성질을 사용하여 주어진 범위에서 최댓값과 최솟값을 구한다.	35

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

$\sqrt{2} \le t \le 2$에 대하여 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하자. $t=\frac{3}{2}$일 때 점 R이 삼각형의 한 꼭짓점에 있으므로 $\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$와 $\frac{3}{2} \le t \le 2$로 나누어 $S(t)$를 구한다.

(i) $\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$인 경우

$\sqrt{2} \le t \le \frac{3}{2}$인 경우 세 점 P, Q, R은 아래의 그림처럼 위치하게 된다. 따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}(2t-\sqrt{2}t)(2-t)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{4}(-t^2+2t)$$

이다. 따라서 주어진 구간에서 $S(t)$는 감소한다.

(ii) $\frac{3}{2} \le t \le 2$인 경우

$\frac{3}{2} \le t \le 2$인 경우 세 점 P, Q, R이 아래의 그림처럼 위치하고, 삼각형 PQR의 넓이는

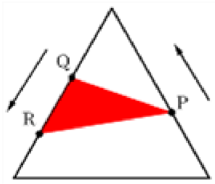
$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(2t-3)(3-\sqrt{2}t)\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(4-2t)(t-1)\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}t-2)(2-t)\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\{(2+3\sqrt{2})t^2-(14+5\sqrt{2})t+18\} \end{aligned}$$

이다. 이차함수 $f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(2+3\sqrt{2})t^2-(14+5\sqrt{2})t+18\}$는 $t=t_0=\frac{14+5\sqrt{2}}{2(2+3\sqrt{2})}=\frac{1+16\sqrt{2}}{14}$일 때 최솟값을 가진다. $\frac{3}{2}<t_0<2$이므로 $S(t)$는 $\frac{3}{2} \le t \le t_0$에서 감소하고 $t_0 \le t \le 2$에서 증가한다.

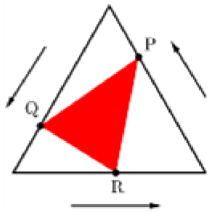
(i)과 (ii)에 의하여 $S(t)$는 $\sqrt{2} \le t \le 2$에서 $t=t_0$일 때 최솟값을 갖고 $t=\sqrt{2}$ 또는 2일 때 최댓값을 갖는다.

$$S(2)-S(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2}-1)-\frac{\sqrt{3}}{2}(3\sqrt{2}-4)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-2\sqrt{2})>0$$

이므로 $S(t)$가 최대가 되는 시각은 2이고 최소가 되는 시각은 $\frac{1+16\sqrt{2}}{14}$이다.



(i) $\sqrt{2} \leq t \leq \dfrac{3}{2}$



(ii) $\dfrac{3}{2} \leq t \leq 2$

[서울시립대학교 문항정보7]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2023학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅱ(자연과학대학, 도시과학대학 자연계열) 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	합의 법칙, 조합
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] (105점)

다음 그림과 같이 12개의 칸에 번호를 붙인 보관함을 흰 구슬 5개와 검은 구슬 7개로 빈칸 없이 채우려고 한다.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

보관함의 적어도 한 개의 가로줄 또는 세로줄을 같은 색의 구슬로 채우는 경우의 수를 구하여라. (단, 보관함의 한 칸에는 구슬 한 개만 넣을 수 있다.)

3. 출제 의도

본 문항은 합의 법칙을 적용하여 경우의 수를 체계적으로 구하는 능력과 실생활의 문제에서 조합을 적용하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열Ⅱ 3번	[수학] - (5)확률과통계 - ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [수학] - (5)확률과통계 - ②순열과조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판	2018	255-258, 264-270
	수학	권오남 외	교학사	2018	255-259, 268-271

5. 문항 해설

적어도 하나의 가로줄 또는 세로줄을 같은 색의 구슬로 채우는 경우의 수를 찾을 때, 합의 법칙을 적용하여 체계적으로 경우의 수를 구하는 능력과 조합을 적용하여 경우의 수를 구하는 능력을 확인한다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 문제를 조합을 적용하여 문제를 해결할 수 있도록 체계적으로 경우를 나눈다.	30
	각각의 경우에 조합을 적용하여 경우의 수를 구한다.	60
	합의 법칙을 적용하여 구하는 경우의 수를 얻는다.	15

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

흰 구슬로 채워진 한 개의 가로줄이 있으면 나머지 9개의 칸에 7개의 검은 구슬을 넣어야 하므로 검은 구슬로 채워진 가로줄이 적어도 하나 존재한다. 흰 구슬로 채워진 한 개의 세로줄이 있으면 나머지 8개의 칸에 7개의 검은 구슬을 넣어야 하므로 검은 구슬로 채워진 세로줄이 적어도 하나 존재한다. 따라서 검은 구슬로 가로줄 또는 세로줄을 채우는 경우의 수만 생각해도 된다. 검은 구슬은 7개이므로 가로줄은 최대 2개, 세로줄은 최대 1개 채울 수 있다.

(i) 검은 구슬로 가로줄 중 한 개만 채우는 경우
4개의 가로줄 중 검은 구슬로 채워질 한 개의 가로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_4C_1$이다. 나머지 9개의 칸에 남은 4개의 검은 구슬을 넣는 경우의 수는 ${}_9C_4$이다. 여기서 나머지 9개의 칸에 검은 구슬로 한 개의 가로줄을 채우는 경우를 제외해야 하므로 ${}_3C_1 \times {}_6C_1$을 빼야 한다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times ({}_9C_4 - {}_3C_1 \times {}_6C_1) = 432$이다.

(ii) 검은 구슬로 가로줄 중 두 개를 채우는 경우
4개의 가로줄 중 검은 구슬로 채워질 두 개의 가로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_4C_2$이다. 나머지 6개의 칸에 남은 1개의 검은 구슬을 넣는 방법의 수는 ${}_6C_1$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_6C_1 = 36$이다.

(iii) 검은 구슬로 세로줄 중 한 개를 채우는 경우
3개의 세로줄 중 검은 구슬로 채워질 하나의 세로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_{3}C_{1}$이고 나머지 8개의 칸에 남은 3개의 검은 구슬을 채우는 방법의 수는 ${}_{8}C_{3}$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_{3}C_{1}\times{}_{8}C_{3}=168$이다.

(iv) 검은 구슬로 한 개의 가로줄과 한 개의 세로줄을 채우는 경우
3개의 세로줄 중 검은 구슬로 채워질 한 개의 세로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_{3}C_{1}$이고, 4개의 가로줄 중 검은 구슬로 채워질 한 개의 가로줄을 선택하는 경우의 수가 ${}_{4}C_{1}$이다. 나머지 6개의 칸에 남은 1개의 검은 구슬을 넣는 방법의 수는 ${}_{6}C_{1}$이므로 구하는 경우의 수는 ${}_{3}C_{1}\times{}_{4}C_{1}\times{}_{6}C_{1}=72$이다.

(iv)는 (i)과 (iii)에 중복으로 포함되므로 구하는 경우의 수는 $432+36+168-72=564$이다.

[서울시립대학교 문항정보8]

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명		2023학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열Ⅱ(자연과학대학, 도시과학대학 자연계열) 4번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분의 성질, 여러 가지 적분법
예상 소요 시간		35분

2. 문항 및 제시문

[문제 4] (115점)

모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\} \le \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

3. 출제 의도

본 문항은 도함수와 정적분을 활용해 부등식을 증명하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
자연계열Ⅱ 4번	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - 부정적분 [12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용 [12수학Ⅱ03-02] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분 - 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2018	124, 132
	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2018	127, 137
	미적분	권오남 외	교학사	2019	140
	미적분	박교식 외	동아출판	2019	127

5. 문항 해설

이 문제는 곡선과 직선 사이에 대소관계를 얻은 후, 이를 이용해 정적분의 대소관계를 유도할 수 있는지 확인하는 문제로, 미적분에 대한 성질을 활용하는 능력에 대해 평가한다.

6. 채점 기준 *※ 선다형의 경우 생략 가능*

하위 문항	채점 기준	배점
	두 점 $\left(k, \frac{1}{k}\right)$와 $\left(k+1, \frac{1}{k+1}\right)$을 지나는 직선의 방정식과 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 $\left(k+1, \frac{1}{k+1}\right)$에서의 접선의 방정식을 얻는다.	40
	닫힌구간에서 이차함수의 최대최소를 이용해 접선, 곡선 $y=\frac{1}{x}$, 직선 사이의 대소관계를 유도하고 이를 이용해 정적분의 대소관계를 유도한다.	75

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 *※ 선다형의 경우 정답만 기입*

자연수 k에 대해 닫힌구간 $[k, k+1]$을 생각하자. $y=f(x)$를 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점 $\left(k+1, \frac{1}{k+1}\right)$에서의 접선이라 하고, $y=g(x)$를 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 두 점 $\left(k, \frac{1}{k}\right)$와 $\left(k+1, \frac{1}{k+1}\right)$을 지나는 직선이라 하자. 그러면

$$f(x)=-\frac{1}{(k+1)^2}\{x-(k+1)\}+\frac{1}{k+1} \quad , \quad g(x)=-\frac{1}{k(k+1)}(x-k)+\frac{1}{k}\text{이다.}$$

이때 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 $\frac{1}{x}-f(x)=\frac{(x-k-1)^2}{x(k+1)^2}\geq 0$이고 $g(x)-\frac{1}{x}=-\frac{(x-k)(x-k-1)}{xk(k+1)}\geq 0$이다.

즉, 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 $f(x)\leq \frac{1}{x}\leq g(x)$이므로

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx \leq \int_k^{k+1} g(x)\,dx$$

이다. 이때

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_k^{k+1}\left[-\frac{1}{(k+1)^2}\{x-(k+1)\}+\frac{1}{k+1}\right]dx = \frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}$$

$$\int_k^{k+1} g(x)\,dx = \int_k^{k+1}\left\{-\frac{1}{k(k+1)}(x-k)+\frac{1}{k}\right\}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx = \ln(k+1)-\ln k$$

이므로

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2} \leq \ln(k+1)-\ln k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

이다.

위의 부등식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\} \le \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

이 성립한다.