[문항카드 1]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1교시 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	지수법칙, 귀류법, 조건부 확률, 정적분
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 귀류법

어떤 명제가 참임을 증명할 때, 주어진 명제의 결론을 부정하여 가정 또는 이미 알려진 수학적 사실 등에 모순됨을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

2. 조건부 확률

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

[1] 다음 물음에 답하시오.

(1) 실수 a에 대하여 $3^a=4$일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}$의 값을 구하시오. [5점]

(2) 귀류법을 이용하여 $\log_3 4$가 무리수임을 증명하시오. [5점]

[2] $-\pi \le x \le \pi$에서 방정식 $\cos^2 x-\sin x-x=0$을 만족시키는 실근의 개수를 구하시오. [9점]

[3] 어떤 데이터 조사에 따르면 이메일 중 스팸메일이 25%, 스팸메일 중 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있을 확률은 80%, 스팸메일이 아닌 이메일 중 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있을 확률은 30%라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 이메일에 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있고 스팸메일이 아닐 확률을 구하시오. [4점]

(2) 이메일에 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있을 확률을 구하시오. [5점]

(3) 이메일에 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있을 때, 이 이메일이 스팸메일일 확률을 구하시오. [6점]

[4] 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 아래 조건을 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

(ⅰ) $f(x)=g(x)+h(x)$ (ⅱ) $g(-x)=g(x)$, $h(-x)=-h(x)$

(1) 함수 $g(x)$와 $h(x)$를 $f(x)$와 $f(-x)$를 이용하여 나타내고, 위 조건이 만족됨을 보이시오. [6점]

(2) (1)을 이용하여 $\int_{-1}^{1} \frac{x}{(x+p)^2+1} dx = 0$이면 $p=0$임을 보이시오. (단, p는 실수) [10점]

3. 출제 의도

[1] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있는지를 판단한다. 귀류법을 이용하여 간단한 증명을 할 수 있는지를 판단한다.

[2] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는지를 판단한다.

[3] 확률의 덧셈정리와 곱셈정리 조건부 확률의 의미를 이해하고 활용할 수 있는지를 판단한다.

[4] 연속함수의 성질을 이해하고 정적분 값을 계산할 수 있는지를 판단한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 2 명제
	성취기준	[10수학03-07]대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
제시문2	교육과정	[확통] - (2) 확률 - 2 조건부 확률
	성취기준	[12확통02-05]조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 3 인수분해
	성취기준	[12수학Ⅰ01-03]지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 2 명제
	성취기준	[10수학03-07]대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
문항 [2]	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[확통] - (2) 확률 - 2 조건부 확률
	성취기준	[12확통02-07]확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[확통] - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용
	성취기준	[12확통02-03]확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [3](3)	교육과정	[확통] - (2) 확률 - 2 조건부 확률
	성취기준	[12확통02-05]조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
	성취기준	[12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	[미적] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-03]여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2022년	190
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021년	37
	미적분	이준열 외	천재교육	2021년	120
	확률과 통계	김원경 외	비상	2022년	67

5. 문항 해설

[1] (1) 지수법칙을 이용하여 주어진 조건을 포함하는 방식으로 식을 변형할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 귀류법을 이용하여 간단한 증명을 수행할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[2] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 그래프의 개형을 그려 근의 존재를 알 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3] (1) 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(3) 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[4] (1) 연속함수의 성질을 이용하고 주어진 조건을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 정적분의 값을 계산하는 것을 바탕으로 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1) 5점	$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}} = (3^a)^{-\frac{1}{4}}$이나 $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}} = 3^{-\frac{1}{4}\log_3 4}$을 얻으면	2
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$를 얻으면	3
[1](2) 5점	$\log_3 4$는 유리수라고 가정하고 $\log_3 4 = \frac{q}{p}$을 언급하면	2
	$\log_3 4 > 0$이므로 p, q가 자연수임을 언급하면	1
	3^q은 홀수이고 4^p은 짝수이므로 모순임을 언급하면	2
[2] 9점	$f(x) = \cos^2 x - \sin x = -\sin^2 x - \sin x + 1$ 나 $f(x) = \cos^2 x - \sin x - x$을 얻으면	2
	$f'(x) = 0$을 만족하는 $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$을 얻거나 일부 구간에서 $f(x) > 0$임을 올바로 얻으면	2
	제시된 주요 구간에서 함수의 증감표나 함숫값의 부호가 모두 올바르면	3
	근의 개수가 1개임을 제시하면	2

하위 문항	채점 기준	배점
[3](1) 4점	$\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B \mid A^C)$에 해당하는 수식을 올바로 제시하면	1
	$\frac{9}{40}$이나 0.225를 얻으면	3
[3](2) 5점	$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)$과 $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B)$에 해당하는 수식을 제시하면	2
	$\frac{17}{40}$이나 0.425를 얻으면	3
[3](3) 6점	$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에 해당하는 수식을 올바로 제시하면	2
	$\frac{8}{17}$이나 0.47을 올바로 제시하면	4
[4](1) 6점	$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$을 얻으면	3
	연립방정식을 풀어 $g(x), h(x)$를 얻었거나, $g(x), h(x)$가 조건을 만족함을 보인 경우	3
[4](2) 10점	$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 2\int_{0}^{1} g(x)dx$나 $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 0$을 언급하면	2
	$g(x) = -2p\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}$을 얻으면	2
	$\int_{-1}^{1} f(x)dx = -4p\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}dx$	4
	올바른 근거에 바탕해 $p = 0$을 얻으면	2

7. 예시 답안

[1]

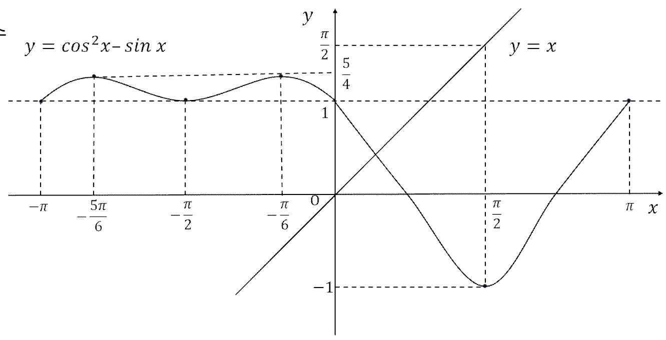
(1) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}=3^{-3\times\frac{a}{12}}=\left(3^{a}\right)^{-\frac{1}{4}}=4^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(다른 풀이) $a=\log_3 4$이므로 $p^{\log_p q}=q$를 이용하면 $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}=3^{-\frac{a}{4}}=3^{-\frac{1}{4}\log_3 4}=3^{\log_3\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\log_3 4$는 유리수라고 가정하자.
$\log_3 4>0$이므로 $\log_3 4=\dfrac{q}{p}$인 자연수 $p,\,q$가 존재한다.
$\log_3 4=\dfrac{q}{p} \Leftrightarrow 3^{\frac{q}{p}}=4$로부터 $3^{q}=4^{p}$을 얻는다.
3^{q}은 홀수이고 4^{p}은 짝수이므로 모순이다.
따라서 $\log_3 4$는 무리수이다.

[2]

주어진 방정식의 실근을 두 함수 $f(x)=\cos^2 x-\sin x$와 $y=x$의 교점으로 구한다.



$f(x)=\cos^2 x-\sin x=-\sin^2 x-\sin x+1$

$f'(x)=-2\sin x\cos x-\cos x=-\cos x(2\sin x+1)$

$f'(x)=0$을 만족하는 극값을 구하면

$\cos x=0$에서 $x=-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}$

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$에서 $x=-\dfrac{\pi}{6},\,-\dfrac{5\pi}{6}$

함수의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1	↗	1

$-\pi\le x\le\pi$에서, 그래프의 개형을 고려하면
두 함수 $f(x)=\cos^2 x-\sin x$와 $y=x$는 한점에서 만난다.
따라서 $-\pi\le x\le\pi$에서 방정식 $\cos^2 x-\sin x-x=0$은 1개의 실근을 갖는다.

(다른 풀이)
함수 $f(x)=\cos^2 x-\sin x-x$로 놓으면
$f(x)=-\sin^2 x-\sin x+1-x=-\sin x(1+\sin x)+1-x$
(i) $-\pi\le x\le 0$에서 $-\sin x(1+\sin x)\ge 0$이고 $1-x>0$이므로 $f(x)>0$
(ii) $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1-\dfrac{\pi}{2}<0$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$는 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

사잇값 정리에 의해 $0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $f(x) = 0$은 적어도 1개의 실근을 갖는다.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $f'(x) = -2\sin x\cos x - \cos x - 1 = -\sin(2x) - \cos x - 1 < 0$

따라서 $f(x)$는 $0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 감소하므로,

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $f(x) = 0$은 단 1개의 실근을 갖는다.

(iii) $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$에서 $-\sin x(1 + \sin x) \le 0$이고 $1 - x < 0$이므로 $f(x) < 0$

따라서 $-\pi \le x \le \pi$에서 방정식 $\cos^2 x - \sin x - x = 0$은 1개의 실근을 갖는다.

[3] 이메일이 스팸메일인 사건을 A, 스팸메일이 아닌 사건을 A^C,
이메일에 단어 '계좌'가 들어가 있을 사건을 B라고 하면

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A^C) = \frac{3}{4}$, $P(B|A) = \frac{4}{5}$, $P(B|A^C) = \frac{3}{10}$

(1) $P(A^C \cap B) = P(A^C)P(B|A^C) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{40}$

(2) $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$이므로

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{9}{40} = \frac{17}{40}$

(3)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{17}{40}} = \frac{8}{17}$$

(다른 풀이)

$P(A) = 0.25$, $P(A^C) = 0.75$, $P(B|A) = 0.8$, $P(B|A^C) = 0.3$

(1) $P(A^C \cap B) = P(A^C)P(B|A^C) = 0.75 \times 0.3 = 0.225$

(2) $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.25 \times 0.8 = 0.2$이므로

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = 0.2 + 0.225 = 0.425$

(3)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.425} = \frac{8}{17}$$

[4]

(1) 조건 (i)에 의해 $f(x) = g(x) + h(x)$ …… ①

조건 (ii)에 의해 $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ …… ②

①, ②를 연립하여 $g(x)$와 $h(x)$를 구하면

$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

따라서 $f(x) = g(x) + h(x)$

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$$

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{(x+p)^2+1}$ 라고 하자.

조건 (ⅱ)에 의해 $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 2\int_{0}^{1} g(x)dx$이고 $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 0$

그러므로

$$f(x) = g(x)+h(x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{x}{(x+p)^2+1} + \frac{-x}{(-x+p)^2+1}\right\} + h(x)$$

$$= \frac{x}{2}\frac{\{(-x+p)^2+1-(x+p)^2-1\}}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}} + h(x)$$

$$= -2p\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}} + h(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}\{g(x)+h(x)\}dx = 2\int_{0}^{1} g(x)dx$$

$$= -4p\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}dx$$

함수 $\dfrac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}$ 는 구간 $(0,\,1)$에서 양이므로 정적분 값은 0이 아니다.

그러므로 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$이면 $p = 0$이다.

[문항카드 2]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1교시 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	내분점, 근과 계수의 관계, 함수의 극값, 미분가능
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 좌표평면 위의 선분의 내분점

   두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여

   선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

2. 미분가능

   함수 $y=f(x)$에 대하여

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

   가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

3. 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정

   미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

   (1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

   (2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

[1] 아래 조건을 만족시키는 원에 대하여 다음 물음에 답하시오.

> 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 y축에 모두 접한다.
> 직선 $3x+4y-6=0$과 한 점에서 만난다.

(1) 위 조건을 만족시키는 모든 원의 반지름의 길이를 구하시오. [4점]

(2) 직선 $3x+4y-6=0$이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라고 할 때, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 P라고 하자. 점 P에서 위 조건을 만족하는 가장 작은 원에 접선을 그었을 때, 두 접선이 이루는 예각 θ에 대하여 $\sin\theta$ 값을 구하시오. [8점]

[2] 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근을 $\alpha, \beta\,(\alpha>\beta)$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $k\left(\alpha^5-\beta^5\right)=5$를 만족하는 실수 k의 값을 구하시오. [6점]

(2) 극한값 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}$을 구하시오. [8점]

[3] 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $k\ge\dfrac{1}{2}$)

$$f(x)=\frac{e^x}{kx^2+x+1}, \qquad g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0) \end{cases}$$

(1) 함수 $f(x)$의 극값을 구하시오. [10점]

(2) $x>0$에서 함수 $y=\dfrac{e^x}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$임을 보이시오. [7점]

(3) $x=0$에서 함수 $g(x)$의 미분가능성을 조사하시오. [7점]

3. 출제 의도

[1] 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있고 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해하여 문제를 해결하는 능력을 판단한다.

[2] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하고, 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 판단한다.

[3] 함수의 극값과 극한값을 구하고 미분가능성을 조사할 수 있는지 판단한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표
	성취기준	[10수학02-02]선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수
	성취기준	[12수학Ⅱ02-01]미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식
	성취기준	[10수학02-07]좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식
	성취기준	[10수학02-07]좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-08]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
문항 [2](2)	교육과정	[미적] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한
	성취기준	[12미적01-02]수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02]함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문항 [3](3)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수
	성취기준	[12수학Ⅱ02-01]미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2022년	133
	수학Ⅰ	김원경 외	비상	2021년	127
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021년	83
	미적분	이준열 외	천재교육	2021년	22

5. 문항 해설

[1] (1) 주어진 조건을 만족하는 원의 방정식을 쓰고 점과 직선 사이의 거리를 구하여 문제를 해결할 수 있다.

(2) 내분점을 구하고 삼각형의 변의 길이를 계산하여 삼각함수 값을 구할 수 있다.

[2] (1) 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 하여 해결할 수 있다.

(2) 공비가 1보다 작은 등비급수의 극한값이 0이 됨을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

[3] (1) 주어진 함수의 미분을 활용한 극대, 극소 판정을 적용하여 해결할 수 있다.

(2) (1)에서 찾은 성질을 활용하여 함수의 극한값을 계산할 수 있다.

(3) 미분의 정의에 따라 식을 쓰고 좌극한과 우극한을 따로 계산하여 해결할 수 있는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1) 4점	$a=3$ 또는 $a=\frac{1}{2}$을 얻으면	2
	위 값을 얻는 과정을 올바로 기술하였으면	2
[1](2) 8점	점 P의 좌표 $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$을 얻으면	2
	$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ 등 $\sin\theta$를 얻는데 필요한 유의미한 정보를 계산하면	2
	$\sin\theta=\frac{24}{25}$을 얻으면	4
[2](1) 6점	$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\alpha^2+\beta^2=3$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ 등 일부 올바른 계산을 수행하면	2
	$\alpha^5=5\alpha+3$을 얻거나 $\alpha^5-\beta^5=5\sqrt{5}$을 얻으면	2
	$k=\frac{\sqrt{5}}{5}$를 얻으면	2
[2](2) 8점	$\frac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}=\frac{\alpha^4-\beta^4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$을 얻으면	2

하위 문항	채점 기준	배점
	$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 이고 $\left\|\frac{\beta}{\alpha}\right\|<1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$을 제시하면	2
	$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}=\alpha^4$을 얻으면	2
	$\alpha^4=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ 을 얻으면	2
[3](1) 10점	$f'(x)=\frac{e^x x(kx-2k+1)}{(kx^2+x+1)^2}$ 을 얻으면	2
	$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2-\frac{1}{k}$을 얻으면	2
	$k=\frac{1}{2}$과 $k>\frac{1}{2}$을 구분하여 증감표 작성을 하면	3
	극댓값과 극솟값을 올바로 얻으면	3
[3](2) 7점	$y'(x)=\frac{2x^2e^x}{(x^2+2x+2)^2}$ 을 얻으면	2
	$e^x>\frac{1}{2}x^2+x+1>\frac{1}{2}x^2$을 얻으면	3
	$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$을 제시하면	2
[3](3) 7점	$x<0$일 때, $\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)}{x}=0$을 얻으면	3
	$x>0$일 때, $\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$을 얻으면	3
	두 사실을 종합하여 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다는 결론을 도출하면	1

7. 예시 답안

[1]

(1) 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $(a>0)$이라고 하면 점 (a,a)와 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리는 반지름 a와 같으므로

$$\frac{|3a+4a-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|7a-6|}{5}=a$$

이 식을 풀면 $a=3$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(2) 직선 $3x+4y-6=0$의 x절편, y절편은 각각 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}\left(0,\frac{3}{2}\right)$

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1\times0+2\times2}{1+2},\ \frac{1\times\frac{3}{2}+2\times0}{1+2}\right)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{2}\right)$$

조건을 만족하는 가장 작은 원의 방정식은 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

점 P에서의 원에 그은 두 접선 중 하나는 직선 $3x+4y-6=0$이고,

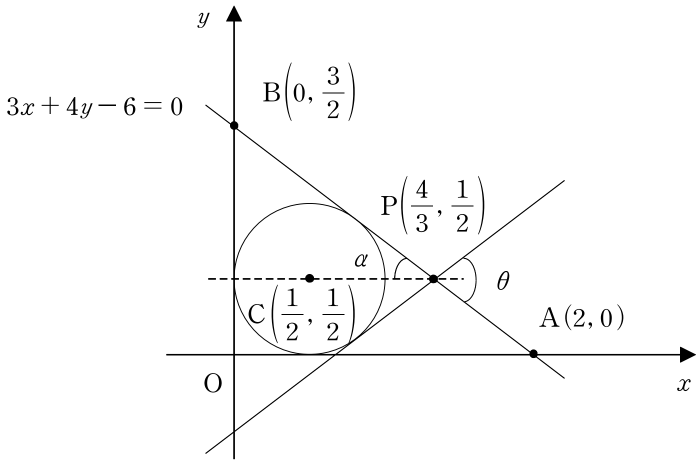
원의 중심 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$과 점 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right)$가 x축과 평행한 직선 위에 있으므로

선분 CP와 직선 $3x+4y-6=0$가 이루는 예각을 α라 하면

삼각형 OAB에서 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

점 P에서의 원에 그은 또 다른 접선과 선분 CP가 이루는 각도 α이므로
두 접선이 이루는 각 $\theta=2\alpha$

따라서 $\sin\theta=\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$

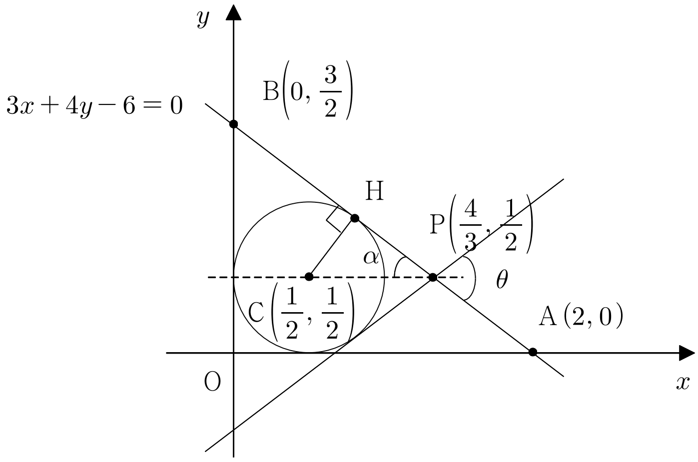


(다른 풀이)

원의 중심 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서

직선 $3x+4y-6=0$에 내린

수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{CP}} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+0} = \frac{5}{6}$

$\overline{\mathrm{CH}} = \frac{1}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}$

$\sin\alpha = \frac{\overline{CH}}{\overline{\mathrm{CP}}} = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{CP}}} = \frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta = \sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$

[2]

(1) 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근인 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$와 $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 다음 식들을 만족한다.

$\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$

이를 이용하면 다음을 얻는다.

$\alpha^5=(\alpha^2)^2\alpha=(\alpha+1)^2\alpha=\alpha(\alpha^2)+2\alpha^2+\alpha$

$=\alpha(\alpha+1)+2(\alpha+1)+\alpha=\alpha+1+4\alpha+2=5\alpha+3$

$k(\alpha^5-\beta^5)=k(5\alpha+3-5\beta-3)=5k(\alpha-\beta)=5k\sqrt{5}=5$

따라서 $k=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(다른 풀이)

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근인 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$와 $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 다음 식들을 만족한다.

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$, $\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3$

이를 이용하면 다음을 얻는다.

$\alpha^5-\beta^5=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)+\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)+\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)$

$=\sqrt{5}\{3-(-1)\}+\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

이로부터 $k(\alpha^5-\beta^5)=5k\sqrt{5}=5$

따라서 $k=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2) $\dfrac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}=\dfrac{\alpha^4-\beta^4\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}$

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 이고 $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}=\alpha^4$

$\alpha^2-\alpha-1=0$이므로 $\alpha^4=(\alpha+1)^2=\alpha+1+2\alpha+1=3\alpha+2=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

[3]

(1) $k>\dfrac{1}{4}$일 때 $kx^2+x+1>0$이므로 $k\geq\dfrac{1}{2}$에 대하여 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 미분가능하다.

함수의 몫의 미분법을 이용하면 $f'(x)=\dfrac{e^x x(kx-2k+1)}{(kx^2+x+1)^2}$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2-\dfrac{1}{k}$

(i) $k=\dfrac{1}{2}$일 때, $2-\dfrac{1}{k}=0$이므로 $f'(x)=\dfrac{2x^2e^x}{(x^2+2x+2)^2}$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변하지 않으므로 극값이 없다.

(ii) $k>\dfrac{1}{2}$일 때,

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\dfrac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	$\dfrac{e^{2-\frac{1}{k}}}{4k-1}$ 극소	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 1,

$x=2-\dfrac{1}{k}$ 에서 극소이고 극솟값은 $\dfrac{e^{2-\frac{1}{k}}}{4k-1}$

(2) $y'(x)=\dfrac{2x^2e^x}{(x^2+2x+2)^2}\geq 0$이므로

$y(x)$는 열린구간 $(0,\infty)$에서 증가하고

$y(x)>y(0)=1$

즉 $x>0$에서, $e^x>\dfrac{1}{2}x^2+x+1>\dfrac{1}{2}x^2$

그러므로 $0<\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{2}{x}$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$이므로

함수의 극한의 대소 관계를 이용하면 $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$이다.

(3) $g(0) = 0$이므로 극한 $g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$

$x < 0$일 때, $g(x) = 0$이므로 $\lim_{x \to 0-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{0}{x} = 0$ ……①

$x > 0$일 때, $t = \frac{1}{x}$라고 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to \infty$이므로

$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ ……②

따라서 ①과 ②로부터 $g'(0) = 0$이고 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 미분가능하다.

[문항카드 3]

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 / 2교시 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학 II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>일대일대응, 대칭이동, 판별식, 미분, 정적분</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">60분 / 전체 120분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 일대일대응
   함수 $f: X \to Y$에서 두 조건

   (1) 일대일함수이다. (2) 치역과 공역이 같다.

   를 모두 만족시킬 때, 함수 f를 일대일대응이라고 한다.

2. 직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동
   방정식 $f(x,y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,x)=0$

3. 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정
   미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서
   (1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
   (2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

[1] 두 집합 $A=\{x|x$는 6의 약수$\}$, $B=\{x|x$는 9 이하의 소수$\}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 집합 A에서 집합 B로의 일대일대응인 함수 $f(x)$는 $x \in A$에 대하여 $x < f(x)$를 만족시킨다. 함수 f의 개수와 $(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(2) 집합 A에서 집합 B로의 일대일대응인 함수 $g(x)$는 $x \in A$에 대하여 $x \leq g(x)$를 만족시킨다. 함수 g의 개수를 구하시오. [6점]

[2] 방정식 $y=-x^2+px+q$가 나타내는 도형과 그 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 접할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, p, q는 실수)

(1) p, q에 대한 관계식을 구하시오. [4점]

(2) 점 (p, q)가 그리는 도형과 그 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 만나는 점의 개수를 구하시오. [5점]

[3] 다음 물음에 답하시오.

(1) 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 아래 등식이 성립함을 보이시오. (단, a는 실수) [5점]

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

(2) 정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx$를 구하시오. [9점]

[4] 함수 $f(x) = -|x-a^2|(x+a^2)+a^4$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $a>0$)

(1) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [7점]

(2) $a \le x \le a+2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(a)$라고 할 때, 함수 $g(a)$를 구하고 함수 $g(a)$의 극값을 구하시오. [10점]

3. 출제 의도

[1] 조건제시법으로 주어진 집합을 원소나열법으로 나타낼 수 있는지를 평가한다. 집합 간에 일대일대응으로 주어진 함수의 조건을 파악하는 능력과 이를 활용하여 함수의 연산과 개수를 설명할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 이차함수의 그래프로 나타내는 도형과 이를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형 간에 접하는 문제 상황을 이차함수와 직선과의 관계로 파악할 수 있는 능력을 평가한다. 이차함수에 있어서 판별식을 이해하고 활용하여 이차함수와 직선의 위치 관계를 해결해나가는 과정의 능력을 평가한다.

[3] 치환적분법에 이해와 이를 활용하여 간단한 등식의 성립 여부를 설명할 수 있는 능력을 판단한다. 주어진 등식을 활용하여 정적분 값을 계산해나가는 과정을 설명할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] 절대값을 포함한 이차함수를 구간을 나누어 식을 다룰 수 있는 능력을 평가한다. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분으로 계산할 수 있는 능력을 평가한다. 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구하고 미분을 활용하여 극값을 계산하고 설명하는 능력을 판단한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (4) 함수 - 1 함수
	성취기준	[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
제시문2	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동
	성취기준	[10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.
제시문3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 1 집합 [수학] - (4) 함수 - 1 함수
	성취기준	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 1 집합 [수학] - (4) 함수 - 1 함수
	성취기준	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수 [수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동
	성취기준	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.

문항 [2](2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수 [수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동
	성취기준	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.
문항 [3](1)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2022년	61, 148, 207
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021년	88
	미적분	이준열 외	천재교육	2021년	147

5. 문항 해설

[1] (1) 주어진 두 집합을 원소나열법으로 나타내고 두 집합 간에 주어진 함수의 조건을 활용하여 일대일대응인 함수를 찾아내고 설명할 수 있는지를 묻는 문항이다. 찾아낸 함수의 정의에 따라 간단한 합성함수 값의 계산 능력을 묻는 문항이다.

(2) (1)과 같은 정의역과 치역에서 (1)과는 조금 다르게 주어진 함수의 조건을 활용하여 일대일대응인 함수를 모두 찾을 수 있는지를 묻는 문항이다.

[2] (1) 이차함수의 그래프로 나타내는 도형과 이를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 서로 접한다는 사실을 이차함수와 직선과의 위치 관계로 파악하여 판별식을 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

(2) (1)에서 구한 새로운 이차함수의 그래프로 나타나는 도형과 이를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 서로 접한다는 사실을 이차함수와 직선과의 위치 관계로 파악하여 판별식을 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3] (1) 치환적분법을 활용하여 등식이 성립 여부를 계산을 통해 설명할 수 있는지를 묻는 문항이다.

(2) (1)에서 얻은 등식을 활용하고 그 과정에서 삼각함수의 성질을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[4] (1) 절대값을 포함한 함수에서 구간을 나누어 이차함수를 구할 수 있는지를 묻는다. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 활용하여 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

(2) 변수를 포함한 구간을 조건에 맞게 나누어 조사하여 원하는 함수를 찾을 수 있는지를 묻는다. 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정을 알고 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1) 4점	$a < f(a)$ $(a \in A)$를 만족하는 일대일대응을 모두 찾으면	2
	$(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(5) = 3$의 값을 계산하면	2
[1](2) 6점	$a \leq f(a)$ $(a \in A)$를 만족하는 일대일대응의 관계를 모두 찾으면	4
	조건을 만족하는 경우의 수를 모두 찾으면	2
[2](1) 4점	도형이 직선 $y = x$와 접하는 것을 이용해 식 $x = -x^2 + px + q$을 구하거나, 점 A의 좌표 $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$를 구한 경우	2
	p, q에 대한 관계식 $(1-p)^2 + 4q = 0$이나 $p^2 - 2p - 3 + 4q = 0$을 구한 경우	2
[2](2) 5점	점 (p, q)가 그리는 도형의 방정식 $y = -\frac{1}{4}(1-x)^2$이나 $y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$을 구하면	2
	도형의 방정식을 연립하여 교점에 대한 식을 구하면	2
	두 도형이 만나는 점의 개수를 구하면	1
[3](1) 5점	함수의 변수를 $t = a - x$ 변수의 형태로 치환하면	2
	치환적분법을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보이면	3
[3](2) 9점	(1)의 관계를 이용하여 주어진 함수를 적절한 형태로 변형하면	3
	위의 결과를 이용하여 정적분을 적절히 전개하면	4
	정적분값 $\frac{\pi}{4}$을 구하면	2
[4](1) 7점	함수 $f(x)$를 2개의 구간 $x \geq a^2$과 $x < a^2$으로 나누면	2
	각 구간에서 함수 $f(x)$를 구하면	2
	도형의 넓이 $S = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)a^6$를 구하면	3
[4](2) 10점	함수 $f(x)$를 a에 대하여 3개의 구간으로 나누면	4
	각 구간에서 최댓값 함수 $g(a)$를 구하면	3
	함수 $g(a)$의 극솟값을 구하면	3

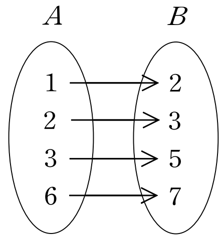
7. 예시 답안

[1]

(1) $a < f(a)$ $(a \in A)$를 만족하는 함수는

오직 $f(6)=7$, $f(3)=5$, $f(2)=3$, $f(1)=2$이므로

함수 f의 개수는 1개이다.



$$\left(f^{-1} \circ f \circ f^{-1}\right)(5) = \left(f^{-1} \circ f\right)\left(f^{-1}(5)\right) = \left(f^{-1} \circ f\right)(3)$$

$$= f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3$$

(다른 풀이)

$f \circ f^{-1} = I$ (항등함수)이므로

$\left(f^{-1} \circ f \circ f^{-1}\right)(5) = f^{-1}(5) = 3$

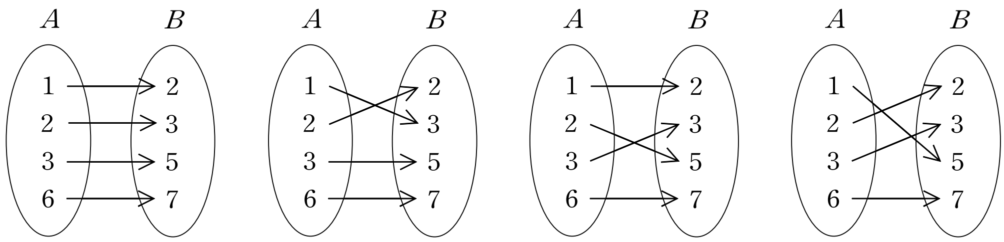
(2) $g(6)=7$

$g(3)=5$ 또는 $g(3)=3$이므로 2가지

$g(3)$의 각각의 경우에 대하여 $g(2)$는 남은 2개 원소 중 하나를 선택할 수 있다.

따라서 함수 g의 개수는 $2 \times 2 = 4$

(참고)



[2]

(1) 방정식 $y=-x^2+px+q$가 나타내는 도형이 직선 $y=x$와 접하는 경우, 방정식 $y=-x^2+px+q$가 나타내는 도형과 이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형은 서로 접한다.

$x=-x^2+px+q$이라 하면 $x^2+(1-p)x-q=0$의 판별식 $D=0$에서

$(1-p)^2+4q=0$

(다른 풀이)

곡선 $y=-x^2+px+q$의 접선의 기울기가 -1인 점 A가 직선 $y=x$상에 놓이는 경우,

방정식 $y=-x^2+px+q$가 나타내는 도형과 이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형은 점 A에서 접한다.

$\dfrac{dy}{dx}=-2x+p=-1$에서 $x=\dfrac{p+1}{2}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{p+1}{2}, \dfrac{p+1}{2}\right)$

점 A의 좌표를 방정식 $y=-x^2+px+q$에 대입하면

$\frac{p+1}{2}=-\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+p\left(\frac{p+1}{2}\right)+q$

이를 정리하면 $p^2-2p-3+4q=0$

(2) 점 (p,q)가 그리는 도형의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}(1-x)^2$ …… ①

이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}(1-y)^2$ …… ②

①과 ②의 교점은 두 함수의 그래프를 고려하면 ①과 $y=x$의 교점과 같다.

$x=-\frac{1}{4}(1-x)^2$ 라고 하면 $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$에서 $x=-1$

따라서 두 도형이 만나는 점은 1개이다.

(다른 풀이)

점 (p,q)가 그리는 도형의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$ …… ①

이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}(y-1)^2+1$ …… ②

①과 ②의 교점은 두 함수의 그래프를 고려하면 ①과 $y=x$의 교점과 같다.

$x=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$ 이라고 하면 $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$이므로 $x=1$ 또는 $x=-3$

따라서 두 도형이 만나는 점은 2개이다.

[3]

(1) $t=a-x$라고 하면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고

$x=0$일 때 $t=a$, $x=a$일 때 $t=0$이므로

정적분의 치환적분법을 이용하면

$$\int_0^a f(a-x)dx=-\int_a^0 f(t)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$$

(2) $a=\frac{\pi}{2}$와 $f(x)=\frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}$ 일 때

(1)의 등식을 이용하면 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2023}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^{2023}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^{2023}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2023}x}{\cos^{2023}x+\sin^{2023}x}dx$$

위 식으로부터

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx = \frac{\pi}{4}$

[4]

(1) (ⅰ) $x \ge a^2$ 일 때, 함수 $f(x) = -x^2+2a^4$

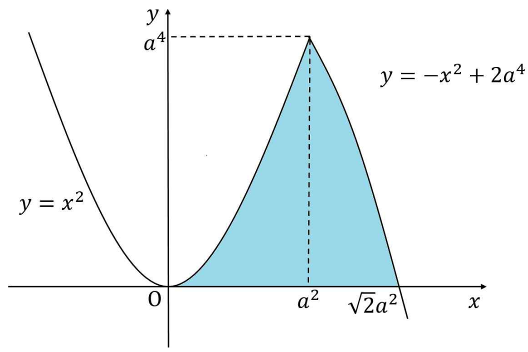
(ⅱ) $x < a^2$ 일 때, 함수 $f(x) = x^2$

(ⅰ)과 (ⅱ)로부터

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < a^2) \\ -x^2+2a^4 & (x \ge a^2) \end{cases}$$

곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인

도형의 넓이를 S라고 하면



$$S = \int_0^{a^2} x^2dx + \int_{a^2}^{\sqrt{2}a^2}(-x^2+2a^4)dx$$

$$= \frac{1}{3}a^6 + \left[-\frac{1}{3}x^3+2a^4x\right]_{a^2}^{\sqrt{2}a^2}$$

$$= \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{2}-2\right\}a^6 = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)a^6$$

(2) (ⅰ) $a+2 < a^2$ 일 때,

$a^2-a-2 = (a+1)(a-2) > 0$에서 $a < -1$, $a > 2$

a는 양수이므로 $a > 2$

최댓값 $g(a) = f(a+2) = (a+2)^2$

(ⅱ) $a \le a^2 \le a+2$ 일 때,

$a^2 - a = a(a-1) \ge 0$이면 $a \le 0$, $a \ge 1$ ⋯⋯ ①

$a^2-a-2 = (a+1)(a-2) \le 0$이면 $-1 \le a \le 2$ ⋯⋯ ②

a는 양수이므로 ①과 ②로부터 $1 \le a \le 2$

최댓값 $g(a) = f(a^2) = a^4$

(ⅲ) $a^2 < a$ 일 때, $0 < a < 1$

최댓값 $g(a) = f(a) = 2a^4 - a^2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)으로부터

$$g(a)=\begin{cases} 2a^4-a^2 & (0<a<1) \\ a^4 & (1 \le a \le 2) \\ (a+2)^2 & (a>2) \end{cases}$$

함수 $g(a)$는 $a>0$에서 연속이고 $a \ge 1$에서 증가하므로

$a \ge 1$에서 함수 $g(a)$는 극값을 갖지 않는다.

$0<a<1$에서 $g'(a)=8a^3-2a=2a(4a^2-1)=0$으로부터 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $g'(a)$의 부호가 음에서 양으로 변하므로

함수 $g(a)$의 극솟값은 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$

[문항카드 4]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 2교시 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 Ⅰ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	로그함수, 극한, 이산확률분표, 다항식, 나머지정리
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. 이산확률변수의 기댓값

이산확률변수 X의 확률분포가 $\mathrm{P}(X = x_i) = p_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n$$

3. 나머지정리

x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x - \alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면

$$R = P(\alpha)$$

[1] 함수 $f(x) = \log_{|a-2|}(x^2 + 2ax + 4a + 5)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, a는 실수)

(1) 함수 $f(x)$가 정의되기 위한 실수 a의 값 중 정수를 모두 구하시오. [5점]

(2) $x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $g(x) = \log_2(x^2 + 5)$, $h(x) = \sqrt{x}$ 라고 할 때, $(g \circ h)^{-1}(x) > \dfrac{6}{2^x}$ 를 만족하는 x값의 범위를 구하시오. [8점]

[2] 극한값 $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{3}} \left\{ (n^2+n)^{\frac{1}{3}} - (n^2+1)^{\frac{1}{3}} \right\}$ 을 구하시오. [8점]

[3] 자연수 n에 대하여 $x+y=n$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$를 만족시키고, 점 (x, y)의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 집합을 A_n이라고 하자. 집합 A_n에서 임의로 택한 한 점과 원점과의 거리의 제곱을

확률변수 X_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 집합 A_n에서 임의로 택한 한 점의 x좌표가 k일 때, 이 점과 원점과의 거리의 제곱을 구하시오. [4점]

(2) 확률변수 X_n의 기댓값을 구하시오. [8점]

[4] 모든 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$는 아래 조건을 만족시킨다. 다음 물음에 답하시오.

$$x\{f'(x)+x\}\{f'(x)-x\} = f(x)+px^3+qx^2 \quad (p,\ q\text{는 실수})$$

(1) 위 조건을 만족시키는 일차 이상의 다항식 $f(x)$를 구하고, 이때 실수 p, q의 값 또는 p, q에 대한 관계식을 구하시오. [12점]

(2) $p=0$일 때, (1)에서 구한 각각의 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-2023$으로 나눈 나머지들의 합을 구하시오. [5점]

3. 출제 의도

[1] 로그함수가 성립하기 위해서 밑과 진수 조건을 이해하고 있는지의 여부를 평가하고, 함수의 합성을 통해 지수 함수를 포함한 부등식을 유도하고 계산할 수 있는 문제 해결 능력을 평가한다.

[2] 극한값을 계산하려는 다항식에 곱셈공식을 활용하는 능력을 평가하고 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 극한값을 계산할 수 있는 문제 해결 능력을 평가한다.

[3] 이산확률변수가 가질 수 있는 값을 평면좌표에서 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 표현할 수 있는 능력을 평가한다. 이를 이용하여 이산확률변수의 기댓값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[4] 다항식의 차수를 비교할 수 있는 능력과 다항식의 사칙연산을 할 수 있는 능력을 평가한다. 이것을 토대로 주어진 조건을 만족시키는 다항식과 그 관계식을 유도할 수 있는 능력을 평가한다. 나머지정리를 활용하는 능력도 함께 평가한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표
	성취기준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[확률과통계] - (3) 통계 - 1 확률분포
	성취기준	[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 2 나머지정리
	성취기준	[10수학01-03] 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수
	성취기준	[12수학Ⅰ01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수
	성취기준	[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [2]	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 극한
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표
	성취기준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

문항 [3](2)	교육과정	[확률과 통계] - (3) 통계 - 1 확률분포
	성취기준	[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 2 나머지정리
	성취기준	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
문항 [4](2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 2 나머지정리
	성취기준	[10수학01-03] 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2022년	27, 100
	수학Ⅰ	최부림 외	천재교육	2021년	51
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2021년	87

5. 문항 해설

[1] (1) 로그함수가 성립하기 위한 밑과 진수 조건에 대한 이해를 묻는 문항이다.
(2) 합성함수를 통해 지수 함수를 포함한 부등식을 유도하고 치환을 통해 이를 해결할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[2] 극한값을 계산하고자 하는 다항식을 곱셈공식을 활용하여 다른 식으로 변형시키고, 그 변형된 식에 함수의 극한에 대한 성질을 적용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3] (1) 평면좌표에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) (1)에서 구한 식을 활용하여 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[4] (1) 주어진 조건을 만족시키는 다항식의 차수를 조사하고 그 다항식을 구할 수 있는지와 그 과정에서 관계식을 찾아낼 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 관계식을 이용하여 다항식을 확정하고 이에 나머지정리를 적용하여 나머지들의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1](1) 5점	진수의 조건에서 $-1 < a < 5$를 구하면	2
	밑의 조건에서 $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq 3$을 구하면	2
	두 조건을 만족하는 정수 $a=0$ 또는 $a=4$를 구하면	1
[1](2) 8점	합성함수 $(g \circ h)(x) = \log_2(x+5)$를 구하면	2
	역함수 $(g \circ h)^{-1}(x) = 2^x - 5$를 구하면	3
	부등식을 풀어 $x > \log_2 6$을 구하면	3
[2] 8점	3차 항등식 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하여 식을 전개하면	3
	극한값 $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{3}} \left\{ (n^2+n)^{\frac{1}{3}} - (n^2+1)^{\frac{1}{3}} \right\} = \frac{1}{3}$을 구하면	5
[3](1) 4점	점의 좌표 $(k, n-k)$를 구하면	2
	원점과의 거리의 제곱 $2k^2 - 2nk + n^2$을 구하면	2
[3](2) 8점	확률변수 X_n의 확률 $\frac{1}{n+1}$을 구하면	3
	기댓값 $\mathrm{E}(X_n)$의 식을 구하면	2
	기댓값 $\mathrm{E}(X_n) = \frac{n(2n+1)}{3}$을 구하면	3
[4](1) 12점	다항식 $f(x)$의 차수의 조건을 구하면	3
	$f(x)$가 1차식일 때 p, q의 값과 $f(x)$를 구하면	4
	$f(x)$가 2차식일 때 p, q의 관계식과 $f(x)$를 구하면	5
[4](2) 5점	$p=0$일 때 다항식 $f(x)$를 모두 구하면	2
	나머지정리를 이용하여 나머지들의 합 $\sum_{i=1}^{4} f_i(2023) = 4046$을 구하면	3

7. 예시 답안

[1]

(1) 진수의 조건에서 $x^2+2ax+4a+5>0$이므로

판별식 $D=4a^2-4(4a+5)=4a^2-16a-20=4(a+1)(a-5)<0$에서

$-1<a<5$ …… ①

밑의 조건에서 $|a-2|>0$, $|a-2|\neq 1$이므로 $a\neq 1$, $a\neq 2$, $a\neq 3$ …… ②

①과 ②에서 $a=0$ 또는 $a=4$

(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(\sqrt{x})=\log_2(x+5)$에서

$(g\circ h)^{-1}(x)=2^x-5$

$2^x-5>6\times 2^{-x}$에서 $2^x=X$라 하면

$X^2-5X-6=(X+1)(X-6)>0$이므로 $X<-1$ 또는 $X>6$

$X>0$ 이므로 $X=2^x>6$에서 $x>\log_2 6$

[2]

실수 a, b에 대하여 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$임을 이용하여 극한값을 구하면

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left\{(n^2+n)^{\frac{1}{3}}-(n^2+1)^{\frac{1}{3}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}(n-1)}{(n^2+n)^{\frac{2}{3}}+(n^2+n)^{\frac{1}{3}}(n^2+1)^{\frac{1}{3}}+(n^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}$$

[3]

(1) $x+y=n$ 이므로 $x=k$이면 $y=n-k$

따라서 점의 좌표는 $(x, n-k)$

원점에서 점 $(k, n-k)$까지 거리의 제곱은 $k^2+(n-k)^2=2k^2-2nk+n^2$

(2) 집합 A_n의 원소의 개수는 $n+1$이고, 각 점이 선택될 확률은 모두 $\frac{1}{n+1}$로 같으므로

기댓값 $\mathrm{E}(X_n)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k^2-2nk+n^2)=\frac{n^2}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2nk+n^2)$

$$=\frac{n^2}{n+1}+\frac{1}{n+1}\left\{2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2n\frac{n(n+1)}{2}+n^3\right\}=\frac{n(2n+1)}{3}$$

[4]

(1) $f(x)$를 n차 다항식이라고 하자. (단, $n \geq 1$)

$n \geq 3$이면 조건식 좌변의 차수는 $2n-1$, 우변의 차수는 n으로 좌변과 우변의 차수는 같지않다.

따라서 $f(x)$는 3차 이상의 다항식이 아니다.

(i) $f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$라고 하고 조건식에 대입하면

$x(a^2 - x^2) = ax + b + px^3 + qx^2$

계수를 비교하면

$p = -1,\ q = 0,\ a^2 = a,\ b = 0$

여기서 $a(a-1) = 0$이고 $a \neq 0$이므로 $a = 1$

따라서 $p = -1,\ q = 0$이고 $f(x) = x$

(ii) $f(x) = rx^2 + sx + t\ (r \neq 0)$라고 하고 조건식에 대입하면

$(4r^2 - 1)x^3 + 4rsx^2 + s^2x = px^3 + (q+r)x^2 + sx + t$

계수를 비교하면

$4r^2 - 1 = p,\ 4rs = q + r\ \ s^2 = s,\ t = 0$

여기서 $s(s-1) = 0$이므로 $s = 0,\ 1$

① $s = 0$이면

$r = -q\ \ (q \neq 0),\ p = 4q^2 - 1$

따라서 $p = 4q^2 - 1\ \ (q \neq 0),\ f(x) = -qx^2$

② $s = 1$이면

$r = \frac{q}{3}\ \ (q \neq 0),\ p = \frac{4}{9}q^2 - 1$

따라서 $p = \frac{4}{9}q^2 - 1\ \ (q \neq 0),\ f(x) = \frac{q}{3}x^2 + x$

(2) (1)의 결과에 따라

$p = 4q^2 - 1\ \ (q \neq 0),\ f(x) = -qx^2$ ...... ①

$p = \frac{4}{9}q^2 - 1\ \ (q \neq 0),\ f(x) = \frac{q}{3}x^2 + x$ ...... ②

$p = 0$을 대입하면 ①과 ②로부터 각각

$q = \pm\frac{1}{2},\ f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2,\ f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$

$q = \pm\frac{3}{2},\ f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + x,\ f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$

나머지정리를 적용하면 $\sum_{i=1}^{4} f_i(2023) = 4046$