

2023학년도 수시모집 논술고사 문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 1]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열/문항번호1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II
	핵심개념 및 용어	미분계수, 접선의 방정식, 함수의 최댓값, 정적분, 곡선과 직선 사이의 넓이, 삼각함수
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 소요 예상	

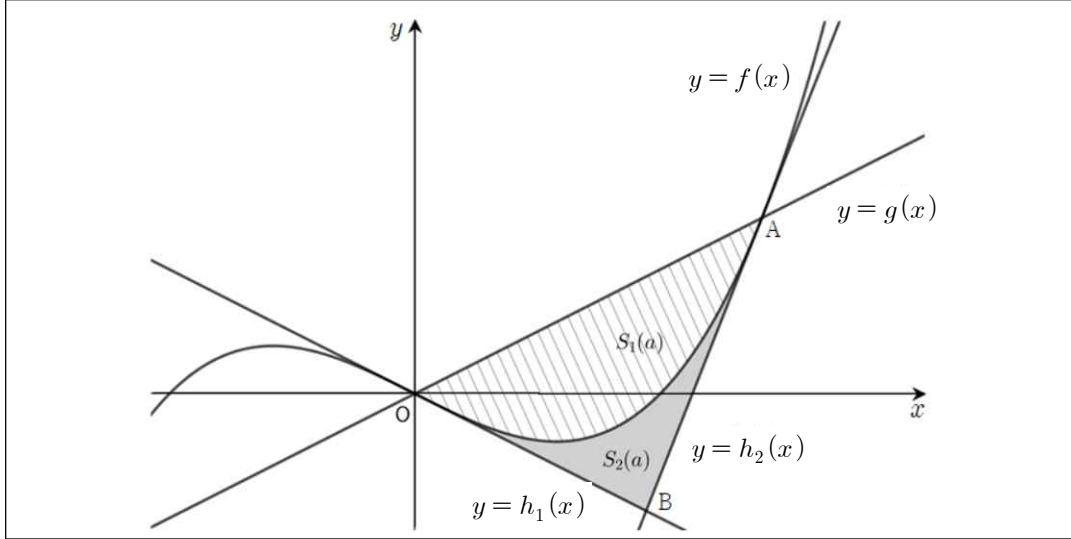
2. 문항 및 제시문

[문1]

양수 a 에 대하여 삼차함수 $f(x) = x^3 - \frac{3a^2}{2}x$ 와 일차함수 $g(x) = \frac{3a^2}{2}x$ 가 있다. 그림과 같이 $x \geq 0$ 에서 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 교점 중 원점 O 가 아닌 점을 $A(x_1, y_1)$ 이라 하자.

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 O 에서의 접선의 방정식을 $y = h_1(x)$, 점 A 에서의 접선의 방정식을 $y = h_2(x)$ 라 하고 두 접선 $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ 의 교점을 B 라 하자.

$0 \leq x \leq x_1$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1(a)$ 라 하고 곡선 $y = f(x)$ 와 두 직선 $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2(a)$ 라 하자.



[문제 1-1]

점 $C(p, q)$ 는 곡선 $y = f(x)$ ($0 < x < x_1$) 위의 점이다. 삼각형 AOC의 넓이가 최대가 되는 점 C를 C_0 이라 하자. 점 C_0 의 좌표와 삼각형 AOC₀의 넓이를 구하시오. [35점]

[문제 1-2]

점 B의 좌표를 구하고, $S_1(a) = k \cdot S_2(a)$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 구하시오. [45점]

[문제 1-3]

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 다음 식을 만족시키는 θ 의 값을 구하시오. [20점]

$$\frac{9 - 4S_1(\sin\theta)}{4S_1(\sqrt{\cos\theta}) + 8S_1(\sqrt{\sin\theta})} = \frac{1}{2}$$

3. 출제 의도

[문제 1-1] 다항함수를 미분하여 접선의 기울기를 구할 수 있는지 알아본다.

다항함수의 미분을 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 알아본다.

삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-2] 접선의 방정식을 구할 수 있는지 알아본다.

다항함수의 정적분을 이용해서 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-3] 삼각함수가 포함된 방정식을 풀 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
1	1-1	[수학]-(2)기하-(가)평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학 II]-(2)미분-(가)미분계수 [12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학II02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. [수학 II]-(2)미분-(다)도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	1-2	[수학]-(2)기하-(가)평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학 II]-(2)미분-(다)도함수의 활용 [12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [수학 II]-(3)적분-(다)정적분의 활용 [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	1-3	[수학 I]-(2)삼각함수-(가)삼각함수 [12수학I02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	김원경 외 14인	비상교육	2020	98~125		
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2021	70~90		
	수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2021	53~97, 121~139		
	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과 서	2020	52~97, 122~139		

5. 문항 해설

[문제1-1]

- 주어진 조건에서 삼각형의 넓이가 최대가 될 수 있는 상황을 파악한다.
- 삼각형의 넓이가 최대가 되게 하는 곡선 위의 점을 구한다.
- 삼각형의 넓이를 구한다.

[문제1-2]

- 주어진 함수의 접선의 방정식을 구한다.
- 두 직선의 교점을 구한다.
- 구하고자 하는 영역의 넓이를 적분을 이용하여 계산한다.

[문제1-3]

- 주어진 식을 이해하고 간단하게 표현할 수 있다.
- 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식을 간단하게 정리한다.
- 특수각의 삼각함수 값을 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식을 푼다.

6. 채점 기준

[문제1-1]

[예시답안 1]

- 점 C_0 의 좌표를 정확히 구하면 +15점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(10점): 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 C_0 에서의 접선이 직선 $y = g(x)$ 와 평행임을 이용

하여 (1)과 같은 관계를 구하였다.

- A(15점): (1)을 구하고, (2)와 같이 점 C_0 의 좌표를 정확히 구하였다.
- 삼각형 AOC_0 의 최대 넓이를 구하면 +20점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - D(5점): (3), (4), (5) 중 한 개를 정확히 구하였다.
 - C(10점): (3), (4), (5) 중 두 개를 정확히 구하였다.
 - B(15점): (3), (4), (5) 모두 정확히 구하였다.
 - A(20점): (3), (4), (5)를 종합하여 삼각형 AOC_0 의 넓이를 (6)과 같이 정확히 구하였다.

[예시답안 2]

- 삼각형 AOC 의 넓이에 관한 식을 표현하면 +20점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - D(5점): (7), (8), (9) 중 한 개를 정확히 구하였다.
 - C(10점): (7), (8), (9) 중 두 개를 정확히 구하였다.
 - B(15점): (7), (8), (9) 모두 정확히 구하였다.
 - A(20점): (7), (8), (9)를 종합하여 (10)과 같은 식을 구하였다.
- 점 C_0 의 좌표와 삼각형 AOC_0 넓이를 구하면 +15점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - C(5점): (11)과 같이 삼각형 AOC_0 의 넓이를 p 에 대한 함수로 표현하여 미분하고, 증감표 등을 이용하여 $p=a$ 일 때 삼각형 AOC_0 의 넓이가 최대임을 보였다.
 - B(10점): 점 C_0 의 좌표 또는 삼각형 AOC_0 의 넓이 중 하나를 구하였다.
 - A(15점): 점 C_0 의 좌표와 삼각형 AOC_0 의 넓이를 모두 구하였다.

[문제1-2]

[예시답안 1]

- 점 B의 좌표를 구하면 +15점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - C(5점): (12)나 (13) 중 하나만 정확히 구하였다.
 - B(10점): (12)와 (13) 모두 정확히 구하였다.
 - A(15점): (12)와 (13)이 맞고, (14)와 같이 점 B의 좌표를 정확히 구하였다.
- $S_1(a)$ 를 구하면 +10점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(5점): (15)의 첫 번째 등호처럼 $S_1(a)$ 를 정적분을 이용하여 표현하였지만 그 값

을 정확하게 구하지 못하였다.

- A(10점): (15)와 같이 $S_1(a)$ 를 정적분을 이용하여 표현하고 그 값도 정확하게 구하였다.
- $S_2(a)$ 를 구하면 +15점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - C(5점): (16)만 정확히 구하였다.
 - B(10점): (17)까지 정확히 구하였다.
 - A(15점): $S_2(a)$ 의 값을 정확히 구하였다.
- k 의 값을 구하면 +5점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - A(5점): k 의 값을 정확히 구하였다.

[예시답안 2]

- 점 B의 좌표를 구하면 +15점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - C(5점): (18)이나 (19) 중 하나만 정확히 구하였다.
 - B(10점): (18)과 (19) 모두 정확히 구하였다.
 - A(15점): (18)과 (19)가 맞고, (20)과 같이 점 B의 좌표를 정확히 구하였다.
- $S_1(a)$ 를 구하면 +10점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - B(5점): (21)의 첫 번째 등호처럼 $S_1(a)$ 를 정적분을 이용하여 표현하였지만 그 값을 정확하게 구하지 못하였다.
 - A(10점): (21)와 같이 $S_1(a)$ 를 정적분을 이용하여 표현하고 그 값도 정확하게 구하였다.
- $S_2(a)$ 를 구하면 +15점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - C(5점): (22)와 같이 $S_2(a)$ 를 정적분을 이용하여 표현하였다.
 - B(10점): (23)의 첫 번째 등식과 같은 정확한 표현을 하였다.
 - A(15점): $S_2(a)$ 의 값을 정확하게 구하였다.
- k 의 값을 구하면 +5점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - A(5점): k 의 값을 정확히 구하였다.

[문제1-3]

- 주어진 식을 정리해서 간결하게 쓰면 +15점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - C(5점): (24)와 같이 식을 정리하였다.
 - B(10점): (25)까지 식을 정리하였다.
 - A(15점): (26)까지 식을 정리하였다.
- 삼각함수가 포함된 방정식을 정확히 풀면 +5점
 - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
 - A(5점): θ 의 값을 정확히 구하였다.

7. 예시 답안

[문제1-1]

[예시답안 1] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선이 $y=g(x)$ 와 평행인 경우 삼각형 AOC_0 의 넓이가 최대이다. 따라서 점 C_0 에서의 곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기가 $\frac{3a^2}{2}$ 이므로, 점 C_0 의 x 좌표를 t 라 하면

$$f'(t) = 3t^2 - \frac{3a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \quad (1)$$

이므로 $t = \pm a$ 이다. $t > 0$ 이므로 C_0 의 좌표는

$$C_0\left(a, -\frac{a^3}{2}\right). \quad (2)$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - \frac{3a^2}{2}x = \frac{3a^2}{2}x \Leftrightarrow x = 0, \pm \sqrt{3}a$$

이고 점 A의 x 좌표가 양수이므로 A의 좌표는

$$A\left(\sqrt{3}a, \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right). \quad (3)$$

따라서 선분 OA의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{3}a - 0)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}a^3}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \sqrt{9a^4 + 4} \quad (4)$$

이

고 점 C_0 와 직선 $y = \frac{3a^2}{2}x$ 사이의 거리가

$$\frac{\left| \frac{3a^2}{2} \cdot a - \left(-\frac{a^3}{2} \right) \right|}{\sqrt{\left(\frac{3a^2}{2} \right)^2 + (-1)^2}} = \frac{4a^3}{\sqrt{9a^4 + 4}} \quad (5)$$

이

므로, 삼각형 AOC_0 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \sqrt{9a^4 + 4} \cdot \frac{4a^3}{\sqrt{9a^4 + 4}} = \sqrt{3}a^4. \quad (6)$$

[예시답안 2] $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - \frac{3a^2}{2}x = \frac{3a^2}{2}x \Leftrightarrow x = 0, \pm \sqrt{3}a$

이고 점 A의 x 좌표가 양수이므로 점 A의 좌표는

$$A\left(\sqrt{3}a, \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right) \quad (7)$$

따라서 선분 OA의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{3}a - 0)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}a^3}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \sqrt{9a^4 + 4} \quad (8)$$

이

고 점 C와 직선 $y = \frac{3a^2}{2}x$ 사이의 거리는

$$\frac{\left| \frac{3a^2}{2} \cdot p - q \right|}{\sqrt{\left(\frac{3a^2}{2} \right)^2 + (-1)^2}} = \frac{|3a^2p - 2q|}{\sqrt{9a^4 + 4}}. \quad (9)$$

점

$C(p, q)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $q = p^3 - \frac{3a^2}{2}p$

이고, 따라서 (8), (9)에 의하여 삼각형 AOC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \sqrt{9a^4 + 4} \cdot \frac{|3a^2p - 2q|}{\sqrt{9a^4 + 4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} |-p^3 + 3a^2p|. \quad (10)$$

$T(p) = -p^3 + 3a^2p$ 라 하면

$$\begin{aligned} T'(p) &= -3p^2 + 3a^2 = -3(p-a)(p+a) \text{ 이므로} \\ T'(p) &= 0 \Leftrightarrow p = \pm a. \end{aligned} \quad (11)$$

닫힌구간 $[0, \sqrt{3}a]$ 에서 함수 $T(p)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

p	0	...	a	...	$\sqrt{3}a$
$T'(p)$		+	0	-	
$T(p)$	0	\nearrow	$2a^3$	\searrow	0

$T(p)$ 는 $p = a$ 일 때 최대이고 $T(p) > 0$ 이므로, C_0 의 좌표는 $C_0\left(a, -\frac{a^3}{2}\right)$ 이며 삼각형 AOC_0 의 넓이는 (10)에 의하여 $\sqrt{3}a^4$ 이다.

[문제1-2]

[예시답안 1] $f'(x) = 3x^2 - \frac{3a^2}{2}$ 이므로 $f'(0) = -\frac{3a^2}{2}$, $f'(\sqrt{3}a) = \frac{15a^2}{2}$ 이다. 따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $O(0,0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$h_1(x) = -\frac{3a^2}{2}x, \quad (12) \quad \text{점}$$

$A\left(\sqrt{3}a, \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$h_2(x) = \frac{15a^2}{2}(x - \sqrt{3}a) + \frac{3\sqrt{3}a^3}{2} = \frac{15a^2}{2}x - 6\sqrt{3}a^3. \quad (13)$$

(12), (13)에 의하여

$$h_1(x) = h_2(x) \Leftrightarrow \frac{15a^2}{2}x - 6\sqrt{3}a^3 = -\frac{3a^2}{2}x \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

이므로 점 B의 좌표는

$$B\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, -\sqrt{3}a^3\right). \quad (14)$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 의 교점이 $O(0,0)$, $A\left(\sqrt{3}a, \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right)$ 이므로

$$S_1(a) = \int_0^{\sqrt{3}a} \left\{ \frac{3a^2}{2}x - \left(x^3 - \frac{3a^2}{2}x \right) \right\} dx = \frac{9a^4}{4}. \quad (15)$$

점 $B\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, -\sqrt{3}a^3\right)$ 와 직선 $y = \frac{3}{2}a^2x$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{3a^2}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}a}{3} - (-\sqrt{3}a^3)\right|}{\sqrt{\left(\frac{3a^2}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{4\sqrt{3}a^3}{\sqrt{9a^4 + 4}}. \quad (16)$$

(4)

에 의해 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \sqrt{9a^4 + 4} \cdot \frac{4\sqrt{3}a^3}{\sqrt{9a^4 + 4}} = 3a^4 \quad (17)$$

이므로 $S_2(a) = 3a^4 - \frac{9a^4}{4} = \frac{3a^4}{4}$ 이다.

따라서 (15)에 의하여 $S_1(a) = k \cdot S_2(a)$ 를 만족시키는 k 의 값은 3이다.

[예시답안 2] $f'(x) = 3x^2 - \frac{3a^2}{2}$ 이므로 $f'(0) = -\frac{3a^2}{2}$, $f'(\sqrt{3}a) = \frac{15a^2}{2}$ 이다. 따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $O(0,0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$h_1(x) = -\frac{3a^2}{2}x, \quad (18)$$

점

$A\left(\sqrt{3}a, \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$h_2(x) = \frac{15a^2}{2}(x - \sqrt{3}a) + \frac{3\sqrt{3}a^3}{2} = \frac{15a^2}{2}x - 6\sqrt{3}a^3. \quad (19)$$

(18), (19)에 의하여

$$h_1(x) = h_2(x) \Leftrightarrow \frac{15a^2}{2}x - 6\sqrt{3}a^3 = -\frac{3a^2}{2}x \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

이므로 점 B의 좌표는

$$B\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, -\sqrt{3}a^3\right). \quad (20)$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 의 교점이 $O(0,0)$, $A\left(\sqrt{3}a, \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right)$ 이므로

$$S_1(a) = \int_0^{\sqrt{3}a} \left\{ \frac{3a^2}{2}x - \left(x^3 - \frac{3a^2}{2}x \right) \right\} dx = \frac{9a^4}{4}. \quad (21)$$

점 B의 x 좌표가 $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_2(a) &= \int_0^{\frac{2\sqrt{3}a}{3}} \left\{ \left(x^3 - \frac{3a^2}{2}x \right) - \left(-\frac{3a^2}{2}x \right) \right\} dx \\ &\quad + \int_{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}^{\sqrt{3}a} \left\{ \left(x^3 - \frac{3a^2}{2}x \right) - \left(\frac{15a^2}{2}x - 6\sqrt{3}a^3 \right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (22)$$

즉

$$S_2(a) = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^{\frac{2\sqrt{3}a}{3}} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9a^2}{2}x^2 + 6\sqrt{3}a^3x \right]_{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}^{\sqrt{3}a} = \frac{3a^4}{4}. \quad (23)$$

따라서 $S_1(a) = k \cdot S_2(a)$ 를 만족시키는 k 의 값은 3이다.

[문제1-3]

(15) 또는 (21)에 의하여 $S_1(a) = \frac{9a^4}{4}$ 이므로 주어진 식에 대입해서 정리하면

$$\frac{9 - 9\sin^4\theta}{9\cos^2\theta + 18\sin^2\theta} = \frac{1}{2}. \quad (24)$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로, 주어진 식은

$$\frac{1 - \sin^4\theta}{1 + \sin^2\theta} = \frac{1}{2}. \quad (25)$$

$1 - \sin^4\theta = (1 - \sin^2\theta)(1 + \sin^2\theta)$ 이므로 주어진 식은

$$1 - \sin^2\theta = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

따라서 $\sin\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin\theta > 0$ 이므로 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, 따라서

$\theta = \frac{\pi}{4}$ 이다.

2023학년도 수시모집 논술고사 문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 2]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 사인법칙, 삼각형의 넓이, 등비수열, 수열의 귀납적 정의, 로그의 성질
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 예상	

2. 문항 및 제시문

[문2]

그림과 같이 $\overline{OA_1} = 1$, $\angle A_1OA_2 = 30^\circ$, $\angle OA_1A_2 = 15^\circ$ 인 삼각형 OA_1A_2 가 있다. 점 A_3 은 다음 조건 (가), (나)를 만족시킨다.

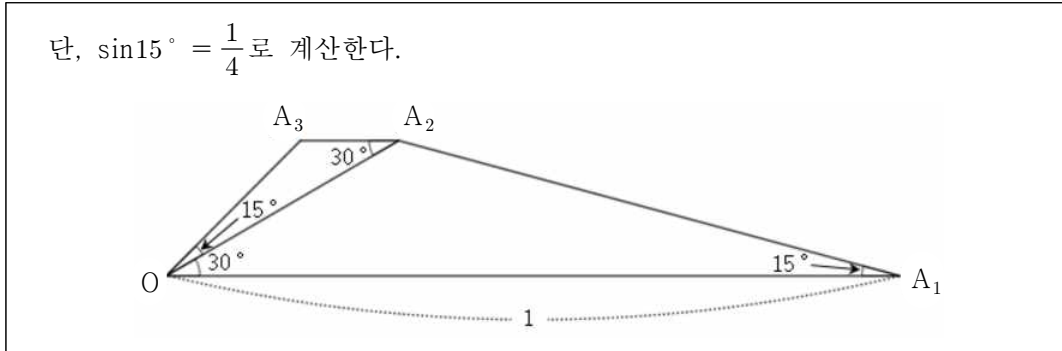
(가) $\angle A_2OA_3 = 15^\circ$, $\angle OA_2A_3 = 30^\circ$.

(나) 삼각형 OA_1A_2 와 삼각형 OA_2A_3 은 선분 OA_2 를 제외하고 겹치지 않는다.

모든 자연수 n 에 대하여 점 A_n 은 다음 조건 (다), (라)를 만족시킨다.

(다) $\angle A_{n+1}OA_{n+2} = \angle OA_nA_{n+1}$, $\angle OA_{n+1}A_{n+2} = \angle A_nOA_{n+1}$.

(라) 삼각형 OA_nA_{n+1} 과 삼각형 $OA_{n+1}A_{n+2}$ 는 선분 OA_{n+1} 을 제외하고 겹치지 않는다.



[문제 2-1]

선분 OA_2 와 선분 OA_3 의 길이를 각각 구하시오. [20점]

[문제 2-2]

자연수 n 에 대하여 선분 OA_n 의 길이를 a_n 이라 하자. a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 n 이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 구하여 수열 a_1, a_3, a_5, \dots 와 수열 a_2, a_4, a_6, \dots 이 등비수열임을 보이고, 두 등비수열의 첫째항과 공비를 각각 구하시오. [40점]

[문제 2-3]

자연수 n 에 대하여 삼각형 OA_nA_{n+1} 의 넓이를 T_n 이라 하자. [문제 2-2]의 결과를 이용하여

$\sum_{n=1}^{2N} \log_2 T_n$ 을 구하시오. 단, N 은 자연수이다. [40점]

3. 출제 의도

[문제 2-1] 사인법칙을 이용하여 주어진 두 내각들과 한 변의 길이로부터 삼각형의 다른 변의 길이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-2] 사인법칙을 이용하여 주어진 수열이 등비수열임을 보이고 첫째항과 공비를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-3] \sum 의 성질과 로그의 성질을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
2	2-1	[수학 I]-(2) 삼각함수-(가) 삼각함수 [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	2-2	[수학 I]-(3) 수열-(가) 등차수열과 등비수열 [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다. [수학 I]-(3) 수열-(다) 수학적 귀납법 [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
	2-3	[수학 I]-(1) 지수함수와 로그함수-(가) 지수와 로그 [12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학 I]-(3) 수열-(가) 등차수열과 등비수열 [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다. [수학 I]-(3) 수열-(나) 수열의 합 [12수학 I 03-04] Σ 의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	26~31, 75~107, 112~157		
	수학 I	김원경 외 14인	비상교육	2020	23~28, 76~113, 116~158		
	수학 I	류희찬 외 10인	천재교과 서	2021	29~35, 84~113, 120~162		

5. 문항 해설

[문제 2-1]

삼각형 OA_1A_2 에 사인법칙을 적용하여 선분 OA_2 의 길이를 구한다. 이 결과와 함께 삼각형 OA_2A_3 에 사인법칙을 적용하여 선분 OA_3 의 길이를 구한다.

[문제 2-2]

제시문의 조건 (가), (나), (다), (라)로부터 삼각형 OA_nA_{n+1} 의 내각들을 n 이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 구한다. 삼각형 OA_nA_{n+1} 에 사인법칙 등을 적용하여 a_n 과 a_{n+1} 의 관계를 n 이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 구하고, 이를 이용하여 두 등비수열 a_1, a_3, a_5, \dots 와 a_2, a_4, a_6, \dots 의 첫째항과 공비를 각각 구한다.

[문제 2-3]

[문제 2-2]의 결과를 이용하여 T_n 을 구한다. \sum 의 성질과 로그의 성질을 이용하여

$$\sum_{n=1}^{2N} \log_2 T_n \text{을 } N \text{으로 나타낸다.}$$

6. 채점 기준

[문제 2-1]

[예시답안 1]

- 사인법칙을 이용하여 (1)과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.
- (2)와 같이 선분 OA_2 의 길이를 구한 경우: +5점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.
- 사인법칙을 이용하여 (3)과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.
- (4)와 같이 선분 OA_3 의 길이를 구한 경우: +5점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

[예시답안 2]

• (5), (6) 등과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (7)과 같이 선분 OA_2 의 길이를 구한 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (8), (9) 등과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (10)과 같이 선분 OA_3 의 길이를 구한 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

[예시답안 3]

• (11) 등과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (12)와 같이 선분 OA_2 의 길이를 구한 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (13) 등과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (14)와 같이 선분 OA_3 의 길이를 구한 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

[문제 2-2]

[예시답안 1]

- 삼각형의 각들의 관계를 파악하고 이를 이용하여 (16)과 같이 사인법칙을 적용한 경우: +15점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.

-A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (17)과 같이 a_n 과 a_{n+1} 의 관계를 표현한 경우: +10점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-B(5점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.

-A(10점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (18)과 같이 제시문의 조건들을 이용하여 a_n 과 a_{n+2} 의 관계를 얻은 경우: +5점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

- (19), (20)과 같이 등비수열들의 첫째항, 공비를 구한 경우: +10점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-B(5점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.

-A(10점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

[예시답안 2]

- (22), (23), (25), (26) 등과 같이 (24), (27)을 얻기 위한 관계들을 얻은 경우: +15점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.

-A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (24), (27)과 같이 a_n 과 a_{n+1} 의 관계를 표현한 경우: +10점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-B(5점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.

-A(10점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (28)과 같이 제시문의 조건들을 이용하여 a_n 과 a_{n+2} 의 관계를 얻은 경우: +5점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.
- (29), (30)과 같이 등비수열들의 첫째항, 공비를 구한 경우: +10점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-B(5점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
-A(10점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

[예시답안 3]

- (32), (34) 등과 같이 (33), (35)를 얻기 위한 관계들을 얻은 경우: +15점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
-A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.
- (33), (35)와 같이 a_n 과 a_{n+1} 의 관계를 표현한 경우: +10점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-B(5점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
-A(10점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.
- (36)과 같이 제시문의 조건들을 이용하여 a_n 과 a_{n+2} 의 관계를 얻은 경우: +5점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.
- (37), (38)과 같이 등비수열들의 첫째항, 공비를 구한 경우: +10점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-B(5점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
-A(10점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

[문제 2-3]

[예시답안 1]

- (39)와 같이 T_n 을 n 으로 표현한 경우: +15점
-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
-B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
-A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (40)과 같이 $\log_2 T_n$ 을 n 으로 표현한 경우: +15점
- E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
- A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (41)를 얻은 경우: +10점
- E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(5점): (41)의 첫 번째 등식에 해당하는 결과까지만 얻었다.
- A(10점): (41)의 최종 결과를 얻었다.

[예시답안 2]

- (42)와 같이 T_n 을 n 으로 표현한 경우: +15점
- E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
- A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (43)과 같이 $\log_2 T_n$ 을 n 으로 표현한 경우: +15점
- E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
- A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (44)를 얻은 경우: +10점
- E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(5점): (44)의 첫 번째 등식에 해당하는 결과까지만 얻었다.
- A(10점): (44)의 최종 결과를 얻었다.

[예시답안 3]

- (45)와 같이 T_n 을 n 으로 표현한 경우: +15점
- E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
- B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
- A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (46)과 같이 $\log_2 T_n$ 을 n 으로 표현한 경우: +15점
- E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-B(8점): n 이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.

-A(15점): n 이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

• (47)를 얻은 경우: +10점

-E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.

-B(5점): (41)의 첫 번째 등식에 해당하는 결과까지만 얻었다.

-A(10점): (41)의 최종 결과를 얻었다.

7. 예시 답안

[문제 2-1]

[예시답안 1] $\angle OA_2A_1 = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 135^\circ$ 이므로, 삼각형 OA_1A_2 에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{OA_2}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{OA_1}}{\sin 135^\circ}. \quad (1)$$

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로, (1)에 의하여

$$\overline{OA_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (2)$$

삼각형 OA_2A_3 에 사인법칙을 적용하면

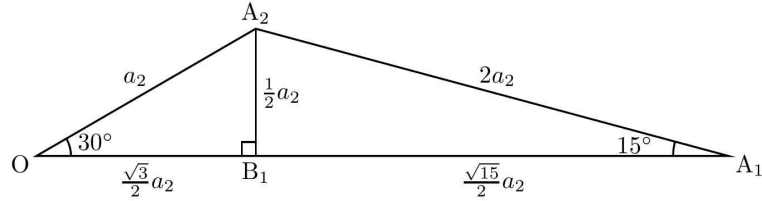
$$\frac{\overline{OA_3}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{OA_2}}{\sin 135^\circ} \quad (3)$$

이므로, (2)에 의하여

$$\overline{OA_3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}. \quad (4)$$

[예시답안 2] $a_2 = \overline{OA_2}$, $a_3 = \overline{OA_3}$ 이라 하자. <그림 1>과 같이 점 A_2 에서 선분 OA_1 에 내린 수선의 발을 B_1 이라 하면,

$$\overline{OB_1} = \overline{OA_2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a_2, \quad \overline{A_2B_1} = \overline{OA_2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}a_2. \quad (5)$$



<그림 1>

$\overline{A_2B_1} = \overline{A_1A_2} \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{4}\overline{A_1A_2}$ 이므로, (5)에 의하여 .

$$\overline{A_1A_2} = 4 \cdot \overline{A_2B_1} = 2a_2. \quad (6) \quad \text{직}$$

각삼각형 $A_1A_2B_1$ 에 피타고라스의 정리를 적용하면 (5), (6)에 의하여

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - \overline{A_2B_1}^2} = \sqrt{(2a_2)^2 - \left(\frac{a_2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}a_2 \text{이므로, (5)에 의하여}$$

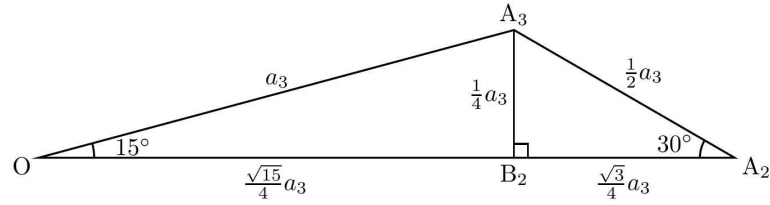
$$1 = \overline{OA_1} = \overline{OB_1} + \overline{A_1B_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 + \frac{\sqrt{15}}{2}a_2 = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2}a_2.$$

따라서

$$\overline{OA_2} = a_2 = \frac{2}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}. \quad (7)$$

<그림 2>와 같이 점 A_3 에서 선분 OA_2 에 내린 수선의 발을 B_2 라 하면,

$$\begin{aligned} \overline{OB_2} &= \overline{OA_3} \cdot \cos 15^\circ = a_3 \sqrt{1 - \sin^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{15}}{4}a_3, \\ \overline{A_3B_2} &= \overline{OA_3} \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{4}a_3. \end{aligned} \quad (8)$$



<그림 2>

$\overline{A_3B_2} = \overline{A_2A_3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \overline{A_2A_3}$ 이므로, (8)에 의하여 .

$$\overline{A_2A_3} = 2 \cdot \overline{A_3B_2} = \frac{1}{2} a_3. \quad (9) \quad \text{직}$$

각삼각형 $A_2A_3B_2$ 에 피타고라스의 정리를 적용하면 (8), (9)에 의하여

$$\overline{A_2B_2} = \sqrt{\overline{A_2A_3}^2 - \overline{A_3B_2}^2} = \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a_3 \text{ 이므로, (7), (8)에 의하여}$$

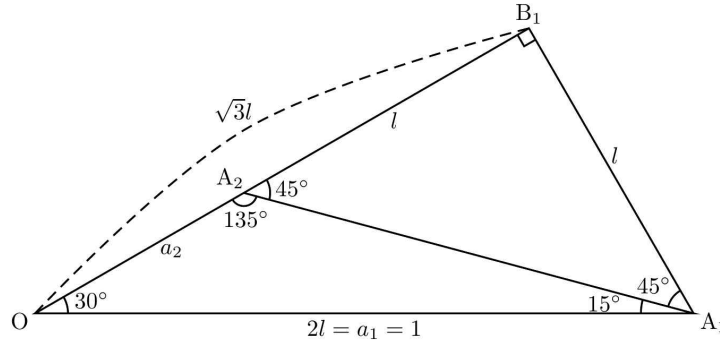
$$\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6} = \overline{OA_2} = \overline{OB_2} + \overline{A_2B_2} = \frac{\sqrt{15}}{4} a_3 + \frac{\sqrt{3}}{4} a_3 = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} a_3,$$

따라서

$$\overline{OA_3} = a_3 = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{3})^2}{18}. \quad (10)$$

[예시답안 3] $a_2 = \overline{OA_2}$, $a_3 = \overline{OA_3}$ 이라 하자. <그림 3>과 같이 점 A_1 에서 직선 OA_2 에 내린 수선의 발을 B_1 , 선분 A_1B_1 의 길이를 l 이라 하면,

$$\overline{OB_1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}l. \quad (11)$$



<그림 3>

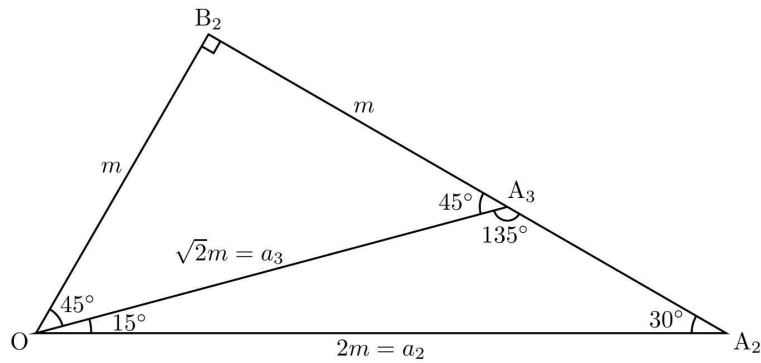
$\overline{A_2B_1} = \overline{A_1B_1} \cdot \tan 45^\circ = l$ 이므로 (11)에 의하여 $a_2 = \overline{OA_2} = \overline{OB_1} - \overline{A_2B_1} = (\sqrt{3} - 1)l$.

$1 = \overline{OA_1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\sin 30^\circ} = 2l$ 이므로 $l = \frac{1}{2}$. 따라서

$$a_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \quad (12)$$

<그림 4>와 같이 점 O에서 직선 A_2A_3 에 내린 수선의 발을 B_2 , 선분 OB_2 의 길이를 m 이라 하면,

$$a_3 = \overline{OA_3} = \frac{\overline{OB_2}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}m. \quad (13)$$



<그림 4>

$a_2 = \overline{OA_2} = \frac{\overline{OB_2}}{\sin 30^\circ} = 2m$ 이므로 (12)에 의하여 $m = \frac{a_2}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$. 따라서 (13)에

의하여

$$a_3 = \sqrt{2}m = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}. \quad (14)$$

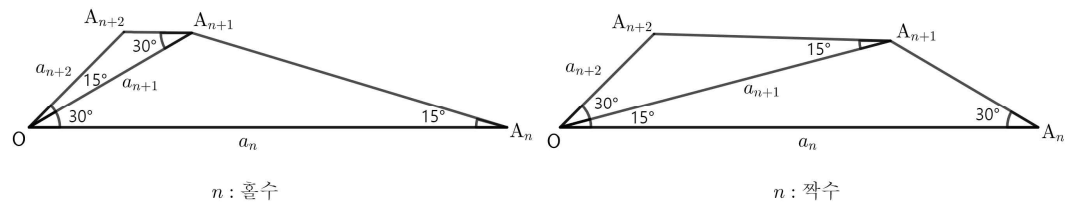
[문제 2-2]

[예시답안 1] 제시문의 조건 (다), (라)에 의하여, 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \angle A_{n+2}OA_{n+3} &= \angle OA_{n+1}A_{n+2} = \angle A_nOA_{n+1}, \\ \angle OA_{n+2}A_{n+3} &= \angle A_{n+1}OA_{n+2} = \angle OA_nA_{n+1} \end{aligned}$$

이므로, 조건 (가), (나)에 의하여 <그림 5>와 같이

$$\begin{aligned} \angle A_nOA_{n+1} &= 30^\circ, \quad \angle OA_nA_{n+1} = 15^\circ, & n: \text{홀수}, \\ \angle A_nOA_{n+1} &= 15^\circ, \quad \angle OA_nA_{n+1} = 30^\circ, & n: \text{짝수}. \end{aligned} \quad (15)$$



<그림 5>

따라서 삼각형 OA_nA_{n+1} 에 사인법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{\sin 15^\circ} &= \frac{a_n}{\sin 135^\circ}, & n: \text{홀수}, \\ \frac{a_{n+1}}{\sin 30^\circ} &= \frac{a_n}{\sin 135^\circ}, & n: \text{짝수} \end{aligned} \quad (16)$$

이므로,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} a_n, & n: \text{홀수}, \\ a_{n+1} &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} a_n, & n: \text{짝수}. \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 의하여

$$a_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_n = \frac{1}{4} a_n, \quad n: \text{자연수} \quad (18)$$

이고, $a_1 = \overline{OA_1} = 1$ 이므로,

$$\text{수열 } a_1, a_3, a_5, \dots \text{는 첫째항 } 1, \text{ 공비 } \frac{1}{4} \text{인 등비수열.} \quad (19)$$

(2)에 의하여 $a_2 = \overline{OA_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로, (17)에 의하여

$$\text{수열 } a_2, a_4, a_6, \dots \text{는 첫째항 } \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 공비 } \frac{1}{4} \text{인 등비수열.} \quad (20)$$

[예시답안 2] 제시문의 조건 (다), (라)에 의하여, 자연수 n 에 대하여

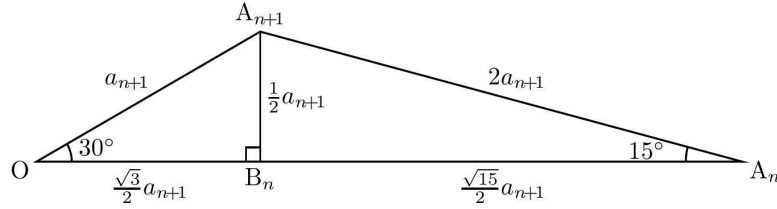
$$\begin{aligned} \angle A_{n+2}OA_{n+3} &= \angle OA_{n+1}A_{n+2} = \angle A_nOA_{n+1}, \\ \angle OA_{n+2}A_{n+3} &= \angle A_{n+1}OA_{n+2} = \angle OA_nA_{n+1} \end{aligned}$$

이므로, 조건 (가), (나)에 의하여 <그림 3>과 같이

$$\begin{aligned} \angle A_nOA_{n+1} &= 30^\circ, \quad \angle OA_nA_{n+1} = 15^\circ, & n: \text{홀수}, \\ \angle A_nOA_{n+1} &= 15^\circ, \quad \angle OA_nA_{n+1} = 30^\circ, & n: \text{짝수}. \end{aligned} \quad (21)$$

n 이 홀수라고 하자. <그림 6>과 같이 점 A_{n+1} 에서 선분 OA_n 에 내린 수선의 발을 B_n 이라 하면,

$$\begin{aligned} \overline{OB_n} &= \overline{OA_{n+1}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a_{n+1}, \\ \overline{A_{n+1}B_n} &= \overline{OA_{n+1}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} a_{n+1}. \end{aligned} \quad (22)$$



<그림 6> n : 홀수

$\overline{A_{n+1}B_n} = \overline{A_nA_{n+1}} \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{4} \overline{A_nA_{n+1}}$ 이므로, (22)에 의하여

$$\overline{A_nA_{n+1}} = 4 \cdot \overline{A_{n+1}B_n} = 2a_{n+1}. \quad (23) \quad \text{직}$$

각삼각형 $A_nA_{n+1}B_n$ 에 피타고라스의 정리를 적용하면 (22), (23)에 의하여

$\overline{A_nB_n} = \sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2 - \overline{A_{n+1}B_n}^2} = \sqrt{(2a_{n+1})^2 - \left(\frac{a_{n+1}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} a_{n+1}$ 이므로, (22)에 의하여

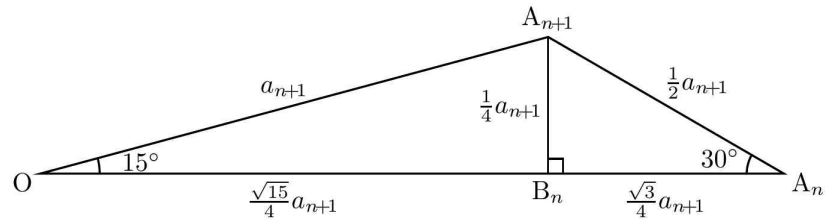
$$a_n = \overline{OA_n} = \overline{OB_n} + \overline{A_nB_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_{n+1} + \frac{\sqrt{15}}{2} a_{n+1} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2} a_{n+1}.$$

따라서

$$a_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} \cdot a_n = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6} a_n, \quad n: \text{홀수}. \quad (24)$$

n 이 짝수라고 하자. <그림 7>과 같이 점 A_{n+1} 에서 선분 OA_n 에 내린 수선의 발을 B_n 이라 하면,

$$\begin{aligned} \overline{OB_n} &= \overline{OA_{n+1}} \cdot \cos 15^\circ = a_{n+1} \sqrt{1 - \sin^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{15}}{4} a_{n+1}, \\ \overline{A_{n+1}B_n} &= \overline{OA_{n+1}} \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{4} a_{n+1}. \end{aligned} \quad (25)$$



<그림 7> n : 짝수

$\overline{A_{n+1}B_n} = \overline{A_nA_{n+1}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \overline{A_nA_{n+1}}$ 이므로, (25)에 의하여 .

$$\overline{A_nA_{n+1}} = 2 \cdot \overline{A_{n+1}B_n} = \frac{1}{2} a_{n+1}. \quad (26) \quad \text{직}$$

각삼각형 $A_nA_{n+1}B_n$ 에 피타고라스의 정리를 적용하면 (25), (26)에 의하여

$$\overline{A_nB_n} = \sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2 - \overline{A_{n+1}B_n}^2} = \sqrt{\left(\frac{a_{n+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_{n+1}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a_{n+1} \text{ 이므로, (25)에 의하여}$$

$$a_n = \overline{OA_n} = \overline{OB_n} + \overline{A_nB_n} = \frac{\sqrt{15}}{4} a_{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{4} a_{n+1} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} a_{n+1},$$

따라서

$$a_{n+1} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} \cdot a_n = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} a_n, \quad n: \text{짝수}. \quad (27)$$

(24), (27)에 의하여

$$a_{n+2} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \cdot a_n = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{3})^2}{18} a_n, \quad n: \text{자연수} \quad (28)$$

이고, $a_1 = \overline{OA_1} = 1$ 이므로,

$$\text{수열 } a_1, a_3, a_5, \dots \text{는 첫째항 } 1, \text{ 공비 } \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{3})^2}{18} \text{인 등비수열.} \quad (29)$$

(7)에 의하여 $a_2 = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}$ 이므로, (28)에 의하여

$$\text{수열 } a_2, a_4, a_6, \dots \text{는 첫째항 } \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}, \text{ 공비 } \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{3})^2}{18} \text{인 등비수열.} \quad (30)$$

[예시답안 3] 제시문의 조건 (다), (라)에 의하여, 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \angle A_{n+2}OA_{n+3} &= \angle OA_{n+1}A_{n+2} = \angle A_nOA_{n+1}, \\ \angle OA_{n+2}A_{n+3} &= \angle A_{n+1}OA_{n+2} = \angle OA_nA_{n+1} \end{aligned}$$

이므로, 조건 (가), (나)에 의하여 <그림 3>과 같이

$$\begin{aligned} \angle A_nOA_{n+1} &= 30^\circ, \quad \angle OA_nA_{n+1} = 15^\circ, & n: \text{홀수}, \\ \angle A_nOA_{n+1} &= 15^\circ, \quad \angle OA_nA_{n+1} = 30^\circ, & n: \text{짝수}. \end{aligned} \quad (31)$$

n 이 홀수라고 하자. <그림 8>과 같이 점 A_n 에서 직선 OA_{n+1} 에 내린 수선의 발을 B_n , 선분 A_nB_n 의 길이를 l 이라 하면,

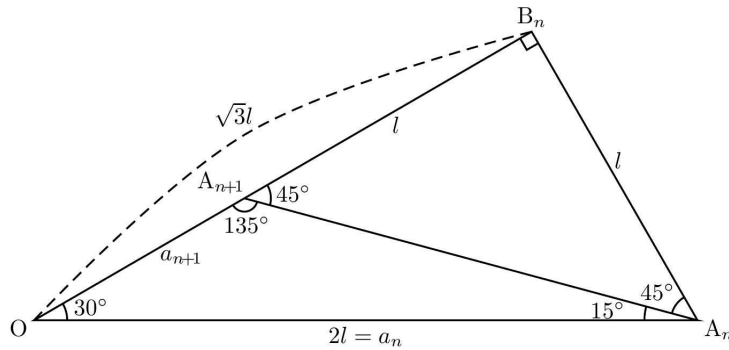
$$\overline{OB_n} = \frac{\overline{A_nB_n}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}l. \quad (32)$$

$\overline{A_{n+1}B_n} = \overline{A_nB_n} \cdot \tan 45^\circ = l$ 이므로 (32)에 의하여

$$a_{n+1} = \overline{OA_{n+1}} = \overline{OB_n} - \overline{A_{n+1}B_n} = (\sqrt{3} - 1)l. \quad a_n = \overline{OA_n} = \frac{\overline{A_nB_n}}{\sin 30^\circ} = 2l \text{이므로 } l = \frac{a_n}{2}.$$

따라서

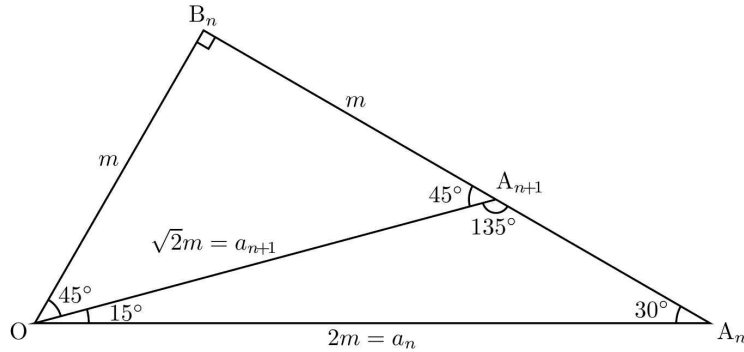
$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a_n, \quad n: \text{홀수}. \quad (33)$$



<그림 8> n : 홀수

n 이 짝수라고 하자. <그림 9>와 같이 점 O 에서 직선 A_nA_{n+1} 에 내린 수선의 발을 B_n , 선분 OB_n 의 길이를 m 이라 하면,

$$a_{n+1} = \overline{OA_{n+1}} = \frac{\overline{OB_n}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}m. \quad (34)$$



<그림 9> n : 짝수

$$a_n = \overline{OA_n} = \frac{\overline{OB_n}}{\sin 30^\circ} = 2m \text{ 이므로 } m = \frac{a_n}{2}. \text{ 따라서 (34)에 의하여}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2}m = \frac{\sqrt{2}}{2}a_n, \quad n: \text{ 짝수.} \quad (35)$$

(33), (35)에 의하여

$$a_{n+2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_n = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}a_n, \quad n: \text{ 자연수} \quad (36)$$

이고, $a_1 = \overline{OA_1} = 1$ 이므로,

$$\text{수열 } a_1, a_3, a_5, \dots \text{ 는 첫째항 } 1, \text{ 공비 } \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \text{ 인 등비수열.} \quad (37)$$

(12)에 의하여 $a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 이므로, (36)에 의하여

$$\text{수열 } a_2, a_4, a_6, \dots \text{ 는 첫째항 } \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \text{ 공비 } \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \text{ 인 등비수열.} \quad (38)$$

[문제 2-3]

[예시답안 1] 자연수 n 에 대하여 삼각형 OA_nA_{n+1} 의 넓이 T_n 은

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA_n} \cdot \overline{OA_{n+1}} \cdot \sin(\angle A_nOA_{n+1}) = \frac{1}{2}a_n \cdot a_{n+1} \cdot \sin(\angle A_nOA_{n+1})$$

이므로, (15), (17)에 의하여

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} a_n \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} a_n^2, & n: \text{홀수}, \\ T_n &= \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a_n \cdot \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{4} a_n^2 = \frac{\sqrt{2}}{16} a_n^2, & n: \text{짝수}. \end{aligned}$$

[문제 2-2]의 결과인 (19), (20)에 의하여, 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n-1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \quad a_{2n} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{이}$$

므로, 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} T_{2n-1} &= \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\}^2 = \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}, \\ T_{2n} &= \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\}^2 = \frac{\sqrt{2}}{128} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

(39)에 의하여 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \log_2 T_{2n-1} &= \log_2 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{16} \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} \right\} = -4n + \frac{1}{2}, \\ \log_2 T_{2n} &= \log_2 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{128} \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} \right\} = -4n - \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad (40)$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} \log_2 T_n &= \sum_{n=1}^N \log_2 T_{2n-1} + \sum_{n=1}^N \log_2 T_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^N \left(-4n + \frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^N \left(-4n - \frac{5}{2}\right) = \sum_{n=1}^N (-8n - 2) \\ &= -8 \cdot \frac{1}{2} N(N+1) - 2N = -4N^2 - 6N, \quad N: \text{자연수}. \end{aligned} \quad (41)$$

[예시답안 2]

자연수 n 에 대하여 삼각형 $OA_n A_{n+1}$ 의 넓이 T_n 은

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA_n} \cdot \overline{OA_{n+1}} \cdot \sin(\angle A_n O A_{n+1}) = \frac{1}{2} a_n \cdot a_{n+1} \cdot \sin(\angle A_n O A_{n+1})$$

이므로, (21), (24), (27)에 의하여

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6} a_n \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{24} a_n^2, & n: \text{홀수}, \\ T_n &= \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} a_n \cdot \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{24} a_n^2, & n: \text{짝수}. \end{aligned}$$

[문제 2-2]의 결과인 (29), (30)에 의하여, 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n-1} = 1 \cdot \left\{ \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18} \right\}^{n-1}, \quad a_{2n} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6} \cdot \left\{ \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18} \right\}^{n-1} \quad \text{이}$$

므로, 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} T_{2n-1} &= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{24} \cdot \left[\left\{ \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18} \right\}^{n-1} \right]^2 = \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^{4n-3}}{2^{2n+1}3^{4n-3}}, \\ T_{2n} &= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{24} \left[\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6} \left\{ \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18} \right\}^{n-1} \right]^2 \\ &= \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^{4n-1}}{2^{2n+3}3^{4n-1}}. \end{aligned} \quad (42)$$

(42)에 의하여 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \log_2 T_{2n-1} &= \log_2 \left\{ \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^{4n-3}}{2^{2n+1}3^{4n-3}} \right\} \\ &= (4n-3)\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3}) - (2n+1) - (4n-3)\log_2 3 \\ &= \{4\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3}) - 4\log_2 3 - 2\}n - \{3\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3}) - 3\log_2 3 + 1\} \\ &= \left(4\log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - 2\right)n - \left(3\log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} + 1\right), \\ \log_2 T_{2n} &= \log_2 \left\{ \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^{4n-1}}{2^{2n+3}3^{4n-1}} \right\} \\ &= (4n-1)\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3}) - (2n+3) - (4n-1)\log_2 3 \\ &= \{4\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3}) - 4\log_2 3 - 2\}n - \{\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3}) - \log_2 3 + 3\} \\ &= \left(4\log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - 2\right)n - \left(\log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} + 3\right). \end{aligned} \quad (43)$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{2N} \log_2 T_n &= \sum_{n=1}^N \log_2 T_{2n-1} + \sum_{n=1}^N \log_2 T_{2n} \\
 &= \sum_{n=1}^N \left\{ \left(4 \log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - 2 \right) n - \left(3 \log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} + 1 \right) \right\} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N \left\{ \left(4 \log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - 2 \right) n - \left(\log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} + 3 \right) \right\} \\
 &= 2 \cdot \left(4 \log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - 2 \right) \cdot \frac{1}{2} N(N+1) - \left(4 \log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} + 4 \right) N \\
 &= \left(4 \log_2 \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} - 2 \right) N^2 - 6N, \quad N: \text{자연수}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

[예시답안 3] 자연수 n 에 대하여 삼각형 $OA_n A_{n+1}$ 의 넓이 T_n 은

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA_n} \cdot \overline{OA_{n+1}} \cdot \sin(\angle A_n O A_{n+1}) = \frac{1}{2} a_n \cdot a_{n+1} \cdot \sin(\angle A_n O A_{n+1})$$

이므로, (31), (33), (35)에 의하여

$$\begin{aligned}
 T_n &= \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_n \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{8} a_n^2, & n: \text{홀수}, \\
 T_n &= \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a_n \cdot \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} a_n^2, & n: \text{짝수}.
 \end{aligned}$$

[문제 2-2]의 결과인 (37), (38)에 의하여, 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n-1} = 1 \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \right\}^{n-1}, \quad a_{2n} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \right\}^{n-1} \quad \text{이}$$

므로, 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned}
 T_{2n-1} &= \frac{\sqrt{3}-1}{8} \left[\left\{ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \right\}^{n-1} \right]^2 = \frac{2^{n-1}(\sqrt{3}-1)^{2n-1}}{2^{4n-1}}, \\
 T_{2n} &= \frac{\sqrt{2}}{16} \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \right\}^{n-1} \right]^2 = \frac{2^{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}-1)^{2n}}{2^{4n+2}}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

(45)에 의하여 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned}
 \log_2 T_{2n-1} &= \log_2 \left\{ \frac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1}}{2^{3n}} \right\} = (2n-1)\log_2(\sqrt{3}-1) - 3n \\
 &= \{2\log_2(\sqrt{3}-1) - 3\}n - \log_2(\sqrt{3}-1), \\
 \log_2 T_{2n} &= \log_2 \left\{ \frac{(\sqrt{3}-1)^{2n}}{2^{3n+\frac{5}{2}}} \right\} = 2n\log_2(\sqrt{3}-1) - \left(3n + \frac{5}{2}\right) \\
 &= \{2\log_2(\sqrt{3}-1) - 3\}n - \frac{5}{2}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{2N} \log_2 T &= \sum_{n=1}^N \log_2 T_{2n-1} + \sum_{n=1}^N \log_2 T_{2n} \\
 &= \sum_{n=1}^N [\{2\log_2(\sqrt{3}-1) - 3\}n - \log_2(\sqrt{3}-1)] + \sum_{n=1}^N \left[\{2\log_2(\sqrt{3}-1) - 3\}n - \frac{5}{2} \right] \\
 &= 2 \cdot \{2\log_2(\sqrt{3}-1) - 3\} \cdot \frac{1}{2}N(N+1) - \left\{ \log_2(\sqrt{3}-1) + \frac{5}{2} \right\}N \\
 &= \{2\log_2(\sqrt{3}-1) - 3\}N^2 + \left\{ \log_2(\sqrt{3}-1) - \frac{11}{2} \right\}N, \quad N: \text{자연수}.
 \end{aligned} \tag{47}$$