단국대학교 2023학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제
(오전)

전 형 명	논술우수자	모집단위	
수험번호		성　　명	

☑ 수험생 유의사항

1. 시험시간은 120분이며, 고사 종료시까지 퇴실할 수 없습니다. (중도퇴실할 경우 결시처리)
2. 문제번호와 답안번호가 반드시 일치하여야 합니다. (일치하지 않을 경우 0점 처리됨)
3. 문제별 답안작성란을 벗어나지 않게 작성하여야 합니다.
4. 답안 작성 시 인적사항 등 답안과 관련 없는 내용을 작성한 경우 0점처리 됩니다.
5. 답안은 반드시 **검정색 필기구**로 작성하시기 바랍니다.
   (연필, 샤프, 빨간색이나 파란색 필기구 사용금지)
6. 답안지는 교체가 불가하오니 원고지 교정부호 또는 수정테이프를 사용하여 수정하시기 바랍니다.
7. 연습지는 대학에서 제공하는 A4용지를 활용하시기 바랍니다.
8. 휴대폰 등 전자기기는 전원을 끄고 비닐백에 넣어 좌석 아래에 보관하시기 바랍니다. 고사 중에 벨소리, 진동, 알람 등의 소리가 울릴 경우 부정행위자로 간주하여 처리합니다.

※ 시험이 시작되기 전에는 표지를 넘기지 마십시오.

단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 • $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대 • $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소
(나) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \ (a \neq 0)$은 $\lvert r\rvert < 1$일 때 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$
(다) 미분가능한 함수 $t=g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(t)$가 α와 β를 양 끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$
(라) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

[논제 1]과 [논제 2]에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $(f(x)-3)(f(x)+3)(2f(x)-x^3+a^2x)=0$ (단, a는 상수이고 $a>0$)

[논제 1] 방정식 $f(x)=0$의 실근이 1개이고 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 24일 때, a의 값을 구하시오. (15점)

[논제 2] 실수 k에 대하여 직선 $y=a^2(x-k)$와 함수 $f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-2a)+f\left(-\dfrac{a}{2}\right)+f(2a)$의 값을 구하시오. (20점)

(1) $\displaystyle\lim_{k\to-\infty} g(k) - \lim_{k\to\infty} g(k) = 2$ (2) $g(-a)=3$ (3) $f(t)+f(-t)<0$인 실수 t가 열린구간 $(0, a)$에 존재한다. (4) $f(x)$가 미분가능하지 않은 모든 점의 x좌표 중 가장 작은 값은 -3

[논제 3] 자연수 n에 대하여

$$a_n = \frac{1}{4\pi}\int_{\pi^4}^{n^4\pi^4} \frac{\sin\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

일 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{a_{2n}}}{2^{a_{2n-1}}}$의 합을 구하시오. (20점)

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

- $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$는 증가
- $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$는 감소

(나) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$y'=f'(g(x))\,g'(x)$$

(다) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $f(x)$는 열린구간 $(-1,0)$에서 증가하고 열린구간 $(0,1)$에서 감소한다.
(2) $f(-1)+f(1)=0$
(3) $-1<x<1$인 모든 x에 대하여 $f''(x)<0$
(4) 닫힌구간 $[-1,1]$에서 곡선 $y=f(x)$와 두 점 $(-1,f(-1))$, $(1,f(1))$을 지나는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 3

[논제 1] 함수 $g(x)$를 $g(x)=\sin 2x$라 할 때, 자연수 n에 대하여 열린구간 $(0,n\pi)$에서 $\{f(g(x))\}'>0$을 만족시키는 모든 x의 집합을

$$\{x\,|\,t_1<x<t_2\}\cup\{x\,|\,t_3<x<t_4\}\cup\cdots\cup\{x\,|\,t_{2p-1}<x<t_{2p}\}$$

라 하자. (단, $t_1<t_2<t_3<\cdots<t_{2p}$)

$$\sum_{j=1}^{p}(t_{2j}-t_{2j-1})=\frac{5\pi}{2}$$

일 때, n의 값을 구하시오. (20점)

[논제 2] 함수 $h(x)$를 $h(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$ 라 할 때, 정적분

$$\int_{-1}^{1}\Big\{\,f(x)\cos x+h(x)\sin x\ln\cos x-f(x)\cos x\ln\cos x\,\Big\}\,dx$$

의 값을 구하시오. (25점)