

## 5. 문항카드 5 - 자연계열 1차 1번

### 5.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열(수학과, 전자공학과, 컴퓨터공학과, 인공지능학과)/1번	
출제범위	교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 중복조합</li> <li>· 이항정리</li> <li>· 확률변수</li> <li>· 확률질량함수</li> <li>· 이항분포</li> <li>· 정규분포</li> <li>· 표준정규분포</li> </ul>
예상소요 시간	40분	/ 100 분

### 5.2 문제 및 제시문(문항)

#### [제시문]

[가] 중복조합의 수

서로 다른  $n$ 개에서  $r$ 개를 택하는 중복조합의 수는  ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

[나] 이항정리

$n$ 이 자연수일 때,  $(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b^1 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n b^n$

[다] 이산확률변수  $X$ 의 확률질량함수  $P(X=x_i)=p_i$  ( $i=1, 2, \cdots, n$ )에 대하여 다음이 성립한다.

①  $0 \leq p_i \leq 1$

②  $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$

[라] 이산확률변수  $X$ 의 확률질량함수가  $P(X=x_i)=p_i$  ( $i=1, 2, \cdots, n$ )일 때,  $X$ 의 기댓값(평균)  $E(X)$ 는

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

[마] 확률변수  $X$ 가 이항분포  $B(n, p)$ 를 따를 때,  $n$ 이 충분히 크면  $X$ 는 근사적으로 정규분포  $N(np, npq)$ 를 따른다.

(단,  $q = 1 - p$ )

#### [문제]

【1-1】 상자 속에 0부터 10까지의 정수 중 하나를 적은 종이가 여러 장 들어있고, 각 숫자가 적힌 종이의 개수는 동일하지 않을 수 있다. 상자에서 임의로 종이 한 장을 한 번 꺼낼 때, 꺼낸 종이에 적힌 숫자를 확률변수  $X$ 라 하자.  $X$ 에 대한 확률질량함수가

$$P(X=i) = \frac{{}_{11-i}H_i \times {}_{11-i}H_i}{{}_dH_{10}} \quad (i=0, 1, 2, \dots, 10) \text{ 일 때, 자연수 } d \text{의 값을 구하시오.}$$

【1-2】 문항 【1-1】의 상자에서 각 숫자가 적힌 종이의 개수를 조정하였다. 이 상자에서 임의로 종이 한 장을 한 번 꺼낼 때, 꺼낸 종이에 적힌 숫자를 확률변수  $Y$ 라 하자.

$Y$ 에 대한 확률질량함수가  $P(Y=i) = \frac{{}_{21}C_{2i+1}}{b} s^{20-2i} (1-s)^{2i+1} \quad (i=0, 1, 2, \dots, 10)$ 일 때,  $b$ 를  $s$ 에 대한 식으로 나타내시오. (단,  $s$ 는  $0 < s < 1$ 을 만족하는 유리수)

【1-3】 숫자 0이 적힌 종이가 50장, 1이 적힌 종이가 50장 들어있는 상자에서 임의로 종이를 한 장 꺼내어 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 10회 반복한다. 10회 시행 후 1이 적힌 종이를 꺼낸 횟수  $i$ 에 대한 상금  $g(i)$ 가 아래의 표와 같다고 할 때, 상금의 기댓값을 구하시오.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(i)$	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025

【1-4】 숫자 0이 적힌 종이가 90장, 1이 적힌 종이가 10장 들어있는 상자에서 임의로 종이를 한 장 꺼내어 숫자를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 100회 반복한다. 100회 시행 후 1이 적힌 종이를 꺼낸 횟수가  $k$ 번 이상이면 상금을 준다고 한다. 상금을 받을 확률이 23% 이상이 되는 자연수  $k$ 의 최댓값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

$z$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$P(0 \leq Z \leq z)$	0.0000	0.0398	0.0793	0.1179	0.1554	0.1915	0.2257	0.2580	0.2881	0.3159	0.3413

### 5.3 출제 의도

고등학교 교육과정에서 다루는 확률과 통계의 기본적인 내용 중 확률의 기본개념, 이항정리, 확률질량함수, 이항분포, 정규분포 등을 제대로 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다. 제시문에는 문제를 풀면서 사용할 수 있는 관련 교과서 내용이 주어졌다. 구체적인 출제기준은 다음과 같다.

- 이항정리와 다항식의 계수 형성 원리를 이해하는지 파악한다.
- 확률의 기본성질을 이해하는지 파악한다.
- 확률변수와 확률질량함수의 뜻을 아는지 파악한다.
- 이산확률변수가 이항분포를 따르는 경우와 이 경우의 확률질량함수를 구하는 역량을 파악한다.
- 이항분포, 정규분포, 표준정규분포의 관계를 이해하는지 파악한다.
- 표준정규분포표를 이용하여 이항분포와 정규분포의 확률을 구하는 역량을 파악한다.

## 5.4 출제 근거

### 5.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ㉠ 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.</li> <li>· [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ㉡ 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</li> <li>· [확률과 통계] - (3) 통계 - ㉠ 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.</li> </ul>
하위문항 【1-1】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ㉡ 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</li> <li>· [확률과 통계] - (3) 통계 - ㉠ 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.</li> </ul>
하위문항 【1-2】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ㉡ 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</li> <li>· [확률과 통계] - (3) 통계 - ㉠ 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.</li> </ul>
하위문항 【1-3】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ㉡ 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</li> <li>· [확률과 통계] - (3) 통계 - ㉠ 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【1-4】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [확률과 통계] - (3) 통계 - ㉠ 확률분포 [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.</li> </ul>

### 5.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2021	21, 30, 82, 88, 105
		이준열 외	천재교육	2022	22, 29, 30, 83, 91, 98, 104, 108
		홍성복 외	지학사	2021	21, 29, 30, 83, 85, 87, 92, 101, 107
		배종숙 외	(주)금성출판사	2021	95
		김원경 외	비상교육	2021	21~25, 75~78, 83~98

## 5.5 문항 해설

### 5.5.1 위원회 자체 평가 의견

제시문 [가], [나], [다], [라], [마]는 모두 고등학교 < 확률과 통계 > 교과서에서 발췌하여 제시하였다. 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 제시문을 이해하는 데 어려움이 없었을 것으로 판단된다. 문항을 해결할 때 사용된 핵심 용어와 기호는 ‘중복조합, 이항정리, 확률변수, 이산확률변수, 확률분포, 기댓값, 이항분포, 정규분포, 표준정규분포’이다. 이는 교육과정에 부합한다.

문항 【1-1】은 제시문 [다]의 ②, 제시문 [가]를 이용하면  $\frac{({}_{10}C_0)^2 + ({}_{10}C_1)^2 + \cdots + ({}_{10}C_{10})^2}{9 + {}_{10}C_{10}} = 1$ , 즉  $({}_{10}C_0)^2 + ({}_{10}C_1)^2 + \cdots + ({}_{10}C_{10})^2 = 9 + {}_{10}C_{10}$ 으로 간단히 정리된다. 또한,  ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 에 착안하여  $({}_{10}C_0)^2 + ({}_{10}C_1)^2 + \cdots + ({}_{10}C_{10})^2$ 이  $(1+x)^{10}(1+x)^{10} = (1+x)^{20}$ 에서  $x^{10}$ 의 계수  ${}_{20}C_{10}$ 과 같음을 발견하면 문제를 해결할 수 있다. 평소에 공식에 대한 이해를 바탕으로 학습한 학생이었다면, 이 문항의 문제 해결 아이디어를 생각하는 데 큰 어려움이 없었을 거라 판단된다.

문항 【1-2】는 제시문 [다]의 ②를 이용하면  ${}_{21}C_1s^{20}(1-s)^1 + {}_{21}C_3s^{18}(1-s)^3 + \cdots + {}_{21}C_{21}s^0(1-s)^{21} = b$ 를 쉽게 도출할 수 있다. 또한,  $s$ 와  $1-s$ 의 차수의 합이 21이고,  $s$ 의 차수가 모두 짝수라는 특징으로부터 제시문 [나]의 이항정리를 활용하면  $b$ 를  $s$ 에 관한 식으로 나타낼 수 있다. 식이 복잡해 보이기 는 하나, < 확률과 통계 > 교과서에서도 비슷한 방법의 문제 해결 과정을 경험하므로 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면, 충분히 도전할만한 난이도의 문항이었을 거라 판단된다.

문항 【1-3】에서 주어진 상황은 독립시행을 여러 번 시행하는 경우로,  $i$ 의 값을 확률변수  $X$ 로 정하면 확률변수  $X$ 가 이항분포를 따름을 쉽게 파악할 수 있다. 또한, 이에 대한 확률질량함수  $P(X=i) = {}_{10}C_i \frac{1}{2^{10}}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ )도 구할 수 있다. 하지만 구해야 하는 것이  $i$ 의 기댓값이 아닌 상금  $g(i)$ 의 기댓값이라는 것과 표에 주어진 상금  $g(i)$ 를 제시문 [나]를 활용하여 표현할 방법을 생각해야 한다. 이 부분에서 수험생들이 어려움을 겪었을 수는 있지만, 문항 【1-2】의 아이디어와 유사하기 때문에 문제를 해결할 수 있었을 것이라 판단된다.

문항 【1-4】는 이항분포와 정규분포의 관계, 정규분포를 따르는 확률변수  $X$ 를 표준정규분포  $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수  $Z$ 로 바꿀 수 있어야 풀 수 있는 문항이다. 이는 고등학교 < 확률과 통계 > 교육과정에서 주요하게 다루고 있는 개념이다. 다만, 이 문항은 교과서의 전형적인 문항과 달리 주어진 조건만으로 정확한  $k$ 값을 구하기 위해서는 추가적인 대소 관계를 파악해야하기 때문에 다소 생소하게 느껴졌을 수 있다. 하지만 < 확률과 통계 > 교과서에서도 비슷한 방법의 문제 해결 과정을 경험하므로 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프의 특징을 잘 이해하고 있는 수험생이라면, 충분히 도전할만한 난이도의 문항이었을 거라 판단된다.

주어진 제시문들이 교과서에서 주요하게 다루는 내용이며, 문항 해결을 위한 활용도도 높은 편이다. 문항의 난도가 평이한 수준이라 < 확률과 통계 > 교과를 충실히 공부한 수험생이라면 쉽다고 느꼈을 것이다. 다만, 복잡한 수식을 간단히 정리하는 과정, 추론적 사고를 요구하는 부분 등이 있었기 때문에 체감 난이도에 비해 다소 문제 해결에 오랜 시간이 소요됐을 수 있다.

### 5.5.2 출제 검토 교사 의견

제시문 [가], [나], [다], [라], [마]는 모두 고등학교 < 확률과 통계 > 교과서에서 발췌한 내용으로 교육과정의 내용 및 범위를 준수하였다. 각각의 제시문은 네 개의 문항을 해결하는 중요한 단서가 되며, 각각의 문항은 확률과 통계에 대한 정확한 개념 이해를 필요로 하는 다양한 문제 상황을 제시하고 있으며, 이는 각 사건의 확률질량함수, 기댓값 등을 계산하는 수준에서 문제를 해결할 수 있다. 따라서 네 개의 문항은 < 확률과 통계 > 과목의 성취기준과 평가 유의사항을 준수하여 출제되었다 판단된다.

문항 【1-1】은 성취기준 ‘[12확통01-03]이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.’와 ‘[12확통03-01]확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.’를 근거로 출제되었다. 제시문 [가]를 이용하면, 중복조합으로 표현된 식을 조합의 형태로 식을 변형할 수 있으며, 제시문 [다]에서 주어진 이산확률변수의 확률질량함수 특징을 이용하면 문제를 해결할 수 있다.

문항 【1-2】는 성취기준 ‘[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.’와 ‘[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.’를 근거로 출제되었다. 제시문 [다]에 의해 확률질량함수에서 각 확률의 합이 1 이어야 함을 계산하는 문제이다. 이때 각 항에서  $s$ 의 차수가 짝수임에 착안하여 이항정리에서 홀수 차수 항을 없앨 수 있는 방식을 알아내면 문제를 해결할 수 있다.

문항 【1-3】은 성취기준 ‘[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.’와 ‘[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.’, ‘[12확통03-03]이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.’를 근거로 출제되었다. 문항에서 주어진 사건은 독립시행을 여러 번 시행하는 경우로 확률변수가 이항분포를 따름을 알 수 있다. 하지만 구해야 하는 것이  $i$ 의 기댓값이 아닌 상금  $g(i)$ 의 기댓값이라는 점, 상금  $g(i)$ 를 주어진 제시문 [나]를 이용하여 표현하는 방법을 찾아야 한다는 점에서 문제 해결 아이디어를 생각해내는 것이 어려울 수 있다.

문항 【1-4】는 성취기준 ‘[12확통03-03]이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.’와 ‘[12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.’를 근거로 출제되었다. 이항분포를 따르는 상황을 정규분포로 근사하여 확률을 계산하는 문항으로, 이항분포의 정규근사 영역에서 제공하는 전형적인 문항과 유사하지만, 표준정규분포표를 통하여 자연수  $k$ 을 단번에 파악할 수 없다는 점에서 차이가 있다. 하지만 주어진 표를 이용하면 확률의 대소 관계에 의해  $z$ 값의 대략적인 위치를 파악할 수 있으며, 이에 따라 주어진 조건을 만족하는 자연수  $k$ 를 구할 수 있다.

### 5.5.3 자문위원 평가 의견

다음은 자문위원들에게 각 제시문과 문항에 대해 ‘고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?’라는 질문에 ‘전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하고, ‘고등학교 교육과정 수준에 적당인가?’라는 질문에 ‘전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하여 정리한 내용이다. 수치는 5점 만점이고, 평균을 소수점 둘째 자리에서 반올림하여 소수점 첫째 자리까지 표시하였다.

제시문 [가]는 < 확률과 통계 > 과목의 핵심성취기준인 ‘[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔다.

제시문 [나]는 < 확률과 통계 > 과목의 핵심성취기준인 ‘[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔다.

제시문 [다]는 < 확률과 통계 > 과목의 핵심성취기준인 ‘[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나

왔다.

제시문 [라]는 <확률과 통계> 과목의 핵심성취기준인 '[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.'에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔다.

제시문 [마]는 <확률과 통계> 과목의 핵심성취기준인 '[12확통03-03]이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.'와 '[12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.'에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.8로 높게 나왔다.

따라서 모든 제시문 내용의 범위 및 수준이 적당하다고 판단할 수 있다.

문항 [1-1]은 제시문 [가]를 이용해 주어진 확률질량함수의 중복조합의 수를 조합의 수로 변형하여 정리하는 과정, 제시문 [나]를 이용해 조합의 수의 합의 규칙성을 찾는 과정, 제시문 [다]의 ② '확률질량함수의 총합이 1'이라는 사실을 이용하여 식을 세워 해결할 수 있는 문항이다. 모두 고등학교 <확률과 통계> 교육과정에서 중요하게 다루어지는 개념이므로 이 과목을 이수한 학생이라면 문제를 해결하는 데 큰 어려움이 없었을 것으로 생각된다. 실제로 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.5, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 높게 나왔다. 따라서 주어진 문항은 고등학교 교육과정 범위에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다.

문항 [1-2]는 제시문 [나]의 이항정리와 제시문 [마]의 이항분포, 제시문 [다]의 확률분포의 개념을 활용하여 해결할 수 있으며, 문항 [1-1]을 해결하지 못하였어도 풀 수 있는 문항이다. <확률과 통계> 교과서 문제 해결 과정에서도 비슷한 방법의 문제 해결 과정을 경험하므로 이 과목을 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제이다. 실제로 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.5, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 높게 나왔다. 따라서 주어진 문항은 고등학교 교육과정 범위에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다.

문항 [1-3]은 제시문 [라]와 이항분포에 대한 이해를 바탕으로 상금의 규칙성을 파악한 후, 제시문 [나]를 활용하여 해결할 수 있는 문항이다. <확률과 통계> 교육과정에서는 확률분포표를 분석하여 확률질량함수를 유추하는 것, 확률질량함수를 이용하여 기댓값의 식을 세우고 정리하는 계산과정을 고등학교 교육과정에서 주요하게 다루고 있다. 이 점에 착안한다면 문제를 해결할 수 있다. 실제로 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.6, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 높게 나왔다. 따라서 주어진 문항은 고등학교 교육과정 범위에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다.

문항 [1-4]는 제시문 [마]와 이항분포, 정규분포에 대한 이해를 바탕으로 해결할 수 있는 문항이다. 다소 많은 시행 횟수의 이항분포가 정규분포로 근사하는 성질을 이용하여 확률을 구하는 문제는 모든 출판사의 고등학교 교과서에 공통으로 소개되어 학생들에게 주요하게 소개되는 개념에 해당한다. 또한, 제시문 [마]의 내용이 문제를 해결하는데 힌트가 되므로 <확률과 통계> 교육과정을 정상적으로 이수한 학생들이라면 이 문항을 해결하는 것이 어렵지 않았을 거라 생각된다. 실제로 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.6, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.6으로 높게 나왔다. 따라서 주어진 문항은 고등학교 교육과정 범위에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다.

모든 제시문의 내용이 <확률과 통계> 교육과정에서 주요하게 다루는 개념이라 하였으며, 각 문항에 대해서는 전반적인 교과 내용 전체를 아우르는 사고를 확인할 수 있었다는 점에서 좋은 문제였다고 판단했다. 문항 [1-1], [1-2]는 학생들이 주어진 제시문만으로 해결 방법을 찾기에 어려움이 있었을 것이라는 의견도 있기는 하였으나, 전반적으로 <확률과 통계> 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면, 충분히 도전할만한 난이도의 문항이라 판단했다.

## 5.6 채점 기준

고등학교 교육과정에서 다루는 확률과 통계의 기본적인 내용 중 확률의 기본개념, 이항정리, 이산확률, 이항분포, 정규분포 등을 제대로 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다. 구체적인 채점기준은 다음과 같다.

### 【1-1】

- 이산확률변수에 대한 확률질량함수의 성질 및 조합과 중복조합의 관계를 잘 적용할 수 있다.
- 이항정리를 활용한 항등식으로부터 계수를 비교하여  $d$ 를 구할 수 있다.

### 【1-2】

- 1이 나올 횟수가 이항분포가 되는 것을 이용하여, 상금의 기댓값을 식으로 표현할 수 있다.
- 이항정리를 이용하여 기댓값을 구할 수 있다.

### 【1-3】

- 이항분포, 정규분포, 표준정규분포의 관계를 이해하여 1이 나올 횟수를 표준정규분포로 근사할 수 있다.
- 표준정규분포표를 이용하여  $k$ 의 최댓값을 구할 수 있다.

### 【1-4】

- 이항분포, 정규분포, 표준정규분포의 관계를 이해하여 1이 나올 횟수를 표준정규분포로 근사할 수 있다.
- 표준정규분포표를 이용하여  $k$ 의 최댓값을 구할 수 있다.

## 5.7 예시 답안

【1-1】 제시문 [다]에 의해 확률질량함수  $P(X=i) = \frac{{}_{11-i}H_i \times {}_{11-i}H_i}{{}_dH_{10}}$  ( $i=0, 1, 2, \dots, 10$ )의 합은 1이므로,

$$\frac{{}_{11}H_0 \times {}_{11}H_0}{{}_dH_{10}} + \frac{{}_{10}H_1 \times {}_{10}H_1}{{}_dH_{10}} + \dots + \frac{{}_1H_{10} \times {}_1H_{10}}{{}_dH_{10}} = 1 \text{ 이고, 제시문 [가]에 의해 } {}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r \text{ 이}$$

므로

$$1 = \frac{{}_{10}C_0 \times {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 \times {}_{10}C_1 + \dots + {}_{10}C_{10} \times {}_{10}C_{10}}{9+dC_{10}} = \frac{({}_{10}C_0)^2 + ({}_{10}C_1)^2 + \dots + ({}_{10}C_{10})^2}{9+dC_{10}} \text{ 이다.}$$

따라서  $({}_{10}C_0)^2 + ({}_{10}C_1)^2 + \dots + ({}_{10}C_{10})^2 = 9+dC_{10}$ 이 성립한다.

제시문 [나]에 의해 등식  $(1+x)^{10}(1+x)^{10} = (1+x)^{20}$ 에서 좌변의  $x^{10}$ 의 계수는

$${}_{10}C_0 \times {}_{10}C_{10} + {}_{10}C_1 \times {}_{10}C_9 + \dots + {}_{10}C_{10} \times {}_{10}C_0 = ({}_{10}C_0)^2 + ({}_{10}C_1)^2 + \dots + ({}_{10}C_{10})^2 = 9+dC_{10}$$

이고, 우변의  $x^{10}$ 의 계수는  ${}_{20}C_{10}$ 이다.

좌변과 우변의  $x^{10}$ 의 계수는 같으므로  $9+d = 20$ 이고,  $d = 11$ 이다.

【1-2】 제시문 [다]에 의해 확률질량함수  $P(Y=i) = \frac{{}_{21}C_{2i+1}}{b} s^{20-2i} (1-s)^{2i+1}$  ( $i=0, 1, 2, \dots, 10$ )의 합이

1이므로  $b = {}_{21}C_1 s^{20}(1-s)^1 + {}_{21}C_3 s^{18}(1-s)^3 + \cdots + {}_{21}C_{21} s^0(1-s)^{21}$ 이다. 우변의 각항의  $s$ 와  $1-s$ 의 차수의 합이 21로 일정하고,  $1-s$ 의 차수가 모두 홀수이므로

$$\begin{aligned} b &= {}_{21}C_1 s^{20}(1-s)^1 + {}_{21}C_3 s^{18}(1-s)^3 + \cdots + {}_{21}C_{21} s^0(1-s)^{21} \\ &= \frac{1}{2} \{ {}_{21}C_0 s^{21}(1-s)^0 + {}_{21}C_1 s^{20}(1-s)^1 + \cdots + {}_{21}C_{20} s^1(1-s)^{20} + {}_{21}C_{21} s^0(1-s)^{21} \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ {}_{21}C_0 s^{21}(1-s)^0 - {}_{21}C_1 s^{20}(1-s)^1 + \cdots + {}_{21}C_{20} s^1(1-s)^{20} - {}_{21}C_{21} s^0(1-s)^{21} \} \end{aligned}$$

로 변형할 수 있고, 제시문 [나]에서  $n = 21$ ,  $a = s$ ,  $b = 1-s$ 인 경우와  $n = 21$ ,  $a = s$ ,  $b = s-1$ 인 경우의 이항정리를 이용하면

$$b = \frac{1}{2} \{ s + (1-s) \}^{21} - \frac{1}{2} \{ s - (1-s) \}^{21} = \frac{1 - (2s-1)^{21}}{2}$$

【1-3】 10회 시행 후 1이 적힌 종이를 꺼낸 횟수  $i$ 를 확률변수  $X$ 라 하자. 10회의 독립시행에서 1이 나올 확률이  $\frac{1}{2}$ 이므로, 확률변수  $X$ 는 이항분포  $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르고  $P(X=i) = {}_{10}C_i \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-i} = \frac{{}_{10}C_i}{2^{10}}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ )이다. 상금의 기댓값을  $r$ 라 하면 제시문 [라]에 의해

$$\begin{aligned} r &= g(1)P(X=1) + g(1)P(X=1) + \cdots + g(10)P(X=10) \\ &= \frac{1}{2^{10}} \{ {}_{10}C_0(2^0+1) + {}_{10}C_1(2^1-1) + {}_{10}C_3(2^2+1) + \cdots + {}_{10}C_{10}(2^{10}+1) \} \\ &= \frac{1}{2^{10}} ({}_{10}C_0 2^0 + {}_{10}C_1 2^1 + {}_{10}C_2 2^2 + {}_{10}C_3 2^3 + \cdots + {}_{10}C_{10} 2^{10}) \\ &\quad + \frac{1}{2^{10}} ({}_{10}C_0 - {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 - {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_{10}) \end{aligned}$$

따라서 제시문 [나]의 이항정리를 이용하면

$$r = \frac{(1+2)^{10} + (1-1)^{10}}{2^{10}} = \frac{3^{10}}{2^{10}} = \frac{59049}{1024}$$

【1-4】 100회 시행 후 1이 적힌 종이를 꺼낸 횟수를 확률변수  $X$ 라 하자. 100회의 독립시행에서 1이 나올 확률이  $\frac{1}{10}$ 이므로, 확률변수  $X$ 는 이항분포  $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다. 시행 횟수가 충분히 크므로 제시문 [마]에 의해 이항분포  $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$ 은 정규분포  $N(10, 9)$ 로 근사할 수 있다. 그리고  $Z = \frac{X-10}{3}$ 이라 두면,  $Z$ 는 표준정규분포를 따른다.

$P(X \geq k) = P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{k-10}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{k-10}{3}\right)$ 이므로 문항에 주어진 표준정규분포표에서  $P\left(Z \geq \frac{k-10}{3}\right) \geq 0.23$ 을 만족하는 가장 큰  $\frac{k-10}{3}$ 의 값은 0.7이고, 이 경우  $k = 12.1$ 이다.  $k$ 는 자연수이므로, 12회 이상 1이 나올 확률은 0.23보다 크다는 것을 알 수 있다. 13회 이상 1이 나올 확률을 문항에 주어진 표준정규분포표를 이용해서 구해보면

$$P(X \geq 13) = P\left(Z \geq \frac{13-10}{3}\right) = P(Z \geq 1) = 0.1587$$

따라서  $k$ 의 최댓값은 12이다.



## 6. 문항카드 6 - 자연계열 1차 2번

### 6.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열 1차(수학과, 전자공학과, 컴퓨터공학과, 인공지능학과)/2번	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	<ul style="list-style-type: none"><li>· 함수의 미분계수</li><li>· 삼각함수의 극한과 미분</li><li>· 함수의 극한</li><li>· 접선의 방정식</li><li>· 원과 직선의 위치 관계</li></ul>
예상소요 시간	60분	/ 100 분

### 6.2 문제 및 제시문(문항)

#### [제시문]

[가] 삼각형 ABC에서 꼭짓점 A, B, C에 각각 대응하는 대변의 길이를  $a, b, c$ 라 하면, 삼각형 ABC의 넓이  $S$ 는  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$

[나] 함수  $f(x)$ 에 대하여 극한값  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 이 존재하면, 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하며, 이것을 기호로  $f'(a)$ 와 같이 나타낸다. 함수  $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 모든  $x$ 에서 미분가능하면 함수  $f(x)$ 는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 이다.

[다]  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (단,  $x$ 의 단위는 라디안)

[라] 좌표평면 위의 한 점  $(x_1, y_1)$ 과 직선  $ax + by + c = 0$  사이의 거리는  $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 이다.

#### [문제]

[2-1] 원점이 O인 좌표평면 위의 점 P의 좌표가  $(\cos t, \sin t)$ 이고, 점 Q의 좌표는  $(2\cos(t^2 + t), 2\sin(t^2 + t))$ 이다. 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있지 않게 되는 실수  $t$ 에 대해서 함수  $S(t)$ 는 삼각형 OPQ의 넓이로 정의하고, 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있는  $t$ 에 대해서는  $S(t) = 0$ 이라고 정의한다.  $-\sqrt{2\pi} < t < \sqrt{2\pi}$ 일 때,  $S(t)$ 를 구하시오.

【2-2】 제시문 【나】를 이용하여, 위 문항 【2-1】에서의 함수  $S(t)$ 가 미분가능하지 않은 실수  $t$ 의 값을 모두 구하시오. (단,  $-\sqrt{2\pi} < t < \sqrt{2\pi}$ )

【2-3】  $a$ 가 1보다 큰 실수이고, 원점이 O인 좌표평면에서 곡선  $y = \frac{1}{x}$  위의 한 점  $R\left(a, \frac{1}{a}\right)$ 에 대하여  $x$ 축의 양의 방향과 반직선 OR이 이루는 각의 크기를  $\theta$ (라디안)라 하자. 점 R에서의 접선이 원  $x^2 + y^2 = \sqrt{3}$ 과 만날 때  $\theta$ 의 범위를 구하시오.

【2-4】 위 문항 【2-3】의 점 R을 접점으로 하는 곡선  $y = \frac{1}{x}$ 의 접선이 원  $x^2 + y^2 = \sqrt{3}$ 과 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다고 하자. 선분 AB의 길이를  $\theta$ 의 함수  $l(\theta)$ 로 나타낼 때, 극한값  $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\{l(\theta)\}^2 - 4\sqrt{3}}{\theta}$ 를 구하시오.

## 6.3 출제 의도

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분 내용인 삼각함수의 정의와 활용, 함수의 극한, 삼각함수의 덧셈정리 등을 이용할 수 있는지와 미분계수의 정의, 함수의 미분가능성, 미분계수와 접선의 기울기 등을 잘 이해하고 이를 기하학적 문제에 활용할 수 있는지 평가한다. 제시문은 문제를 푸는데 사용할 수 있는 교과서 내용을 서술하였으며, 제시문과 직전에 해결한 문항을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다. 구체적인 평가요소는 다음과 같다.

- 삼각함수의 정의를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
- 삼각함수의 극한을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 평가한다.
- 미분계수의 정의와 함수의 미분가능성을 이해하는지 평가한다.
- 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 활용할 수 있는지 평가한다.
- 접선의 방정식을 구하고, 접선이 원과 만나는 경우를 설명할 수 있는지 평가한다.
- 원과 직선이 두 점에서 만나는 경우에 두 교점 간의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

## 6.4 출제 근거

### 6.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.</li> <li>· [수학I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ① 미분계수 [12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학 II 02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-1】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-2】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ① 미분계수 [12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학 II 02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-3】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다</li> <li>· [수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.</li> <li>· [수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.</li> <li>· [수학] - (4) 함수 - ② 유리함수와 무리함수 [10수학04-04] 유리함수 <math>y = \frac{ax+b}{cx+d}</math>의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</li> </ul>

하위문항 【2-4】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.</li> <li>· [수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</li> <li>· [수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.</li> <li>· [수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.</li> <li>· [수학] - (4) 함수 - ② 유리함수와 무리함수 [10수학04-04] 유리함수 <math>y = \frac{ax+b}{cx+d}</math>의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</li> </ul>
------------	---

## 6.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2021	52, 54, 102, 125, 132, 134, 234
		이준열 외	천재교육	2021	53, 55, 110, 134, 141, 145, 244
	수학Ⅰ	권오남 외	교학사	2022	74, 103
		이준열 외	천재교육	2021	76, 105
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2021	18, 56, 59, 61, 80
		이준열 외	천재교육	2021	16, 55, 56, 58, 74
	미적분	권오남 외	교학사	2022	71, 72, 86, 108
		이준열 외	천재교육	2021	73, 74, 85, 108

## 6.5 문항 해설

### 6.5.1 위원회 자체 평가 의견

제시문 [가], [나], [다], [라]는 고등학교 <수학>, <수학Ⅰ>, <수학Ⅱ>, <미적분> 교과서의 내용을 그대로 발췌하여 제시하였다. 네 개의 제시문은 모든 교과서에서 공통으로 주요하게 다루는 내용이기 때문에 익숙하여 수험생들이 쉽게 이해했을 거라 판단된다. 문항을 해결할 때 사용된 핵심 용어와 기호는 '사인함수,  $\sin x$ ,  $\tan x$ , 극한(값), 좌극한, 우극한, 연속, 불연속,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , 순간변화율, 미분계수, 미분가능, 매개변수,  $\cot x$ 이다. 이는 교육과정에 부합한다.

문항 【2-1】은 제시문 [가]를 이용하여 해결할 수 있는 문항이다. 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있지 않을 때 삼각형 OPQ가 형성된다는 점에 착안하여 범위를 나눠 넓이를 표현해야 한다는 것, 그리고 넓

이는 음수로 표현할 수 없다는 점에 유의하면 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있었을 거라 판단된다.

문항 【2-2】는 제시문 [나], [다]를 이용하여 해결할 수 있는 문항이다.  $|\sin(t^2)|=0$ 일 때,  $t=0, \pm\sqrt{\pi}$ 이라는 점에 착안하여 절댓값이 포함된 사인함수의 미분가능성을 판정하면 된다. 사인함수의 성질을 이용하여 식을 간단히 한 뒤, 제시문 [다]의 형태로 식을 변형하여 극한값을 계산하는 것이 문제 해결의 핵심이다. 문제 해결 아이디어는 <미적분> 교과서 문제 해결 과정에서도 비슷한 방법의 문제 해결 과정을 경험하므로 이 과목을 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있었을 거라 판단된다.

문항 【2-3】은 제시문 [나], [라]를 이용하여 부등식을 세울 수 있다. 먼저  $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프 위의 점 R의 좌표, x축의 양의 방향과 반직선 OR가 이루는 각의 크기를  $\theta$ (라디안)이라 주어진 정보로부터 직선 OR의 방정식을 통해,  $(\tan\theta)a = \frac{1}{a}$ , 즉  $a^2 = \cot\theta$ 와 같은 관계식을 세울 수 있다. 그리고 점 R에서

의 접선과 원이 만난다는 기하적 성질을 점 R에서의 접선과 주어진 원의 중심 사이의 거리가  $3^{\frac{1}{4}}$ (원의 반지름의 길이)보다 작거나 같다고 부등식을 세우는 대수적 변환이 필요하다. 즉,  $4a^2 \leq \sqrt{3}(1+a^4)$ . 여기에서  $a^2 = \cot\theta$ 을 이용하여  $\cot\theta$ 에 관한 이차부등식을 풀어야 하는데, 이때 근의 공식을 이용하여 풀 수 있다. 문제 해결 아이디어를 생각해내는 것과  $\cot\theta$ 에 관한 이차부등식의 해를 결정하는 데 있어서 수험생에게 다소 어렵게 느껴졌을 수 있겠으나, 고등학교 교육과정을 이수한 수험생이 도전할만한 난이도의 문항이기 때문에 교육과정에 부합된다.

문항 【2-4】는 제시문 [다]를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. 주어진 접선과 원이 서로 다른 두 점에서 만난다는 사실로부터 이차방정식  $\left(1+\frac{1}{a^4}\right)x^2 - \frac{4}{a^3}x + \frac{4}{a^2} - \sqrt{3} = 0$ 에서 근과 계수와의 관계를 활용하고, 문항 【2-3】에서 구한 식  $a^2 = \cot\theta$ 를 그 식에 대입하면 선분 AB의 길이  $l(\theta)$ 를 구할 수 있다. 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면, 식의 복잡성을 제외하고는 문제를 해결하는 데 큰 어려움이 없었을 거라 판단된다.

전반적으로 어렵지 않게 출제되기는 하였으나, 각 교과과정에 대한 충분한 이해 없이는 문제 해결에 어려움을 겪었을 것이다. 특히, 문항 【2-3】, 【2-4】의 경우 대부분의 학생들이 어려움을 느끼는 기하적 상황을 제시하여, 수험생들은 이를 식으로 나타내고, 그 결과를 다시 기하적인 상황에 치환하여 분석해야 했다. 이 과정에서 복잡한 식이 등장하기 때문에 수험생들에게 다소 까다로웠을 수는 있지만, 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 도전할만한 난이도의 문항이었다. 모든 제시문과 문항이 교육과정에 부합된다.

## 6.5.2 출제 검토 교사 의견

제시문 [가], [나], [다], [라]는 고등학교 <수학>, <수학Ⅰ>, <수학Ⅱ>, <미적분> 전체에 걸쳐 수학 개념을 제시하여 그 연계성을 중요시하고 있으나, 교과서 내용을 그대로 발췌하여 제시하였기 때문에 교육과정의 수준과 범위를 준수하였다 판단된다.

문항 【2-1】은 성취기준 '[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.'와 '[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.'를 근거로 출제되었다. 제시문 [가]를 이용하여 삼각형의 넓이를 표현해야 하는데, 이때 삼각형의 중심각을 범위에 따라 나누어 구해야 한다. 점 P와 점 Q의 좌표를 통하여 두 변의 길이와 사잇각을 알아낼 수 있다. 단, 함수  $S(t)$ 의 대상이 삼각형 OPQ의 넓이이므로 음수로 표현되지 않는다는 점에 유의해야 한다. 문제에 제시된 조건을 차분히 이해한 수험생은 어렵지 않게 해결할 수 있을 것으로 예상된다.

문항 【2-2】는 성취기준 '[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.'와 '[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.'를 근거로 출제되었다. 문제 해결 과정에서 제시문 [나]에 언급

된 미분가능성의 정의와 제시문 [다]에서 주어진 극한값을 이용하여 문제를 해결하면 된다. 극한 계산 시 사인함수의 성질을 사용하면 식을 더욱 간단히 할 수 있다.

문항 [2-3]은 성취기준 '[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.'와 '[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.'를 근거로 출제되었다. R에서의 접선과 주어진 원의 중심 사이의 거리가  $\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$  보다 작거나 같아야 된다는 것을 알아냈다면, 제시문 [나], [라]를 이용하여 부등식을  $4a^2 \leq \sqrt{3}(1+a^4)$ 와 같이 세울 수 있다. 여기에서 직선 OR가  $y = (\tan\theta)x$ 이고,  $R\left(a, \frac{1}{a}\right)$ 임을 이용하면  $(\tan\theta)a = \frac{1}{a}$ 이 된다는 사실로부터  $\cot\theta$ 에 관한 이차부등식을 푸는 문제로 변환할 수 있다. 다만,  $a > 1$ 이므로  $\theta < \frac{\pi}{4}$ 라는 사실을 인지해야 제대로 된 근을 구할 수 있기 때문에 이 부분에서 어려움을 느낄 수 있다.

문항 [2-4]는 성취기준 '[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.'와 '[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.'를 근거로 출제되었다. 문제 해결에 제시문 [다], [라]를 활용할 수 있다. 문항 [2-3]에서 구한 점과 직선 사이의 거리를 사용하면  $l(\theta)$ 를 쉽게 구할 수 있으며, 극한값의 계산만 하면 되는 문제이다. 문항 [2-3]을 해결한 학생이라면 쉽게 답을 구할 수 있을 것으로 판단된다.

### 6.5.3 자문위원 평가 의견

다음은 자문위원들에게 각 제시문과 문항에 대해 '고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?'라는 질문에 '전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다'를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하고, '고등학교 교육과정 수준에 적정한가?'라는 질문에 '전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다'를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하여 정리한 내용이다. 수치는 5점 만점이고, 평균을 소수점 둘째 자리에서 반올림하여 소수점 첫째 자리까지 표시하였다.

제시문 [가]는 <수학 I> 교과와 핵심성취기준인 '[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.'에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔다.

제시문 [나]는 <수학 II> 교과와 핵심성취기준인 '[12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.'와 '[12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.'에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.8, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔다.

제시문 [다]는 <미적분> 교과와 핵심성취기준인 '[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.'에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.8, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.8로 높게 나왔다.

제시문 [라]는 <수학> 교과와 핵심성취기준인 '[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.'에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9, 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.8로 높게 나왔다. 따라서 모든 제시문 내용의 범위 및 수준이 적당하다고 판단할 수 있다.

문항 [2-1]은 매개변수 표현에 대한 기본적인 개념과 좌표평면 위의 세 점이 이루는 관계를 이해하면 제시문 [가]를 이용해 쉽게 접근할 수 있는 문항이다. <수학 I> 과목을 정상적으로 이수한 학생이라면 문제를 해결하는 데 큰 어려움이 없었을 것이다. 실제로 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.6, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.6으로 높게 나왔다. 따라서 주어진 문항은 고등학교 교육과정 범위에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다.

문항 [2-2]는 문항 [2-1]에서 구한 삼각형 OPQ에서  $\angle O$ 가 이루는 각의 범위에 따라  $\sin$  값의 부호가 변하는 점, 제시문 [나]와 제시문 [다]를 이용해 미분가능성을 판정하면 해결할 수 있는 문제로, <수학 II> 교육과정의 미분 단원에서 중요하게 다루는 내용이다. 실제로 교육과정 내용의 범위에 부합한다

는 의견이 평균 4.5, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 높게 나왔다. 따라서 주어진 문항은 고등학교 교육과정 범위에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다.

문항 【2-3】은 제시문 [나]를 이용해 접선을 구하고 유리함수의 점 R에서의 접선이 원과 접할 때를 구하기 위해 제시문 [라]를 이용해 접선과 원의 중심까지의 거리와 원의 반지름의 길이가 같다는 것에 착안하여 식을 세우면 해결할 수 있는 문제이다. 실제로 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.6, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 높게 나왔다. 따라서 주어진 문항은 고등학교 교육과정 범위에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다.

문항 【2-4】는 원과 직선의 위치 관계에서 원의 반지름의 길이  $r$ , 원의 중심과 직선 사이의 거리  $d$ 에 대하여  $d < r$ 가 되기 위한 조건을 묻고 있다. 문항 【2-3】의 문제 해결 과정에 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 적용하면, 선분 AB의 길이  $l(\theta)$ 를 구할 수 있고 이에 따라 삼각함수의 극한을 구하면 된다. 계산하는 식의 복잡성에 따라 다소 난도가 높은 편이긴 하나 이 문항을 해결하는데 필요한 개념은 각각 고등학교 〈수학〉, 〈미적분〉 교육과정의 주요 개념으로 다루고 있는 부분이므로 이 교육과정을 충실하게 학습한 학생이 접근하기에 적절한 수준이라 판단할 수 있다. 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.5, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.4로 다른 문항보다 평균이 낮게 나오긴 하였지만, 높은 편이다. 따라서 주어진 문항은 고등학교 교육과정 범위에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다.

## 6.6 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분 내용인 삼각함수의 정의와 활용, 함수의 극한, 삼각함수의 덧셈정리 등을 이용할 수 있는지와 미분계수의 정의, 함수의 미분가능성, 미분계수와 접선의 기울기 사이의 관계 등을 잘 이해하고 이를 기하학적 문제에 활용할 수 있는지 평가한다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

### 【2-1】

- 삼각함수의 정의와 제시문 [가]의 사인함수를 이용한 예각 및 둔각 삼각형의 넓이공식을 활용할 수 있다.
- 매개변수  $t$ 에 따라 사잇각이 변하는 삼각형의 넓이를 정확히 구할 수 있다.

### 【2-2】

- 제시문 [나]로부터 미분가능한 함수의 정의를 잘 이해하여 이를 적용할 수 있다.
- 제시문 [다]의 삼각함수의 극한을 활용하여 함수의 미분가능성을 판단할 수 있다.

### 【2-3】

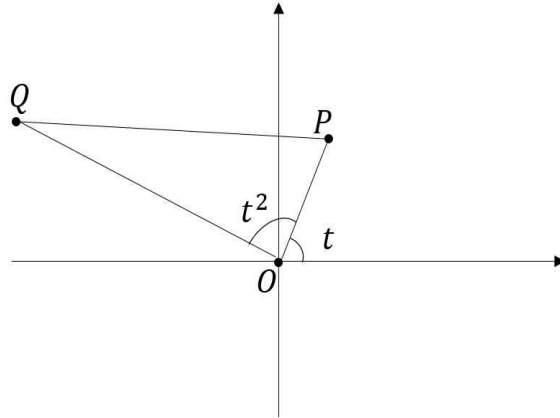
- 제시문 [나]를 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 이 접선이 원과 만나는 기하적 상황을 설명할 수 있다.
- 제시문 [라]의 점과 직선의 사이의 거리를 구하는 식 또는 이차방정식의 판별식을 이용하여 삼각함수가 포함된 부등식을 구하고 이 부등식으로부터  $\theta$ 의 범위를 구할 수 있다.

### 【2-4】

- 제시문 [라]를 이용하여 두 교점 사이의 거리를  $\theta$ 에 관한 함수로 나타낼 수 있다.
- 제시문 [다]의 삼각함수의 극한을 이용하여 극한을 구할 수 있다.

## 6.7 예시 답안

【2-1】  $\angle POQ = t^2$ 이고,  $\overline{OP} = 1$ ,  $\overline{OQ} = 2$ 이다.  $t^2 = 0$  또는  $t^2 = \pi$ 이면  $S(t) = 0$ 이다.  $0 < t^2 < \pi$  일 때, 삼각형 OPQ의  $\angle O$ 의 크기는  $t^2$ 이므로 제시문 [가]에 의해  $S(t) = \sin(t^2)$ 이다.  $\pi < t^2 < 2\pi$ 일 때, 삼각형 OPQ의  $\angle O$ 의 크기는  $2\pi - t^2$ 이므로  $S(t) = \sin(2\pi - t^2) = -\sin(t^2)$ 이다. 따라서  $S(t) = |\sin(t^2)|$ 이다.



【2-2】  $t$ 가  $-\sqrt{\pi} < t < 0$  또는  $0 < t < \sqrt{\pi}$ 일 때  $S(t) = \sin(t^2)$ 이므로, 미분가능한 두 함수  $\sin t$ 와  $t^2$ 의 합성함수인  $S(t)$ 는 미분가능하다.  $t$ 가  $-\sqrt{2\pi} < t < -\sqrt{\pi}$  또는  $\sqrt{\pi} < t < \sqrt{2\pi}$ 일 때,  $S(t) = -\sin(t^2)$ 이므로, 미분가능한 두 함수  $-\sin t$ 와  $t^2$ 의 합성함수인  $S(t)$ 는 미분가능하다. 제시문 [나]와 [다]를 이용하여  $t = 0, \pm\sqrt{\pi}$ 일 때 미분가능성을 조사한다.  $t = 0$ 일 때

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - S(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} |\sin(h^2)| = \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{\sin(h^2)}{h^2} = 0$$

따라서,  $S(t)$ 는  $t = 0$ 에서 미분가능하다.  $t = \sqrt{\pi}$ 일 때

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(\sqrt{\pi} + h) - S(\sqrt{\pi})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sin(\pi + 2\sqrt{\pi}h + h^2)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sin(2\sqrt{\pi}h + h^2)|}{h}$$

이다.  $h \rightarrow 0+$ 인 경우  $0 < h(2\sqrt{\pi} + h) < \pi$ 이므로, 제시문 [다]에 의해

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{S(\sqrt{\pi} + h) - S(\sqrt{\pi})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sin(2\sqrt{\pi}h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} (2\sqrt{\pi} + h) \frac{\sin(2\sqrt{\pi}h + h^2)}{(2\sqrt{\pi} + h)h} = 2\sqrt{\pi}$$

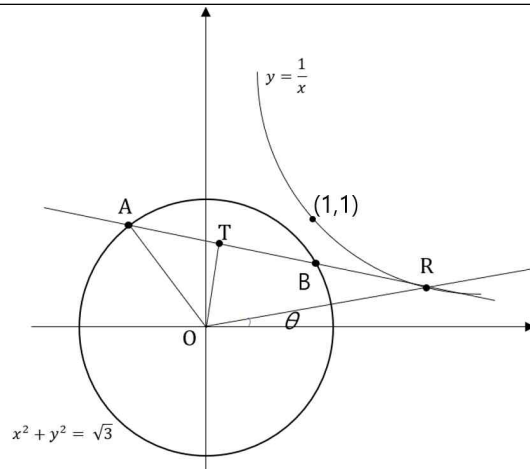
$h \rightarrow 0-$ 인 경우  $-\pi < h(2\sqrt{\pi} + h) < 0$ 이므로, 제시문 [다]에 의해

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{S(\sqrt{\pi} + h) - S(\sqrt{\pi})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-\sin(2\sqrt{\pi}h + h^2)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0-} (2\sqrt{\pi} + h) \frac{\sin(2\sqrt{\pi}h + h^2)}{(2\sqrt{\pi} + h)h} = -2\sqrt{\pi}$$

좌극한과 우극한이 다르므로  $S(t)$ 는  $t = \sqrt{\pi}$ 에서 미분가능하지 않다. 그리고  $S(t) = S(-t)$ 이므로 대칭에 의해  $S(t)$ 는  $t = -\sqrt{\pi}$ 에서 미분가능하지 않다.

【2-3】 직선 OR의 방정식은  $y = (\tan\theta)x$ 이고 곡선  $y = \frac{1}{x}$ 과의 교점이  $R\left(a, \frac{1}{a}\right)$ 이므로  $a \tan\theta = \frac{1}{a}$ 를 만족하고  $a^2 = \cot\theta$ 이다.





제시문 [나]에 의해, 점  $R\left(a, \frac{1}{a}\right)$ 에서의 접선의 방정식은  $x + a^2y - 2a = 0$ 이고 제시문 [라]에 의해 원점과 접선 사이의 거리는  $\frac{2a}{\sqrt{1+a^4}}$ 가 된다. 이 거리가 원의 반지름  $3^{\frac{1}{4}}$ 보다 작거나 같으면 접선과 원이 만나므로  $a$ 는 부등식  $4a^2 \leq \sqrt{3}(1+a^4)$ 을 만족한다. 이 부등식은  $a^2$ 에 관한 이차부등식이고 인수분해를 하면

$$(\sqrt{3}a^2 - 1)(a^2 - \sqrt{3}) \geq 0$$

을 만족하므로  $\cot\theta = a^2 \geq \sqrt{3}$  또는  $\cot\theta = a^2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.  $a > 1$ 이므로  $\cot\theta > 1$ 이고  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이다. 따라서  $\cot\theta \geq \sqrt{3}$ 이고  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 이다.

【2-4】 문항 【2-3】의 풀이에서 접선  $x + a^2y - 2a = 0$ 에 대하여 원점 O에서 내린 수선의 발을 T라 하면 선분 OT의 길이는 원점과 접선 사이의 거리  $\frac{2a}{\sqrt{1+a^4}}$ 와 같다. 삼각형 OTA는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해  $\left\{\frac{l(\theta)}{2}\right\}^2 = \sqrt{3} - \left(\frac{2a}{\sqrt{1+a^4}}\right)^2$ 이고

$$\frac{\{l(\theta)\}^2 - 4\sqrt{3}}{\theta} = \frac{-16a^2}{(1+a^4)\theta} = \frac{-16\cot\theta}{(1+\cot^2\theta)\theta} = -16 \frac{\sin\theta \cos\theta}{\theta}$$

따라서,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\{l(\theta)\}^2 - 4\sqrt{3}}{\theta} = -16$ 이다.

## 7. 문항카드 7 - 자연계열 2차 1번

### 7.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열2차(물리학과, 화공생명공학과, 기계공학과, 시스템반도체공학과)/1번	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	<div>· 직선의 방정식</div> <div>· 수열의 합</div> <div>· 원의 접선</div> <div>· 삼각함수의 극한</div> <div>· 호도법</div>
예상소요 시간	40분	/ 100 분

### 7.2 문제 및 제시문(문항)

#### [제시문]

[가] 좌표평면 위의 한 점  $(x_1, y_1)$ 과 직선  $ax + by + c = 0$  사이의 거리는 다음과 같다.

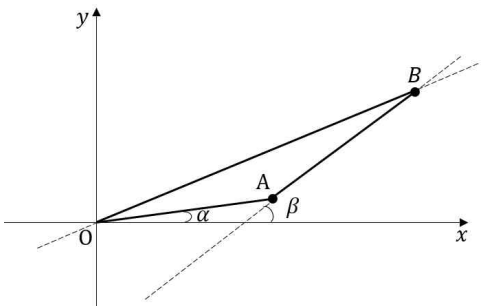
$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[나] 반지름의 길이가  $r$ , 중심각의 크기가  $\theta$ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이를  $l$ , 넓이를  $S$ 라고 하면,  
 $l = r\theta$ ,  $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$  이다.

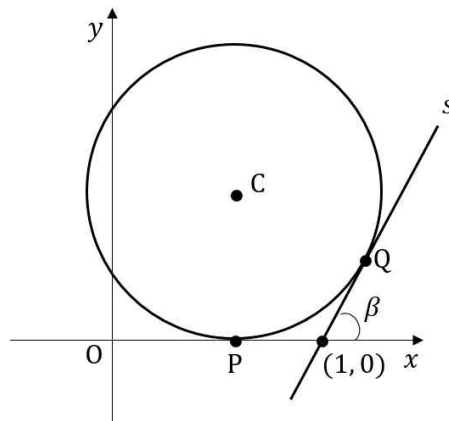
[다]  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (단,  $x$ 의 단위는 라디안)

#### [문제]

【1-1】 아래 그림에서와 같이 좌표평면 위의 세 점  $O(0, 0)$ ,  $A$ ,  $B$ 가 있고, 두 점  $O$ ,  $A$ 를 지나는 직선과 두 점  $A$ ,  $B$ 를 지나는 직선이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$ 라고 하자. 선분  $OA$ 와 선분  $AB$ 의 길이가 모두 1일 때, 두 점  $O$ ,  $B$ 를 지나는 직선에 수직인 직선의 기울기를 구하시오.



아래 그림에서와 같이 점  $(1, 0)$ 을 지나고  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가  $\beta$ (라디안)인 직선  $s$ 가 있다. 이때, 중심이  $C(a, b)$ 인 원이  $x$ 축과 직선  $s$ 에 동시에 접한다.  $x$ 축과의 접점을  $P$ , 직선  $s$ 와의 접점을  $Q$ 라 하자. 아래 문항 【1-2】~【1-4】에 답하시오. (단,  $a < 1$ ,  $b > 0$ ,  $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ )



【1-2】  $\beta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 위의 조건을 만족하는 원들의 중심을 모두 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

그리고 이 직선의 방정식과 제시문 【가】를 이용하여  $x$ 축, 직선  $s$ ,  $y = \frac{5}{12}x$ 로 이루어진 삼각형에 내접하는 원의 반지름을 구하시오.

【1-3】  $\beta = \frac{\pi}{3}$ 이고  $P$ 의 좌표가  $\left(\frac{n}{100}, 0\right)$ 이라 하자. 중심각의 크기가  $\pi$ (라디안)보다 작은 부채꼴  $CPQ$ 에서 호  $PQ$ 의 길이  $l_n$ 과  $\sum_{n=1}^{99} l_n$ 을 구하시오. (단, 자연수  $n$ 의 범위는  $1 \leq n \leq 99$ )

【1-4】  $P$ 의 좌표가  $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 이라 하자. 중심각의 크기가  $\pi$ (라디안)보다 작은 부채꼴  $CPQ$ 의 넓이를  $S(\beta)$ 라 할 때,  $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} S(\beta) \tan \beta$ 의 값을 구하시오.

### 7.3 출제 의도

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 원과 직선의 성질을 잘 이해하고 미적분의 기본적인 내용과 삼각함수를 기하적인 상황에 잘 활용할 수 있는지 평가한다. 제시문에는 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의, 정리, 설명이 제시되어 있으며, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있는 내용으로 구성되어 있다. 구체적인 평가기준은 다음과 같다.

- 두 직선의 수직 조건을 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.
- 원과 직선의 위치 관계를 이해하고, 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 원에 접하는 직선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
- 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.
- 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
- 삼각함수의 극한을 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.

### 7.4 출제 근거

#### 7.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.</li> <li>· [수학 I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【1-1】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.</li> </ul>
하위문항 【1-2】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.</li> </ul>
하위문항 【1-3】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학 I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.</li> <li>· [수학 I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제<math>n</math>항까지의 합을 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【1-4】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학 I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</li> </ul>

## 7.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2020	130, 134, 147
		고성은 외	신사고	2020	123, 126, 127, 137, 138
		홍성복 외	지학사	2022	131-135
	수학 I	박교식 외	동아	2021	66, 130
		김원경 외	비상교육	2021	69, 70, 142
		고성은 외	좋은책 신사고	2021	68, 69, 136, 137
	미적분	홍성복 외	지학사	2021	69
		이준열 외	천재교육	2021	73, 74

## 7.5 문항 해설

### 7.5.1 위원회 자체 평가 의견

제시문 [가], [나], [다]와 문항은 〈수학〉, 〈수학 I〉, 〈미적분〉 교과서에서 발췌 및 출제되었다. 문항을 해결하기 위해 사용된 핵심 용어와 기호는 ‘직선의 방정식, 점과 직선 사이의 거리, 원의 접선, 호도법, 부채꼴의 호의 길이, 부채꼴의 넓이, 수열의 합, 삼각함수의 극한’이다.

문항 【1-1】은 중학교 교육과정에서 배우는 기본적인 기하 개념인 삼각형의 외각 및 내각과 이등변삼각형의 성질을 이용하여 제시문을 사용하지 않고도 문제를 해결할 수 있다.

문항 【1-2】에서는  $x$  축과 직선  $s$ 를 【1-1】의 직선 OA와 직선 AB에 적용할 수 있는지를 묻고 있다. 즉, 원들의 중심을 모두 지나는 직선의 기울기는 문항 【1-1】에서  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$ 인 경우이므로  $-\sqrt{3}$ 으로 계산된다. 이 두 문항이 연계되어 있음을 확인할 수 있다면 나머지는 원의 중심의 좌표를 한 문자로 표현한 후 원의 중심으로부터 직선  $y = \frac{5}{12}x$ ,  $x$  축에 이르는 거리가 같다는 사실을 이용하여 풀이할 수 있다.

문항 【1-3】은  $\angle QCP = \beta$ 와  $\tan \frac{\beta}{2} = 1 - \frac{n}{100}$ 을 확인하는 문항이다.  $\sum_{n=1}^{99} l_n$ 의 계산은 교과서의 예제 수준의 계산으로 매우 수월하게 풀 것으로 예상된다.

문항 【1-4】는 【1-3】에서 구하는 과정에서 각 길이 및 넓이를  $\beta$ 에 관해 표현하고 간단한 삼각함수의 극한값을 구하는 문항이다.

주어진 제시문들이 교과서에서 주요하게 다루는 내용이며, 문항 해결을 위한 활용도도 높은 편이다. 대부분 계산이 복잡하지 않은 편이지만 문항 【1-2】에서 찾고자 하는 반지름의 길이가 조금 복잡한 편이다. 이를 통해 학생들이 계산을 잘못된 것은 아닌지 다시 한 번 검산하는 등 시간을 소요하는 경우가 있을 것으로 예상된다. 하지만 제시문과 문항은 전체적으로 〈수학〉, 〈수학 I〉, 〈미적분〉 과목을 충실히 공부한 학생이라면 충분히 해결할 수 있을 거라 판단된다.

### 7.5.2 출제 검토 교사 의견

주어진 제시문은 <수학>, <수학 I>, <미적분> 과목의 성취기준을 근거로 출제되었다. 호도법에 대한 이해를 기반으로 직선의 기울기를 삼각함수로 표현하고, 직선의 방정식을 구할 수 있는지 묻고 있다. 또한 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 중심각이 포함된 식으로 표현하여 수열의 합과 함수의 극한을 계산하게 하고 있다. 제시문의 내용은 모두 교과서에서 발췌하여 교육과정을 준수하였고 문제 해결의 방향성을 명확히 제시해주고 있다. 도형에 관한 문항 특성상 다양한 문제 풀이 방식이 있을 수 있다. 이 문제 해결 과정을 통해 해결 방식을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 문제해결 역량을 기를 수 있다.

문항 【1-1】은 이등변삼각형의 성질과 두 내각의 합의 성질을 이용하여 두 점 O, B를 지나는 직선과  $x$  축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 구해야 한다. 이후 두 직선이 수직하다는 것을 이용하여 직선의 기울기를 구할 수 있다. 또한 문제에서 두 각의 크기를 주었기 때문에 문자를 사용하지 않고도 특수각의 삼각비 값으로 쉽게 구할 수 있다.

문항 【1-2】는 문항 【1-1】에서 구한 아이디어를 기반으로 직선의 방정식을 세우고, 제시문 [가]의 공식을 사용하여 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같다는 사실을 사용한다. 이때 절댓값을 푸는 과정에서 나오는  $b$ 의 값 두 개 중 하나는  $a$ 의 값이 음수이므로 문제의 조건에 맞지 않는데, 이 경우는 원이 세 직선에 외접하는 경우임을 기하적으로 파악하고 있다면 더욱 쉽게 문제를 해결할 수 있었다.

문항 【1-3】은 삼각함수 공식으로 원의 반지름을 표현하고, 제시문 [나]의 공식을 사용하여  $l_n$ 을 구한 뒤 수열 단원의  $\sum_{k=1}^n k$  계산 공식을 적용하여 답을 구하는 문항이다. 상대적으로 난이도가 쉬운 편이다.

문항 【1-4】는 문항 【1-3】에서 구한 원의 반지름과 제시문 [나]를 사용하여 부채꼴의 넓이를 구하고, 제시문 [다]를 이용해 간단한 삼각함수의 극한을 계산하는 문제이다.

### 7.5.3 자문위원 평가 의견

다음은 자문위원들에게 각 제시문과 문항에 대해 ‘고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?’라는 질문에 ‘전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하고, ‘고등학교 교육과정 수준에 적정한가?’라는 질문에 ‘전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하여 정리한 내용이다. 수치는 5점 만점이고, 평균을 소수점 둘째 자리에서 반올림하여 소수점 첫째 자리까지 표시하였다.

제시문 [가]는 <수학> 과목의 핵심성취기준인 ‘[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문의 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [나]는 <수학 I> 과목의 핵심성취기준인 ‘[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문의 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [다]는 <미적분> 과목의 핵심성취기준인 ‘[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문의 수준이 잘 부합한다는 의견이 평균 4.8로 적당하다고 판단하고 있다.

문항 【1-1】은 중학교에서 학습하는 이등변삼각형의 성질과 한 외각이 다른 두 내각의 합과 같은 성질, 기울기와 탄젠트의 관계를 이용하여 해결할 수 있으며, <수학 I>의 삼각함수를 이수했다면 풀 수 있는 문항으로 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 교육과정 내용의 수준에

부합한다는 의견이 평균 4.8로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【1-2】을 만족시키는 점들의 자취는 문항 【1-1】에서와 마찬가지로 각의 이등분선의 일부에 해당하며 이는 제시문 [가]에서 소개한 바와 같이 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 구할 수 있다. 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【1-3】은 <수학 I> 과목의 삼각함수 단원의 호도법을 이용하여 호의 길이를 구하고, 수열 단원의 여러 가지 수열의 합을 이용하여 해결할 수 있다. 따라서 성취기준 '[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다'와 성취기준 '[12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을 구할 수 있다'에 대하여 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.6으로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【1-4】는 문항 【1-2】와 【1-3】을 일반화하여 직선의 방정식, 반지름 등을 삼각함수로 표현한 후 제시문 [다]에서 주어진 삼각함수가 포함된 식의 극한값의 개념을 활용하여 해결할 수 있는 문제이므로 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.6으로 쉬운 편이라는 의견이다.

## 7.6 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 원과 직선의 성질을 잘 이해하고 미적분의 기본적인 내용과 삼각함수를 기하적인 상황에 잘 활용할 수 있는지 평가한다. 구체적인 채점기준은 다음과 같다.

### 【1-1】

- 두 점 O, B를 지나는 직선과  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구할 수 있다
- 서로 수직인 직선의 기울기를 구할 수 있다.

### 【1-2】

- 점 C와  $(1, 0)$ 을 지나는 직선의 기울기와 방정식을 구할 수 있다.
- 제시문 [가]의 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 원의 반지름을 구할 수 있다.

### 【1-3】

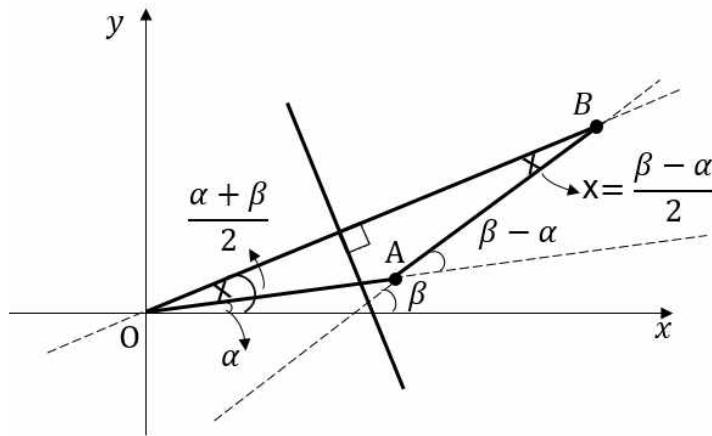
- 제시문 [나]를 이용하여 부채꼴의 호의 길이를 접점의 위치 함수로 구할 수 있다.
- 수열  $l_n$ 의 합을 구할 수 있다.

### 【1-4】

- 부채꼴의 중심각과 반지름을 이용하여 부채꼴의 넓이를 구할 수 있다.
- 삼각함수의 극한을 잘 활용하여 주어진 극한값을 구할 수 있다.

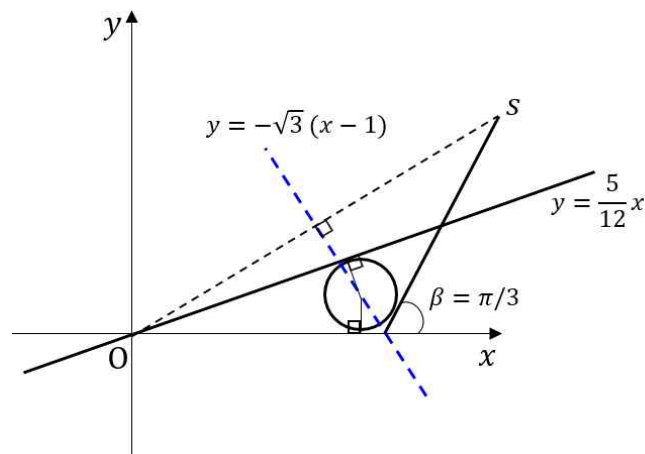
## 7.7 예시 답안

【1-1】 아래 그림에서와 같이 두 점  $O, A$ 를 지나는 직선이 두 점  $A, B$ 를 지나는 직선과 이루는 각 중 예각의 크기는  $\beta - \alpha$ 이므로 이등변삼각형  $OAB$ 의 두 밑각의 크기는  $\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\pi}{12}$ 이다. 따라서 두 점  $O, B$ 를 지나는 직선과  $x$ 축의 양이 방향과 이루는 각의 크기는  $\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ 이고, 이 직선에 수직인 직선의 기울기는  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\frac{\pi}{6}$ 이므로 직선의 기울기는  $-\sqrt{3}$ 이다.



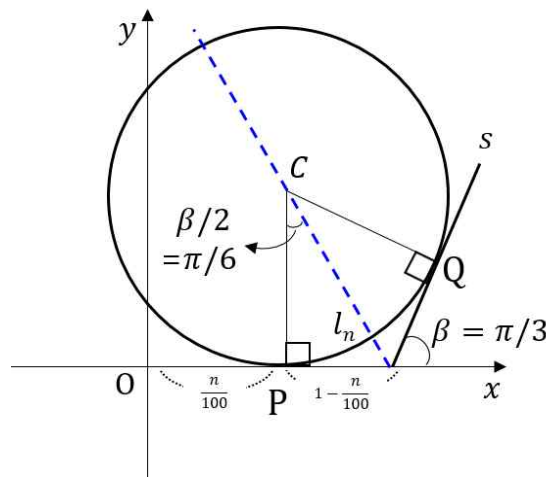
【1-2】 직선  $s$  위에 있고 점  $(1, 0)$ 으로부터의 거리가 1인 1사분면 위의 점을  $B$ 라 하자. 그러면 두 점  $C, (1, 0)$ 을 지나는 직선과 두 점  $O, B$ 를 지나는 직선은 항상 수직임을 알 수 있다. 따라서 원들의 중심을 모두 지나는 직선의 기울기는 문항 【1-1】 풀이에서  $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{3}$ 인 경우이므로  $-\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$ 이다. 그리고 이 직선이 점  $(1, 0)$ 을 지나기 때문에 직선의 방정식은  $y = -\sqrt{3}(x - 1)$ 이다. 원의 중심의  $y$ 좌표를  $b$ 라고 하면 원의 중심의 좌표는  $\left(1 - \frac{b}{\sqrt{3}}, b\right)$ 이고, 이 원의 중심과 직선  $5x - 12y = 0$ 의 거리는 제시문 [가]에 의해  $\frac{1}{13} \left| 5\left(1 - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) - 12b \right|$ 이다. 이 거리와 원의 반지름의 길이가 같을 때 직선이 원에 접하므로,  $13b = \left| 5\left(1 - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) - 12b \right|$ 이다.  $5\left(1 - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) - 12b < 0$ 이면  $b = \frac{25\sqrt{3} + 15}{22}$ 이고 이때 원의 중심의  $x$ 좌표가  $a = 1 - \frac{b}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{25\sqrt{3} + 15}{22\sqrt{3}} < 0$ 이므로  $x$ 축, 직선  $s, y = \frac{5}{12}x$ 로 이루어진 삼각형의 내접원이 될 수 없다.  $5\left(1 - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) - 12b > 0$ 이면  $b = \frac{15 - \sqrt{3}}{74}$ 이고 반지름의 길이는  $r = \frac{15 - \sqrt{3}}{74}$ 이다. 따라서  $x$ 축, 직선  $s, y = \frac{5}{12}x$ 로 이루어진 삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는  $r = \frac{15 - \sqrt{3}}{74}$ 이다.





【1-3】 점  $(1, 0)$ 을  $A$ 라 하면 두 삼각형  $CPA$ 와  $CQA$ 는 합동인 직각삼각형이다. 따라서 원의 반지름의 길이를  $r$ 라 하면,  $r \tan \frac{\beta}{2} = r \tan \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{n}{100}$ 이므로  $r = \sqrt{3} \left(1 - \frac{n}{100}\right)$ 이다. 따라서 호  $PQ$ 의 길이는  $l_n = r\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \left(1 - \frac{n}{100}\right)$ 이고

$$\sum_{n=1}^{99} l_n = \sum_{n=1}^{99} \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \left(1 - \frac{n}{100}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \left(99 - \sum_{n=1}^{99} \frac{n}{100}\right) = \frac{33\sqrt{3}\pi}{2}$$



【1-4】 문항 【1-3】의 풀이에서 원과  $x$ 축과의 접점이  $(1-d, 0)$ 일 때, 원의 반지름의 길이  $r = \frac{d}{\tan \frac{\beta}{2}}$

이므로 부채꼴  $CPQ$ 의 넓이는  $S(\beta) = \frac{1}{2}r^2\beta = \frac{d^2\beta}{2\tan^2 \frac{\beta}{2}}$ 이다. 따라서, 제시문 [다]에 의해

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} S(\beta) \tan \beta = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{d^2\beta}{2\tan^2 \frac{\beta}{2}} \tan \beta = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{4d^2 \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}{2\tan^2 \frac{\beta}{2}} \frac{\tan \beta}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{4d^2 \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}{2\sin^2 \frac{\beta}{2}} \frac{\sin \beta}{\beta \cos \beta} = 2d^2$$

$d = \frac{3}{4}$ 이므로  $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} S(\beta) \tan \beta = \frac{9}{8}$ 이다.

## 8. 문항카드 8 - 자연계열 2차 2번

### 8.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열 2차(물리학과, 화공생명공학과, 기계공학과, 시스템반도체공학과)/2번	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	· 함수의 극한 · 함수의 증가와 감소 · 함수의 그래프의 개형 · 두 곡선 사이의 넓이
예상소요 시간	60분	/ 100 분

### 8.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 함수  $f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 극한값이  $L$ 이면  $x=a$ 에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 모두  $L$ 과 같다. 또 그 역도 성립하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$$

[나] 함수  $f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든  $x$ 에서

- (1)  $f'(x) > 0$ 이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.
- (2)  $f'(x) < 0$ 이면  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

[다] 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 조사하여 그릴 수 있다.

- (1) 함수의 정의역과 치역
- (2) 곡선의 대칭성과 주기
- (3) 좌표축과의 교점
- (4) 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
- (5) 곡선의 볼록과 변곡점
- (6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , 점근선

[라] 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속인 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프와 두 직선  $x=a$ ,  $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**[문제]**

【2-1】 실수  $x$ 에 대하여 두 점  $(0, 1)$ ,  $(x, e^x)$  사이의 거리를  $d(x)$ 라 하자. 극한  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d(x)}{x}$ 의 수렴,

발산 여부를 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오. (단, 무리수  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ )

두 실수  $p$ ,  $c$ 는  $0 < p < 1$ 와  $c > 0$ 를 만족하고, 곡선  $y = x^p$  ( $x \geq 0$ ) 위의 점  $(c, c^p)$ 에서의 접선의 방정식을  $y = l(x)$ 라 하자. 문항 【2-2】~【2-4】에 답하시오.

【2-2】  $x \geq 0$ 일 때 부등식  $l(x) \geq x^p$ 이 성립함을 보이시오. 이 부등식과 제시문 [다]를 이용하여 두 함수  $y = x^p$ ,  $y = l(x)$ 의 그래프의 개형을 한 평면에 그리시오.

【2-3】  $c > 0$ 에 대하여 두 함수  $y = x^p$ ,  $y = l(x)$ 의 그래프와 두 직선  $x = 0$ ,  $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소가 되는  $c$ 의 값을 구하시오. (단, 여기서  $p$ 는 부등식  $0 < p < 1$ 을 만족하는 고정된 실수)

【2-4】  $c = \frac{1}{e}$ 일 때 두 함수  $y = x^p$ ,  $y = l(x)$ 의 그래프와 직선  $x = 0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S(p)$ , 두 함수  $y = x^p$ ,  $y = l(x)$ 의 그래프와 직선  $x = 1$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를  $R(p)$ 라 하자. 극한  $\lim_{p \rightarrow 0+} \frac{S(p) + R(p)}{S(p)}$ 의 수렴, 발산 여부를 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오. (단, 무리수  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ )

### 8.3 출제 의도

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분의 기본적인 내용을 바탕으로 함수의 도함수와 정적분을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에 활용할 수 있는지 평가한다. 특히 접선의 방정식, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 함수의 그래프와 두 곡선 사이의 넓이에 활용할 수 있는지 평가한다. 제시문에는 문제를 풀면서 사용할 수 있도록 관련된 교과서 내용을 서술하였으며, 제시문과 이전에 해결한 문항을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다. 구체적인 평가기준은 다음과 같다.

- 함수의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 다항함수 및 지수함수의 극한을 이용하여 주어진 함수의 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
- 미분을 사용하여 함수의 증가와 감소를 판정하고 이 결과를 함수의 최대·최소 및 부등식에 적용할 수 있는지 평가한다.
- 도함수와 이계도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 평가한다.
- 정적분에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

## 8.4 출제 근거

### 8.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학 II 01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.</li> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉢ 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (3) 적분 - ㉢ 정적분의 활용 [12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉢ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-1】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학] - (2) 기하 - ㉠ 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학 II 01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉠ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-2】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉢ 도함수의 활용 [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉡ 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉢ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-3】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (2) 미분 - ㉢ 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (3) 적분 - ㉢ 정적분의 활용 [12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (3) 적분법 - ㉠ 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</li> </ul>
하위문항 【2-4】	<ul style="list-style-type: none"> <li>· [수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉠ 함수의 극한 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</li> <li>· [수학II] - (3) 적분 - ㉢ 정적분의 활용 [12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (2) 미분법 - ㉠ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.</li> <li>· [미적분] - (3) 적분법 - ㉠ 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</li> </ul>

## 8.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2020	109, 110
		홍성복 외	지학사	2022	112, 113
	수학II	고성은 외	좋은책 신사고	2021	16, 17, 72, 80, 81, 94, 95, 136, 137
		류희찬 외	천재교과서	2021	18, 19, 78~80, 136
		배종숙 외	(주)금성출판사	2022	20, 21, 73, 84, 85, 100, 138, 139
		김원경 외	비상교육	2021	80, 129, 130
	미적분	권오남 외	교학사	2022	57, 91, 118, 145~148
		박교식 외	동아출판	2021	53, 127~129
		이준열 외	천재교육	2021	90, 91, 115, 140
		황선욱 외	미래엔	2021	137

## 8.5 문항 해설

### 8.5.1 위원회 자체 평가 의견

제시문 [가], [나], [다], [라]와 문항은 <수학>, <수학II>, <미적분> 과목에서 융합적으로 발췌 및 출제되었다. 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 제시문과 문항을 쉽게 이해할 수 있을 것으로 판단된다. 문항을 해결하기 위해 사용된 핵심 용어와 기호는 ‘함수의 극한, 좌극한과 우극한, 함수의 증가와 감소, 함수의 그래프의 개형, 두 곡선 사이의 넓이, 도함수, 이계도함수,  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ’이다. 이는 고등학교 교육과정에 부합하는 내용이다.

문항 【2-1】은 두 점 사이의 거리를 구하고 지수함수의 극한을 이용하여 좌극한과 우극한의 값을 구하고 제시문 [가]의 좌극한과 우극한의 관계를 이용하여 극한값의 존재 여부를 평가하는 문항이다. 풀이 과정에서  $\lim_{t \rightarrow 0+} (-t) = \lim_{t \rightarrow 0+} (-\sqrt{t^2})$ 임을 이용하여 분자와 함께 계산할 때 마이너스 부호가 근호 밖에 남아있음을 확인해야 한다. 하지만 이는 교과서에서 연습문제로 다루는 문항으로 계산 실수만 하지 않는다면 충분히 해결할 수 있을 것으로 예상된다.

문항 【2-2】는 제시문 [나]의 도함수의 부호와 함수의 증가 및 감소 관계를 이용하여 주어진 범위에서 부등식이 절대부등식인지 확인할 수 있는지와 제시문 [다]를 바탕으로 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 평가하는 문항이다. 먼저  $x > 0$  일 때 직선  $l(x)$ 의 기울기는  $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$ 이므로, 직선  $l(x)$ 의 방정식을 구할 수 있다.  $x > 0$  일 때,  $f(x) = l(x) - x^p$ 를 정의하고, 정의역 및 치역, 증감, 볼록, 극한을 확인하여 그래프의 개형을 그려낼 수 있다.

문항 【2-3】은 제시문 [라]에서 제시된 정적분을 활용한 곡선의 넓이를 구하는 식과 【2-2】에서 구한 부등식을 이용하여 곡선의 넓이를 구하고 도함수의 부호와 함수의 증가 및 감소 관계를 이용하여 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.

문항 【2-4】는 【2-3】에서 보인 부등식 및 그래프의 개형과 제시문 [라]에서 제시된 정적분을 활용한 곡선의 넓이를 구하는 식을 이용하여 각 영역들의 넓이를 구하고, 이와 관련된 함수의 극한을 극한의 기본적인 성질과  $e$ 와 관련된 함수의 극한값을 이용하여 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.

전체적으로 <미적분> 과목의 내용이 주를 이루었으며 계산과정의 어려움은 예상되나 고등학교 교육과정의 내용을 매우 준수하고 있는 것으로 판단된다.

### 8.5.2 출제 검토 교사 의견

주어진 제시문은 〈수학〉, 〈수학Ⅱ〉, 〈미적분〉 과목의 성취기준을 근거로 출제되었다. 또한 제시문의 내용은 모두 교과서에서 발췌하여 교육과정을 준수하였다. 미분은 함수의 순간적인 변화를 설명하는 도구이며 적분은 도형의 넓이와 부피를 구할 때 사용한다. 주어진 문항에서는 함수의 증가, 감소 성질을 조사하여 여러 함수의 최솟값을 찾고, 그래프의 개형을 그리며 곡선 사이의 넓이를 구해야 한다. 문제 해결 과정을 통해 미분, 적분의 유용성과 가치를 인식할 수 있게 하는 문항으로 적합하다.

문항 【2-1】은 무리수  $e$ 의 극한 공식을 사용하여 좌극한과 우극한값을 구해 극한값의 존재성을 밝히는 문제이며, 제시문 [가]의 정의를 이용하여 문제를 해결하면 된다. 이때  $x < 0$ 일 때,  $\frac{1}{x} = -\sqrt{\frac{1}{x^2}}$ 임을 정확히 인지하고 있어야 좌극한을 올바르게 구할 수 있다. 이 부분에서 실수하는 학생이 있을 것으로 생각된다.

문항 【2-2】는 음함수의 미분법에서 학습한  $y = x^n$  ( $n$ 은 실수)의 미분을 이용하여  $l(x)$ 를 구하고, 부등식이 항상 성립함을 보이기 위해 함수의 증가, 감소를 조사하여 함수의 최솟값을 구하는 문항이다. 이후 제시문 [다]에서 요구하는 사항 중 해당사항을 반영하여 그래프의 개형을 그리는 것이 중요하다.

문항 【2-3】은 문항 【2-2】에서 구한 접선의 방정식과 제시문 [라]의 공식을 사용하여 넓이를 표현하고, 넓이의 최솟값을 찾기 위해 넓이를 미분하여 증가와 감소를 조사하는 문항이다.

문항 【2-4】는 문항 【2-3】에서 구해놓은 넓이의 식을 활용하면 각 도형의 넓이를 금방 구할 수 있다. 이후 식을 정리하여 극한값을 구하는 문항이다. 이때  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ 의 꼴이 보이려면 식을 잘 정리해야 하는데, 그 부분이 조금 어려울 수 있을 것이라 생각된다.

### 8.5.3 자문위원 평가 의견

다음은 자문위원들에게 각 제시문과 문항에 대해 ‘고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?’라는 질문에 ‘전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하고, ‘고등학교 교육과정 수준에 적정한가?’라는 질문에 ‘전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하여 정리한 내용이다. 수치는 5점 만점이고, 평균을 소수점 둘째 자리에서 반올림하여 소수점 첫째 자리까지 표시하였다.

제시문 [가]는 〈수학Ⅱ〉 과목의 핵심성취기준인 ‘[12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문의 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [나]는 〈수학Ⅱ〉 과목의 핵심성취기준인 ‘[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문의 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [다]는 〈미적분〉 과목의 핵심성취기준인 ‘[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문의 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 적당하다고 판단하고 있다.

제시문 [라]는 〈수학Ⅱ〉 과목의 핵심성취기준인 ‘[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.’에 대하여 범위에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 높게 나왔고, 제시문의 수준에 잘 부합한다는 의견이 평균 4.9로 적당하다고 판단하고 있다.

문항 【2-1】은 문제 해결 과정에서 좌극한과 우극한의 결과가 다르게 도출된다는 점을 파악하는 것이 관건인 문제이다. 하지만 이 정도 수준의 문항은 교과서에도 소개되는 정도로 판단된다. 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.8로 높게 나왔고, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균

4.7로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【2-2】는 두 함수의 그래프가  $x=c$ 에서 접한다는 것을 수험생들에게 확인하고 있다. 함수의 그래프를 그리기 위해서는 제시문 [나], [다]의 정의역, 치역, 증가, 감소, 오목, 볼록, 극한 등의 많은 요소를 파악해야 하지만 접선과 곡선의 계산이 복잡하게 표현되지 않아서 문제 해결에 많은 시간이 소요되지는 않을 것으로 판단된다. 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 높게 나왔고, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.4로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【2-3】은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 통하여 구한 후 도출된 함수를 미분하여 증감을 조사한 후 최솟값을 구하는 문항이다. 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.7로 높게 나왔고, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 쉬운 편이라는 의견이다.

문항 【2-4】는 문항 【2-2】, 【2-3】에서 구한 결과를 이용하여 어렵지 않은 삼각함수의 극한값의 계산을 하는 문항이다. 교육과정 내용의 범위에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 높게 나왔고, 교육과정 내용의 수준에 부합한다는 의견이 평균 4.5로 쉬운 편이라는 의견이다.

## 8.6 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분의 기본적인 내용을 바탕으로 함수의 도함수와 정적분을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에 활용할 수 있는지 평가한다. 특히 접선의 방정식, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 함수의 그래프와 두 곡선 사이의 넓이에 활용할 수 있는지 평가한다. 구체적인 채점기준은 다음과 같다.

### 【2-1】

- 두 점 사이의 거리를 구하고, 극한을 표현할 수 있다.
- 무리수  $e$ 의 정의로부터 좌극한과 우극한의 값을 구하고 제시문 [가]의 좌극한, 우극한과 극한의 관계를 이용하여 극한값의 존재 여부를 확인할 수 있다.

### 【2-2】

- 제시문 [나]의 도함수의 부호와 함수의 증가 및 감소 관계를 이용하여 부등식이 성립함을 보일 수 있다.
- 제시문 [다]의 그래프를 그리는 방법을 바탕으로 그래프의 개형을 잘 그릴 수 있다.

### 【2-3】

- 제시문 [라]의 정적분을 활용한 곡선의 넓이를 구하는 식과 문항 【2-2】의 부등식을 이용하여 곡선의 넓이를 구할 수 있다.
- 제시문 [나]의 도함수의 부호와 함수의 증가 및 감소 관계를 이용하여 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.

### 【2-4】

- 문항 【2-2】의 부등식 및 그래프의 개형과 [라]에 제시된 정적분을 활용한 곡선의 넓이를 구하는 식을 이용하여 영역들의 넓이를 구할 수 있다.
- 이와 관련된 함수의 극한을 극한의 기본적인 성질과 무리수  $e$ 와 관련된 함수의 극한값을 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

## 8.7 예시 답안

【2-1】 함수  $d(x) = \sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}$  이고 무리수  $e$ 의 정의로부터  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 이다. 우극한을 구하면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{x^2 + (e^x - 1)^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$x = -t$ 로 치환하여 좌극한을 구하면

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{d(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{x^2 + (e^x - 1)^2}}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{t^2 + (e^{-t} - 1)^2}}{-t} = -\lim_{t \rightarrow 0+} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-t} - 1}{-t}\right)^2} = -\sqrt{2}$$

우극한과 좌극한의 값이 다르므로 제시문 [가]에 의해 극한값은 존재하지 않는다.

【2-2】  $x > 0$ 일 때  $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$ 이므로  $l(x) = pc^{p-1}(x - c) + c^p = pc^{p-1}x + (1 - p)c^p$ 이다.

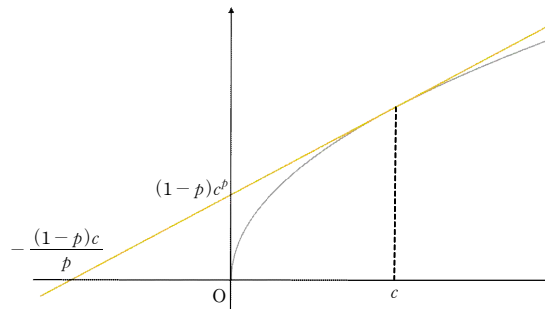
$f(x) = l(x) - x^p$  ( $x > 0$ )라 하면  $f'(x) = p(c^{p-1} - x^{p-1})$ 이고  $f(c) = f'(c) = 0$ 이다.  $0 < x < c$ 일 때  $f'(x) < 0$ 이고  $x > c$ 일 때  $f'(x) > 0$ 이므로, 제시문 [나]에 의해  $f(x)$ 는  $0 < x < c$ 일 때 감소,  $x > c$ 일 때 증가한다. 따라서  $x > 0$ 에서  $f(x) = l(x) - x^p \geq 0$ 이다.  $x = 0$ 일 때  $l(0) = (1 - p)c^p > 0$ 이므로  $x \geq 0$ 에서 부등식이 성립한다.

제시문 [다]를 바탕으로 함수  $y = x^p$ 의 정의역 및 치역, 증감, 볼록, 극한을 조사한다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = \infty$ 이므로 정의역과 치역은 모두  $[0, \infty)$ 이다.  $x > 0$ 일 때  $\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} > 0$ ,

$\frac{d^2}{dx^2}x^p = p(p-1)x^{p-2} < 0$ 이므로 함수  $y = x^p$ 의 그래프는 증가하면서 위로 볼록이다. 그리고

$l(x) \geq x^p$ 이므로 두 함수  $y = x^p$ ,  $y = l(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



【2-3】 제시문 [라]와 문항 【2-2】의 부등식으로부터 도형의 넓이는

$$h(c) = \int_0^1 \{pc^{p-1}x - (p-1)c^p - x^p\} dx = \frac{p}{2}c^{p-1} - (p-1)c^p - \frac{1}{p+1}$$

이다.  $h(c)$ 의 최솟값을 구하기 위해 함수  $h$ 를 미분하면,

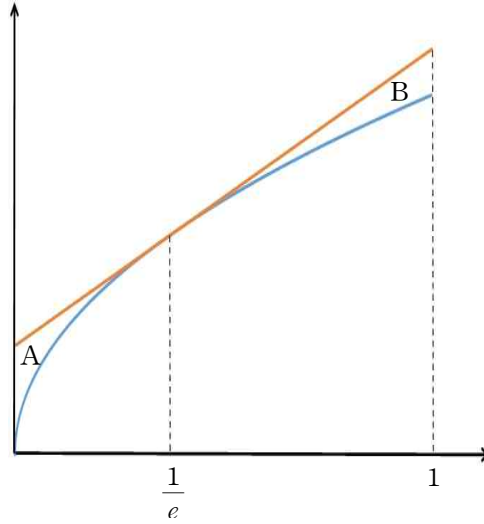
$$h'(c) = \frac{p(p-1)}{2}c^{p-2} - p(p-1)c^{p-1} = p(p-1)c^{p-2}\left(\frac{1}{2} - c\right)$$

이므로  $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 이고  $0 < c < \frac{1}{2}$ 일 때  $h'(c) < 0$ ,  $c > \frac{1}{2}$ 일 때  $h'(c) > 0$ 이다. 따라서 제시문 [나]

에 의해  $h(c)$ 는  $0 < c < \frac{1}{2}$ 일 때 감소,  $c > \frac{1}{2}$ 일 때 증가한다. 따라서  $c = \frac{1}{2}$ 에서 넓이가 최소가 된다.



【2-4】 문항 【2-2】로부터  $0 \leq x < \frac{1}{e}$  또는  $x > \frac{1}{e}$  일 때,  $l(x) > x^p$  이므로,  $S(p)$ 와  $R(p)$ 는 아래 그림의 도형 A와 B의 넓이가 된다.



제시문 [라]에 의해

$$S(p) = \int_0^{\frac{1}{e}} p \left( \frac{1}{e} \right)^{p-1} x - (p-1) \left( \frac{1}{e} \right)^p - x^p dx = \left\{ \frac{p}{2} - (p-1) - \frac{1}{p+1} \right\} \left( \frac{1}{e} \right)^{p+1} = \frac{p(1-p)}{2(p+1)} \left( \frac{1}{e} \right)^{p+1}$$

문항 【2-3】에 의해  $S(p) + R(p) = h\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{e}{2}p - p + 1\right) \left(\frac{1}{e}\right)^p - \frac{1}{p+1}$  이다. 따라서

$$\frac{S(p) + R(p)}{S(p)} = \frac{e\{p^2(e-2) + ep + 2(1-e^p)\}}{p(1-p)} = \frac{e}{1-p} \left\{ p(e-2) + e - 2\frac{e^p-1}{p} \right\}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^p-1}{p} = 1 \text{ 이므로 } \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{S(p) + R(p)}{S(p)} = e^2 - 2e \text{ 이다.}$$