[문항카드 5]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 I
	핵심개념 및 용어	등차수열, 일반항, 로그
예상 소요 시간	8분	

2. 문항 및 제시문

1. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2n(n+2)$인 수열이다. 이때 이 수열의 일반항 a_n을 구하고 이를 이용해 부등식 $a_n \le 54 + \log 128$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [40점]

3. 출제 의도

1. 등차수열의 뜻, 첫 항부터 n항까지의 합에 대한 이해를 묻는다.
2. 로그의 뜻과 기본적인 성질에 대한 이해를 묻는다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1	[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 11인	지학사	2021	117-124
	수학 I	김원경 외 14인	비상교육	2021	23-28

5. 문항 해설

등차 수열의 제n항까지의 합을 이용해 일반항을 구하고 로그의 성질을 이용해 주어진 부등식을 만족하는 n의 가장 큰 값을 찾는다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$n>1$이면 $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n+2$ 를 구함	20점
	$\log 100 = 2 < \log 128 < \log 1000 = 3$이므로 $\log 128 = 2.\cdots$ 를 구함	10점
	$4n \le 52+\log 128 \le 52+2.\cdots$ 또는 $4n \le 52+7\log 2 \le 52+2.\cdots$ 를 구함	5점
	n의 최대값이 13임을 구함.	5점

7. 예시 답안

$a_1 = S_1 = 6$ 이고 $n>1$이면 $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n+2$이다.
$\log 100 = 2 < \log 128 < \log 1000 = 3$이므로 $\log 128 = 2.\cdots$이다.
$4n \le 52+\log 128 \le 52+2.\cdots$ 이다.
따라서, n의 최댓값은 13이다.

[문항카드 6]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심개념 및 용어	지수함수, 로그함수, 역함수
예상 소요 시간	8분	

2. 문항 및 제시문

2. 두 함수 $f(x)=\log_4(x-2)+3$, $g(x)=2^{ax-6}+b$가 있다. 2보다 큰 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [40점]

3. 출제 의도

지수함수와 로그함수는 역함수 관계임을 이용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
2	[10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. [12수학 I 01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2021	227-230
	수학	홍성복 외 10인	지학사	2021	228-231
	수학 I	권오남 외 14인	교학사	2021	46-64
	수학 I	고성은 외 6인	신사고	2020	40-51

5. 문항 해설

주어진 두 함수가 역함수 관계임을 파악하고, 이를 이용하여 상수 a, b를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 역함수임을 확인 함	10점
	a=2 를 구함	10점
	b=2 를 구함	10점
	$a+b$=4 를 구함	10점

7. 예시 답안

함수 $f(x)$는 밑이 1보다 큰 로그함수이고, 함수 $g(x)$는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 함수 $f(x)$와 2보다 큰 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다, $y = \log_4(x-2)+3$의 역함수를 구하면,

$$y-3 = \log_4(x-2) \Leftrightarrow x = 2^{2(y-3)}+2$$

이므로 x,y를 서로 바꾸면, $y = 2^{2(x-3)}+2 = g(x) = 2^{ax-6}+b$

$\therefore a=2, b=2 \Rightarrow a+b=4$

[문항카드 7]

1. 일반 정보

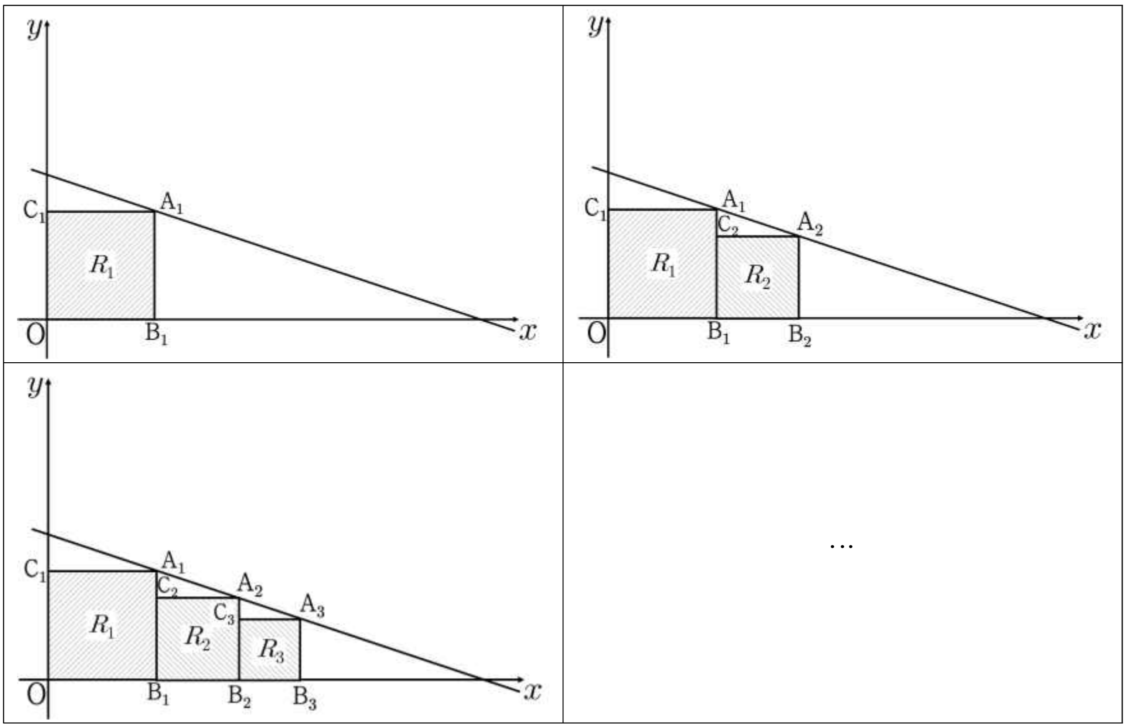
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 3번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	등비수열, 등비급수
예상 소요 시간	8분	

2. 문항 및 제시문

3. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2-\frac{x}{3}$ 위의 점 A_n은 제1사분면에 있는 점이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> <가> A_1에서 x축에 내린 수선의 발을 B_1, y축에 내린 수선의 발을 C_1이라 할 때, 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{OC}_1$은 정사각형이다.
>
> <나> $n \geq 2$일 때, A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 B_n, 선분 $\mathrm{A}_{n-1}B_{n-1}$에 내린 수선의 발을 C_n이라 할 때, 사각형 $\mathrm{A}_nB_nB_{n-1}C_n$은 정사각형이다.

이때 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{OC}_1$을 R_1이라 하고, $n \geq 2$일 때 사각형 $\mathrm{A}_nB_nB_{n-1}C_n$을 R_n이라 하자.



R_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오. [40점]

3. 출제 의도

1. 조건을 만족하는 점들의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 등비수열로 표현할 수 있는지를 평가한다.
2. 무한 등비급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
3	[12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-07] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12미적 01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. [12미적 01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	이준열 외 6인	천재교육	2021	131-137
	수학Ⅰ	홍성복 외 10인	지학사	2021	125-131
	미적분	고성은 외 5인	신사고	2020	32-36
	미적분	김원경 외 14인	비상	2020	32-36

5. 문항 해설

규칙을 만족하는 점들과 정사각형의 넓이를 구하는 방법을 이용하여 넓이를 등비수열로 나타내고, 무한 등비급수의 합을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$b_1 = c_1 = \dfrac{3}{2}$ 를 구함	5점
	$c_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{b_{n-1}}{4}$ 를 구함 $b_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3b_{n-1}}{4}$ 를 구함 $b_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}$ 을 구함 $c_n = \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ 을 구하고, $a_n = c_n^2 = \dfrac{9}{4} \times \left(\dfrac{9}{16}\right)^{n-1}$ 을 구함. 또는 다른 방법으로 일반항 $a_n = \dfrac{9}{4} \times \left(\dfrac{9}{16}\right)^{n-1}$ 을 구함. (또는 첫항과 공비를 구함)	30점
	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{4} \times \left(\dfrac{9}{16}\right)^{n-1} = \dfrac{36}{7}$ 을 구함.	5점

7. 예시 답안

A_n의 좌표를 (b_n, c_n)이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{OC}_1$의 넓이는 $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1} \times \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1} = \mathrm{b}_1\mathrm{c}_1$이고 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{OC}_1$은 정사각형이므로 $b_1 = c_1$이다. 따라서 A_1은 $y = x$위의 점이므로

$$b_1 = 2 - \frac{b_1}{3} \ \Rightarrow \ b_1 = \frac{3}{2} = c_1$$

이다.

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n$이 정사각형이므로 $2 - \frac{b_n}{3} = c_n$이고, $b_n - b_{n-1} = c_n$이다. 따라서

$$\begin{aligned} c_n = 2 - \frac{c_n + b_{n-1}}{3} \ &\Rightarrow \ \frac{4c_n}{3} = 2 - \frac{b_{n-1}}{3} \\ &\Rightarrow \ c_n = \frac{3}{2} - \frac{b_{n-1}}{4}, \ \ b_n = \frac{3}{2} + \frac{3b_{n-1}}{4} \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{3}{2} + \frac{3b_{n-1}}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{3b_{n-2}}{4}\right) + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{3}{2} + 3\frac{b_{n-3}}{4}\right) \\ &= \cdots = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $c_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이다.

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n$은 정사각형이므로 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_n$의 넓이 a_n은

$$a_n = c_n^2 = \frac{9}{4} \times \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$$

이다. 그러므로 주어진 사각형의 넓이의 합은 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{4} \times \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1} = \dfrac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{36}{7}$ 이다.

[문항카드 8]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 4	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	극한, 미분, 로그함수
예상 소요 시간	8분	

2. 문항 및 제시문

4. 함수 $f(x) = ax\ln x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(e+2h) - f(e-2h)}{h} = 8$일 때, a의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [40점]

3. 출제 의도

미분에 개념에 대한 이해를 묻는다. 다항함수와 로그함수의 미분 계산을 묻는다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
4	[12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학II02-04] 함수 $y = x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. [12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	배종숙 외 6인	금성	2020	64-69
	수학 II	권오남 외 14인	교학사	2021	54-62
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2021	57-60
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2021	60-62

5. 문항 해설

주어진 함수의 극한을 e에서 $f(x)$에서 미분의 합이 되도록 변형한다. $f(x)$의 미분을 계산에 상수 a를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
–	$\lim_{h \to 0} \frac{f(e+2h)-f(e-2h)}{h} = 4f'(e)$임을 구함	20점
	$f'(x) = a + a\ln x + x^3 + x^2$임을 구함	15점
	$a = \frac{2-e^3-e^2}{2}$ 임을 구함	5점

7. 예시 답안

$\lim_{h \to 0} \frac{f(e+2h)-f(e-2h)}{h}$

$= 2 \times \lim_{h \to 0} \frac{f(e+2h)-f(e)}{2h} + 2 \times \lim_{h \to 0} \frac{f(e-2h)-f(e)}{-2h}$

$= 4f'(e)$

따라서 $f'(e) = 2$

$f(x) = ax\ln x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$이므로

$f'(x) = a + a\ln x + x^3 + x^2$

따라서 $2a + e^3 + e^2 = 2$이므로

$a = \frac{2-e^3-e^2}{2}$

[문항카드 9]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 5	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 연속, 미적분학의 기본정리, 미분, 적분
예상 소요 시간	17분	

2. 문항 및 제시문

1. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$가 연속이고

$f(x) = \cos x - x + \int_0^x f'(t)\sin^2 t\,dt$ 일 때, $f(x)$를 구하시오. [50점]

3. 출제 의도

정적분과 미분의 관계와 부정적분의 성질을 이용하여 항등식을 만족시키는 함수를 구하는 문제이다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
5	[12수학II 03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2021	121-126
	수학 II	류희찬 외 12인	천재교과서	2021	122-130
	미적분	김원경 외 14인	비상	2020	134-137
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2021	127-133

5. 문항 해설

정적분과 미분의 관계를 이용하여 도함수를 구하고, 부정적분을 통해 함수를 찾는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$f(0)=1$을 구함.	5점
	$f'(x)=-\sin x-1+f'(x)\sin^2 x$ 또는 $(1-\sin^2 x)f'(x)=-\sin x-1$를 구함. 또는 $f'(x)=\dfrac{-1}{1-\sin x}$ 를 구함	5점
	$f'(x)=-\sec x\tan x-\sec^2 x$를 구함.	10점
	$f(x)=-\sec x-\tan x+C$를 구함.	20점
	$C=2$를 구함.	5점
	$f(x)=-\sec x-\tan x+2$를 구함.	5점

7. 예시 답안

주어진 식에 $x=0$을 대입해 $f(0)=\cos 0-0+0=1$라는 사실을 알 수 있다.

주어진 식을 x에 대하여 미분하여 정리한다.

$$f'(x)=-\sin x-1+f'(x)\sin^2 x$$
$$\Rightarrow (1-\sin^2 x)f'(x)=-\sin x-1$$
$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=-\sec x\tan x-\sec^2 x$$

위 식을 적분하면 $f(x)=-\sec x-\tan x+C$ (단, C는 적분상수이다.) 를 알 수 있다.

$f(0)=1$ 이므로 $C=2$이다.

$\therefore f(x)=-\sec x-\tan x+2$ 이다.

[문항카드 10]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 6	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분가능한 함수, 역함수, 음함수
예상 소요 시간	12분	

2. 문항 및 제시문

1. $0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> <가> $3f'(x)\{f(x)\}^2\cos x = 1 + \{f(x)\}^3\sin x$
>
> <나> $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$
>
> <다> $f(x)$의 역함수가 존재하고, 그 역함수는 미분가능하다.

함수 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오. [45점]

3. 출제 의도

역함수의 정의와 성질을 이용하여 역함수의 미분계수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
6	[10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외 6인	신사고	2021	217-220
	수학	권오남 외 14인	교학사	2021	223-226
	미적분	고성은 외 5인	신사고	2020	89-90
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2021	97-101

5. 문항 해설

항등식과 주어진 조건을 이용하여 역함수의 미분 계수를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$f'(x)=\dfrac{1+(f(x))^3\sin x}{(f(x))^2 3\cos x}$ 를 구함.	5점
	$f'(g(x))=\dfrac{1+(f(g(x)))^3\sin(g(x))}{(f(g(x)))^2 3\cos(g(x))}=\dfrac{1+x^3\sin(g(x))}{3x^2\cos(g(x))}$ 를 구함.	10점
	$\dfrac{1}{g'(x)}=\dfrac{1+x^3\sin(g(x))}{3x^2\cos(g(x))}$ 를 구함.	10점
	$\dfrac{1}{g'(2)}=\dfrac{1-2^3\sin(g(2))}{3\cos(g(2))2^2}=\dfrac{1-8\sin(\frac{\pi}{4})}{3\cos(\frac{\pi}{4})\cdot 4}$ 를 구함.	10점
	$\therefore\ g'(2)=\dfrac{6(8-\sqrt{2})}{31}$ 또는 $\dfrac{48-6\sqrt{2}}{31}$ 또는 $\dfrac{6}{1+4\sqrt{2}}$ 를 구함.	10점

7. 예시 답안

$$f'(x)=\frac{1+(f(x))^3\sin x}{(f(x))^2 3\cos x}$$

$$f'(g(x))=\frac{1+(f(g(x)))^3\sin(g(x))}{(f(g(x)))^2 3\cos(g(x))}=\frac{1+x^3\sin(g(x))}{3x^2\cos(g(x))}$$

$f'(g(x))=\dfrac{1}{g'(x)}$ 이므로 $\dfrac{1}{g'(x)}=\dfrac{1+x^3\sin(g(x))}{3x^2\cos(g(x))}$ 이다.

$$\frac{1}{g'(2)}=\frac{1-2^3\sin(g(2))}{3\cos(g(2))2^2}=\frac{1-8\sin(\frac{\pi}{4})}{3\cos(\frac{\pi}{4})\cdot 4}$$

$$=\frac{1+8\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{1+4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$$

$\therefore\ g'(2)=\dfrac{6(8-\sqrt{2})}{31}$ 또는 $\dfrac{48-6\sqrt{2}}{31}$

별해.

$g'(2) = \dfrac{1}{f'(g(2))}$

<가>에 의해,

$3f'(g(x))\{f(g(x)\}^2\cos(g(x)) = 1 + \{f(g(x))\}^3\sin(g(x))$

$\Rightarrow 3x^2 f'(g(x))\cos(g(x)) = 1 + x^3\sin(g(x))$

$\Rightarrow 12f'(g(2))\cos(g(2)) = 1 + 8\sin(g(2))$

$\Rightarrow 6f'(g(2)) = 1 + 4\sqrt{2}$

$\therefore\ f'(g(2)) = \dfrac{1+4\sqrt{2}}{6}$

$\Rightarrow g'(2) = \dfrac{6}{1+4\sqrt{2}} = \dfrac{48-6\sqrt{2}}{31}$

[문항카드 11]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 7번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	내분점, 다항함수, 정적분, 입체도형의 부피
예상 소요 시간	12분	

2. 문항 및 제시문

5. 좌표평면 위의 x좌표가 같은 두 점 $\mathrm{A}(x, x^2)$과 $\mathrm{B}(x, x-2)$에 대하여 두 점 P와 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> <가> P는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이고, P의 x좌표는 a, y좌표는 $f(a)$이다.
>
> <나> Q는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이고, Q의 x좌표는 b, y좌표는 $g(b)$이다.

두 곡선 $y=-3f(x)$와 $y=3g(x)$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오. [45점]

3. 출제 의도

1. 좌표평면 위의 두 점의 내분점을 구할 수 있는지 평가한다.
2. 두 다항함수로 둘러싸인 영역을 찾을 수 있는지 평가한다.
3. 두 함수로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 모양을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
7	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. [12수학II03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외 9인	천재교육	2021	62-71
	수학	배종숙 외 6인	금성	2021	22-40 116-119
	수학 Ⅱ	홍성복 외 10인	지학사	2021	131-135
	수학 Ⅱ	권오남 외 14인	교학사	2021	134-136
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2021	172-175
	미적분	고성은 외 5인	신사고	2020	157-158

5. 문항 해설

좌표평면 위의 두 점에 대하여 내분점을 구하고, 그 내분점의 y좌표를 함수식으로 하는 두 다항함수를 찾는다. 이때, 찾은 다항함수를 이용하여 두 그래프로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형의 부피를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
–	$f(x)=\dfrac{2x^2+x-2}{3}$ 또는 $f(a)=\dfrac{2a^2+a-2}{3}$를 구함.	5점
	$g(x)=\dfrac{x^2+2x-4}{3}$ 또는 $g(b)=\dfrac{b^2+2b-4}{3}$를 구함.	5점
	$y=3g(x)$와 $y=-3f(x)$의 교점 $x=-2$, $x=1$을 구함.	10점
	단면인 삼각형의 한변의 길이 $-3x^2-3x+6$을 구함.	5점
	삼각형의 넓이 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)$ 또는 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}(x+2)^2(x-1)^2$을 이용하여 입체도형의 부피 $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{9\sqrt{3}}{4}(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)dx$ 를 구함	10점
	입체도형의 부피 $\dfrac{729\sqrt{3}}{40}$을 구함.	10점

7. 예시 답안

점 A와 점 B를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(x, \dfrac{2x^2+x-2}{3}\right)$이고, $2:1$로 내분하는 점 Q의 좌표는 $\left(x, \dfrac{x^2+2x-4}{3}\right)$이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{2x^2+x-2}{3}$ 이고 $g(x)=\dfrac{x^2+2x-4}{3}$ 이므로

$3g(x)=x^2+2x-4$ 이고 $-3f(x)=-2x^2-x+2$ 이다.

$y=3g(x)$ 와 $y=-3f(x)$ 의 교점의 x 좌표를 구하자.

$$\begin{aligned} x^2+2x-4=-2x^2-x+2 &\Rightarrow 3x^2+3x-6=0 \\ &\Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0 \end{aligned}$$

이므로 $x=-2$, $x=1$ 이다.

$3g(0)=-4$ 이고, $-3f(0)=2$ 이므로 $-2\le x\le 1$ 인 x 에 대하여 $3g(x)\le -3f(x)$ 이다. 따라서 단면인 삼각형의 한 변의 길이는 $-3f(x)-3g(x)=-3x^2-3x+6$ 이다. 따라서 단면의 면적은

$$\frac{1}{2}\times(-3x^2-3x+6)^2\times\sin 60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{4}(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)$$

이다.

따라서 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{1}\frac{9\sqrt{3}}{4}(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)dx &= \frac{9\sqrt{3}}{4}\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4}\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1-2+4\right)-\left(-\frac{32}{5}+8+8-8-8\right)\right] \\ &= \frac{729\sqrt{3}}{40} \end{aligned}$$

[문항카드 12]

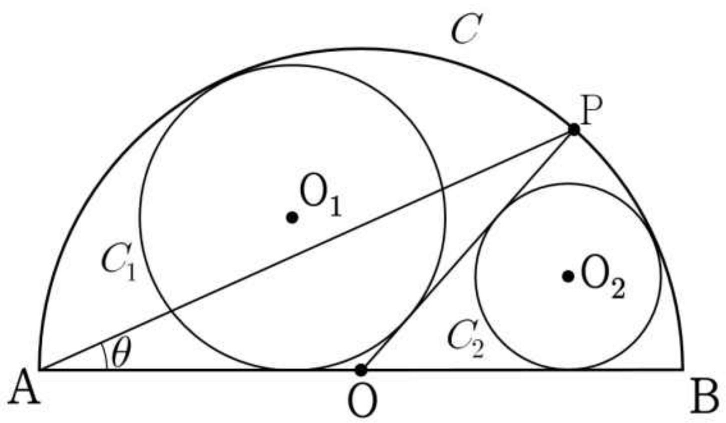
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 8	
출제 범위	교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 극한
예상 소요 시간	17분	

2. 문항 및 제시문

6. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> <가> 그림과 같이 중점이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C가 있다.
>
> <나> C 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$이다. $\left(\text{단, } 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$
>
> <다> C_1은 부채꼴 AOP 내부에 호 AP와 두 선분 AO, PO에 모두 접하는 원이고 점 O_1은 C_1의 중심이다.
>
> <라> C_2는 부채꼴 BOP 내부에 호 BP와 두 선분 BO, PO에 모두 접하는 원이고 점 O_2는 C_2의 중심이다.



$\lim\limits_{\theta \to 0+} \overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$의 값을 구하시오. [50점]

3. 출제 의도

1. 부채꼴의 호와 두 선분에 접하는 원들을 기하적으로 해석할 수 있는지를 평가한다.
2. 삼각함수를 이용하여 특정 조건을 만족하는 길이를 구할 수 있는지를 평가한다.
3. 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
8	[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2021	67-72
	미적분	김원경 외 14인	비상	2020	63-66

5. 문항 해설

원의 성질과 직각삼각형에 대한 피타고라스의 정리를 이용하여 선분의 길이를 각 θ를 이용해 표현 한 뒤 삼각함수의 극한을 이용해 극한값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
-	$\overline{OO_1}=1-f(\theta),\ f(\theta)=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$ 또는 $\overline{OO_1}=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ 를 구함.	5점
	$\overline{OO_2}=1-g(\theta),\ g(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$ 또는 $\overline{OO_2}=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$ 를 구함	5점
	$\overline{DE}=f(\theta)\tan\theta+\dfrac{g(\theta)}{\tan\theta}$, $\left\vert\overline{O_1D}-\overline{O_2E}\right\vert=\vert f(\theta)-g(\theta)\vert$를 구하여 $\overline{O_1O_2}=\sqrt{\left(\tan\theta f(\theta)+\dfrac{g(\theta)}{\tan\theta}\right)^2+(f(\theta)-g(\theta))^2}$ 를 구함 또는 삼각형O_1OO_2 이 직각삼각형임을 보이고 ($\angle O_1OO_2=\dfrac{\pi}{2}$ 임을 보이고) $\overline{O_1O_2}=\sqrt{\overline{OO_1}^2+\overline{OO_2}^2}$ 을 구함	15점
	$\overline{O_1O_2}=\sqrt{\dfrac{1}{(1+\cos\theta)^2}+\dfrac{1}{(1+\sin\theta)^2}}$ 를 구함.	15점
	$\therefore \lim\limits_{\theta\to 0+}\overline{O_1O_2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 를 구함	10점

7. 예시 답안

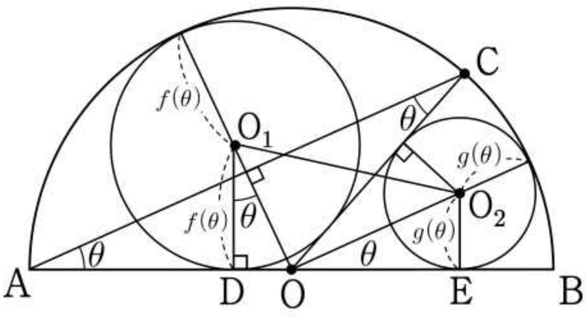
O_1에서 AB에 내린 수선의 발을 D, O_2에서 AB에 내린 수선의 발을 E라 하자.

$\angle DO_1O=\theta$ $\overline{O_1O}=1-f(\theta)$ $\cos\theta=\dfrac{f(\theta)}{1-f(\theta)}$

$\Rightarrow f(\theta)=\cos\theta(1-(f(\theta)) \Rightarrow f(\theta)=\cos\theta-f(\theta)\cos\theta$

$\Rightarrow f(\theta)+f(\theta)\cos\theta=\cos\theta$

$\therefore\ f(\theta)=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$



$\overline{OO_2}=1-g(\theta)$ $\sin\theta=\dfrac{g(\theta)}{\overline{OO_2}}=\dfrac{g(\theta)}{1-g(\theta)}$

$\Rightarrow g(\theta)=\sin\theta(1-g(\theta))$

$\Rightarrow g(\theta)+\sin\theta g(\theta)=\sin\theta$

$\therefore\ g(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$\overline{DE}=\overline{DO}+\overline{OE}=\tan\theta f(\theta)+\dfrac{g(\theta)}{\tan\theta}$

$\therefore\ |\overline{O_1D}-\overline{O_2E}|=|f(\theta)-g(\theta)|$

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2}&=\sqrt{\left(\tan\theta f(\theta)+\frac{g(\theta)}{\tan\theta}\right)^2+(f(\theta)-g(\theta))^2}\\&=\sqrt{\tan^2\theta f(\theta)^2+2f(\theta)g(\theta)+\frac{g(\theta)^2}{\tan^2\theta}+f(\theta)^2-2f(\theta)g(\theta)+g(\theta)^2}\\&=\sqrt{(\tan^2\theta+1)f(\theta)^2+\left(\frac{1}{\tan^2\theta}+1\right)g(\theta)^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}+\frac{1}{(1+\sin\theta)^2}}\end{aligned}$$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to0+}\overline{O_1O_2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

[문항카드 13]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학과) / 1번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 연속성, 역함수의 미분, 접선의 방정식, 역함수, 역함수의 미분, 치환적분, 부분적분
예상 소요 시간	20분	

2. 문항 및 제시문

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수 $f(x)=e^{ax}(x-b)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left\{\frac{f(x)}{x-3}+\frac{f(x)+3}{x+3}\right\}=e^3+\frac{1}{2}$이다. (단, a, b는 상수이다.)

<나> 함수 $f(x)$는 구간 $[0, p]$에서 감소하고 구간 $[p, \infty)$에서 증가한다. (단, p는 양의 실수이다.)

<다> 함수 $h(x)$는 정의역이 $\{x \mid x \geq 4p-3\}$이고 $h(x)=f\left(\dfrac{x+3}{4}\right)$이다.

<라> 함수 $g(x)$는 정의역이 $\{x \mid x \geq q\}$이고 함수 $h(x)$의 역함수이다. (단, q는 실수이다.)

[1-1] 제시문의 함수 $f(x)$에 대하여 그래프 $y=f(x)$의 개형을 그리고, $f(4)$의 값을 구하시오. [20점]

[1-2] 제시문의 함수 $h(x)$에 대하여 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(r, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=h(x)$ 및 직선 $x=r+4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (단, r은 실수이다.) [20점]

[1-3] 제시문의 함수 $g(x)$에 대하여, $g(e^4)+g'(e^4)$의 값을 구하시오. [20점]

[1-4] 제시문의 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $\displaystyle\int_4^5 \frac{8}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$의 값을 구하시오. [20점]

3. 출제 의도

[1-1] 함수의 극한과 미분을 이해하고 있는지 평가하고 함수의 그래프를 그릴 수 있는지 평가한다.
[1-2] 접선의 방정식을 이해하고 있는지 평가하고 정적분의 개념을 이해하고 활용하여 영역의 넓이를 계산할 수 있는지 평가한다.
[1-3] 합성함수의 미분, 역함수의 미분을 이해하고 계산할 수 있는지 평가한다.
[1-4] 역함수의 미분을 계산할수 있고 치환적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1-1	[12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12미적02-02] 지수함수를 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
1-2	[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
1-3	[10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
1-4	[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

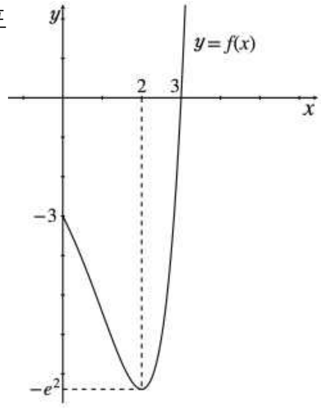
나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분	이준열 외 7인	천재교육	2021	138-171
	고등학교 미적분	고성은 외 5인	신사고	2020	89-96
	고등학교 수학	배종숙 외 6인	금성	2021	220-237
	고등학교 수학	권오남 외 14인	교학사	2021	223-230
	고등학교 수학Ⅱ	이준열 외 9인	천재교육	2021	52-77
	고등학교 수학Ⅱ	류희찬 외 10인	천재교과서	2021	67-70

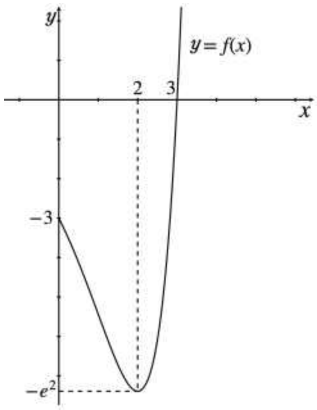
5. 문항 해설

[1-1] 함수의 극한과 연속성을 이해하는 지를 확인하고, 주어진 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지 확인한다.
[1-2] 합성함수를 이해하여 함수값과 그 미분값을 계산할 수 있는 지 확인하고, 접선의 방정식을 구할 수 있는지 확인한다. 그리고 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.
[1-3] 역함수의 의미를 이해하여 특정점에서의 함수값을 계산할 수 있는 지 확인하고, 함수의 미분을 계산할 수 있는지 확인한다.
[1-4] 역함수의 의미를 이해하여 주어진 식을 계산가능한 형태로 변수 치환하고, 치환적분법을 활용하여 계산할 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$f(x)=e^{x}(x-3)$ 을 구함	5점
	$f(4)=e^{4}$ 를 구함	5점
	$f(2)=-e^{2}$, $f(0)=-3$, x절편 : $(3,0)$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 을 포함하는 다음의 그래프를 그림 	10점
1-2	$r=9$ 을 구함	5점
	접선의 방정식 $y=\frac{1}{4}e^{3}(x-9)$ 을 구하고, 구하는 영역의 넓이 $=\int_{9}^{13}\left\{h(x)-\frac{1}{4}e^{3}(x-9)\right\}dx$ 수식을 세움	10점
	정답 구하는 영역의 넓이 $=2e^{3}$ 을 구함	5점
1-3	$g(e^{4})=13$ 또는 $g'(e^{4})=\frac{2}{e^{4}}$ 을 구함	10점
	정답 $13+\frac{2}{e^{4}}$ 을 구함	10점
1-4	$g'(f(x))=4\cdot\frac{1}{f'(x)}$ 을 구함	5점
	$\int_{4}^{5}\frac{8}{g'(f(x))\{f(x)\}^{2}}dx=\int_{4}^{5}\frac{2f'(x)}{\{f(x)\}^{2}}dx=\int_{e^{4}}^{2e^{5}}\frac{2}{t^{2}}dt$ 을 구함	10점
	정답 $\frac{2}{e^{4}}-\frac{1}{e^{5}}$ 을 구함	5점

7. 예시 답안

1-1	1) $\lim_{x\to 3}f(x)=0$이므로 $b=3$이다. $\lim_{x\to 3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}+\frac{f(x)+3}{x+3}\right\}=f'(3)+\frac{1}{2}$이고 $f'(x)=ae^{ax}(x-3)+e^{ax}$으로부터 $f'(2)=e^{3a}$ 이므로, 즉 $e^{3a}=e^3$ 을 만족함으로 $a=1$이다. $\therefore f(x)=e^x(x-3)$ 이고, $f(4)=e^4$ 이다 2) $f'(x)=e^x(x-2)$, $f''(x)=e^x(x-1)$ 이므로 $f'(2)=0$ 이고 $f''(1)=0$ 이고 $x\ge 2$일 때 $f'(x)\ge 0$이고 $0\le x<2$일 때 $f'(x)<0$이다. $f(1)=-2e$, $f(2)=-e^2$, $f(0)=-3$, x절편 : $(3,0)$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 을 이용하면 x | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ $f'(x)$ | - | - | - | - | 0 | + $f(x)$ | -3 | ↘ | $-2e$ | ↘ | $-e^2$ | ↗ 그러므로 그래프의 개형은 다음이다. 
1-2	$h(r)=0$인 x를 찾으면 $h(r)=f\left(\frac{r+3}{4}\right)=0$을 만족해야하고, $\frac{r+3}{4}=3$이다. $\therefore$ $r=9$이다. $(9,0)$에서의 접선의 방정식은 $y=h'(9)(x-9)$이고, $h'(x)=\frac{1}{4}f'\left(\frac{x+3}{4}\right)$ 이므로 $h'(9)=\frac{1}{4}f'(3)=\frac{1}{4}e^3$이다. $\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{4}e^3(x-9)$이다. $x\ge 9$일 때, $h''(x)=\frac{1}{16}f''\left(\frac{x+3}{4}\right)$이고 $f''\left(\frac{x+3}{4}\right)>0$ 이므로 $h''(x)>0$이고 $y=h(x)$는 접선보다 위에 위치한다. 그러므로, 구하는 영역의 넓이$=\int_9^{13}\left\{h(x)-\frac{1}{4}e^3(x-9)\right\}dx$이다. $h(x)=f\left(\frac{x+3}{4}\right)$에서 $\frac{x+3}{4}=t$로 치환하면,

	구하는 영역의 넓이 $= \int_3^4 f(t)\cdot 4\,dt - \frac{1}{4}e^3\int_9^{13}(x-9)dx$ $4\int_3^4 (x-3)e^x\,dx - \frac{1}{4}e^3\int_9^{13}(x-9)dx$ $= \left\{[xe^x]_3^4 - \int_3^4 e^x - [3\cdot e^x]_3^4\right\} - \frac{1}{4}e^3\left[\frac{x^2}{2}-9x\right]_9^{13}$ $= 4(4e^4-3e^3-e^4+e^3-3e^4+3e^3) - \frac{1}{4}e^3\left(\frac{13^2}{2}-\frac{9^2}{2}-9(13-9)\right)$ $= 4e^3-2e^3 = 2e^3$
1-3	$h(x)$의 역함수를 구하기 위해 $y=f\left(\frac{x+3}{4}\right)$를 x에 대해 정리하면 $\frac{x+3}{4}=f^{-1}(y)$이고 $x=4f^{-1}(y)-3$이다. x,y를 바꾸면 $y=4f^{-1}(x)-3$ 이므로, $h(x)$의 역함수 $g(x)$는 $g(x)=4f^{-1}(x)-3$이다. 그리고 $g'(x)=4(f^{-1})'(x)$이므로 $g'(x)=\frac{4}{f'(f^{-1}(x))}$ 이다. i) $g(e^4)=4f^{-1}(e^4)-3$이고 $f(4)=e^4$로부터 $f^{-1}(e^4)=4$이므로 $g(e^4)=4\cdot 4-3=13$이다. ii) $g'(e^4)=4\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(e^4))}=4\cdot\frac{1}{f'(4)}$ 이고 $f(x)=e^x(x-2)$로부터 $f'(4)=2e^4$이므로 $g'(e^4)=4\cdot\frac{1}{2e^4}=\frac{2}{e^4}$ 이다. 별해. $g(x)$는 h의 역함수이므로 ① $g\left(f\left(\frac{x+3}{4}\right)\right)=x$ 를 만족한다. 그리고 $g'\left(f\left(\frac{x+3}{4}\right)\right)\cdot f'\left(\frac{x+3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}=1$로부터 ② $g'\left(f\left(\frac{x+3}{4}\right)\right)=\frac{4}{f'\left(\frac{x+3}{4}\right)}$ 이다. i) ①을 이용하여 $g(e^4)$를 구하기 위해 $f\left(\frac{x+3}{4}\right)=e^4$인 x를 찾는다. $f(4)=e^4$로부터, $\frac{x+3}{4}=4$ $\therefore x=13$ ii) ②를 이용하여 $x=13$일 때 $f\left(\frac{x+3}{4}\right)=e^4$이므로

	$g'(e^4)=\dfrac{4}{f'(4)}$ 이고 $f'(x)=e^x(x-2)$로부터 $f'(4)=2e^4$이고 $\therefore g'(e^4)=\dfrac{2}{e^4}$
1-4	$g'(x)=4\cdot\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ 로부터 x대신 $f(x)$를 대입하고 $f^{-1}(f(x))=x$를 이용하면 $g'(f(x))=4\cdot\dfrac{1}{f'(x)}$ 이다. $\therefore \displaystyle\int_4^5\frac{8}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx=\int_4^5\frac{2f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$ $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$ 이다. $f(5)=2e^5,\ f(4)=e^4$를 대입하면, $\displaystyle\int_4^5\frac{2f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx=\int_{e^4}^{2e^5}\frac{2}{t^2}dt=2\left[-\frac{1}{t}\right]_{e^4}^{2e^5}=-2\left[\frac{1}{2e^5}-\frac{1}{e^4}\right]=\frac{2}{e^4}-\frac{1}{e^5}$ 또는 $=\dfrac{1}{e^5}(2e-1)$

[문항카드 14]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학과) / 문제 2	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 기하
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 등비급수, 삼수선의 정리, 정사영
예상 소요 시간	20분	

2. 문항 및 제시문

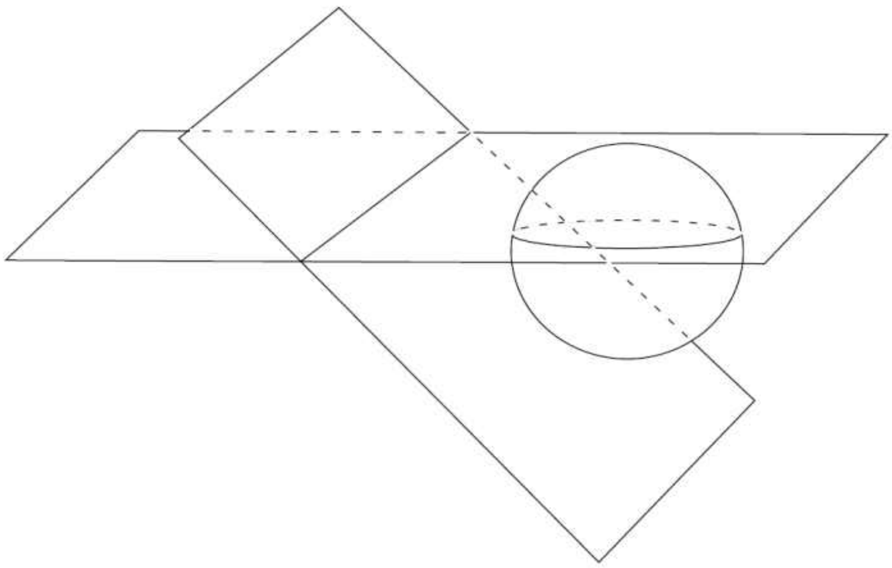
2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 좌표공간에서 반지름이 $3\sqrt{2}$이고 중심이 A인 구 S와 평면 α는 점 B에서 서로 접한다.

<나> 평면 α와 평행하지 않은 평면 β에 대하여, 구 S와 평면 β가 만나서 생기는 원 C의 반지름은 4이고 중심은 점 D이다.

<다> 점 A와 점 D를 지나는 직선 m은 구 S와 점 H, 점 I에서 만나며, $\overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{DH}} = 3 : 2$이다.

<라> 직선 ℓ은 평면 α와 평면 β의 교선이다. 점 D에서 직선 ℓ에 내린 수선의 발을 점 J라 할 때, 선분 DJ의 길이가 5이고 삼각형 BDJ의 넓이는 $5\sqrt{2}$이다. (단, $\angle\mathrm{BJD} \neq 90^\circ$)



[2-1] 직선 ℓ위의 움직이지 않는 한 점 E와 평면 α위의 점 F의 거리는 2이고 선분 EF의 중점은 G이다. 삼각형 AFG의 넓이가 최대가 될 때, $\cos(\angle \mathrm{BEF})$를 구하시오. [40점]

[2-2] 원 C의 평면 α로의 정사영을 K_1, 도형 K_1의 평면 β로의 정사영을 L_1이라 하고, 자연수 n이 2보다 크거나 같을 때 도형 L_{n-1}의 평면 α로의 정사영을 K_n, 도형 K_n의 평면 β로의 정사영을 L_n이라 하자. K_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{2023} a_n$의 값을 구하시오. [50점]

3. 출제 의도

[2-1] 공간도형에서 삼수선의 정리를 이용하여 직선의 위치 관계를 파악하고 주어진 각의 $\cos$값을 구할 수 있는지 평가한다.
[2-2] 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하고, 이를 이용하여 주어진 도형의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
2-1	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
2-2	[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	김원경 외 14인	비상	2021	71-75 95-104
	수학Ⅰ	고성은 외 6인	신사고	2020	123-127
	기하	이준열 외 7인	천재교육	2020	121-124
	기하	고성은 외 5인	신사고	2020	118-123

5. 문항 해설

[2-1] 공간도형에서 주어진 조건들을 이용하여 삼수선 정리를 적용할 수 있다는 것을 확인하고, 이를 이용하여 각의 $\cos$값을 구하는 문제이다.
[2-2] 공간도형에서 주어진 두 평면이 이루는 예각을 구하고, 이를 이용하여 정사영 된 도형들의 넓이의 합을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	점 F와 점 G를 지나는 직선과 선분 AE가 수직임을 확인	10점
	평면 α와 선분 AB는 수직임을 확인	10점
	삼수선의 정리를 이용하여 점 F와 점 G를 지나는 직선과 선분 BE가 수직임을 확인	10점
	$\angle \mathrm{BEF} = 90^\circ$ 을 구함	5점
	$\cos(\angle \mathrm{BEF}) = 0$을 구함	5점
2-2	$\overline{\mathrm{AJ}} = 3\sqrt{3}$을 구함	5점
	$\overline{\mathrm{BJ}} = 3$을 구함	5점
	두 평면 사이의 이면각의 크기를 θ라고 할 때 $\sin\theta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$를 구함	5점
	$\cos\theta = \frac{1}{3}$을 구함	5점
	C의 넓이가 16π임을 구함	10점
	K_n의 첫째항이 $\frac{16}{3}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열임을 확인	10점
	$\sum_{n=1}^{2023} a_n = 6\pi\left(1 - \frac{1}{9^{2023}}\right)$을 구함	10점

7. 예시 답안

2-1	삼각형 AFG의 넓이가 최대가 되기 위해서는, 점 F와 점 G를 지나는 직선 p와 선분 AE가 수직이어야 한다. 또한 평면 α와 선분 AB는 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 직선 p와 선분BE는 수직이다. 따라서 선분 EF는 직선 p위에 있으므로 $\angle \mathrm{BEF} = 90^\circ$ 이고 $\cos(\angle \mathrm{BEF}) = 0$이다.
2-2	직선 m과 평면 β는 수직이므로 삼각형 ADJ는 직각삼각형이며, 평면 α와 선분 AB는 수직이므로 삼각형 ABJ 또한 직각삼각형이다. 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{BJ}}^2 = \overline{\mathrm{AJ}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2$ $= (\overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{DJ}}^2) - \overline{\mathrm{AB}}^2 = \left(3\sqrt{2} \cdot \frac{\overline{\mathrm{AH}} - \overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}\right)^2 + \overline{\mathrm{DJ}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2$ $= 2 + 25 - 18 = 9$ $\therefore \overline{\mathrm{BJ}} = 3$ 평면 α와 평면 β의 이면각 크기를 θ라고 할 때, $\triangle \mathrm{BDJ} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BJ}} \cdot \overline{\mathrm{DJ}} \cdot \sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{2 \times 5\sqrt{2}}{3 \times 5} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$ C의 넓이는 16π이다.

	$K_1 = (C$의 넓이$) \times \cos\theta = 16\pi \times \frac{1}{3}$ $L_1 = K_1 \times \cos\theta = 16\pi \times \frac{1}{3^2}$ $K_2 = L_2 \times \cos\theta = 16\pi \times \frac{1}{3^3}$ $\vdots$ $K_n = 16\pi \times \frac{1}{3^{2n-1}}$ 이므로 K_n의 값은 첫째항이 $\frac{16}{3}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이 된다. $\therefore \sum_{n=1}^{2023} a_n = \frac{16}{3}\pi \cdot \frac{1-\frac{1}{9^{2023}}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{16}{3}\pi \cdot \frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{9^{2023}}\right) = 6\pi\left(1-\frac{1}{9^{2023}}\right)$

[문항카드 15]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(약학과) / 문제 3	
출제 범위	교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	중복조합, 경우의 수, 중복조합, 조건부분포, 표본평균의 분포, 이항분포, 정규분포
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

3. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 서로 다른 n개에서 중복을 허용해서 r개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 이 중복 조합의 수를 ${}_n\mathrm{H}_r$로 나타낸다.

<나> 한 번의 시행에서 어떤 사건 A가 일어날 확률이 p, 일어나지 않을 확률이 q라고 하자. n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,p)$와 같이 나타낸다. 이때, 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따르는 이산확률변수 X의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\,\mathrm{p}^{x}\mathrm{q}^{n-x}$이다. (단, $q=1-p$)

<다> 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다.

<라> 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 확률변수 Z의 분포표는 다음과 같다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

[3-1] 집합 $X=\{x \mid x$는 9 이하의 자연수$\}$와 집합 $Y=\{x \mid x$는 7 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [25점]

(1) $1 \le x \le 4$일 때 $f(x) \le f(x+1)+1$
(2) $5 \le x \le 9$일 때 $f(x) \ge f(x+1)$
(3) $f(5)=f(4)+6$

[3-2] 어느 공장에서 사용되는 기계가 한 해 동안 정상가동 되지 않는 달의 수를 확률변수 X라고 하자. X의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{14}{13}\times\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ $(x=0,1,2,\cdots,12)$이다. 이 공장은 100대의 동일한 기계를 사용하고 있으며 각각의 기계가 정상가동 될 확률은 서로 독립이다. 각 기계마다 2021년 초에 130만원씩의 보험료를 납입하고 보험에 가입하였다. 각 기계마다 가입된 이 보험의 보장내용은 1년 동안 정상가동 되지 않은 달의 수가 4 이상이면 연말에 보험금 1000만원을 지급받는 것이다. 2021년에 이 공장의 기계 중 정상가동 되지 않은 달의 수가 8 이상인 기계가 없을 때, 2021년 말에 지급받은 보험금 총액이 2021년 초에 납입한 보험료 총액보다 클 확률을 구하시오. [35점]

[3-3] 하루 4000 L의 생수를 생산하는 어느 공장에서 생수병의 용량이 A mL일 때, 생수병에 담기는 생수의 양은 평균이 A mL이고 표준편차가 $\frac{\mathrm{A}}{10}$ mL인 정규분포를 따른다. 이 생수공장은 용량이 250 mL인 생수병 16개를 한 상자에 넣어서 판매하였고, 한 상자에 담긴 생수의 양이 3800 mL 이하이면 판매부적합으로 판정하였다. 이 생수공장은 판매부적합 판정상자 수를 줄이기 위하여 용량이 160 mL인 생수병 25개를 한 상자에 넣도록 포장방식을 변경하였다. 판매부적합 판정기준이 동일할 때, 포장방식의 변경에 따라 1일 판매부적합 판정상자 수가 어떻게 변화하는지 논술하시오. (단, 1 L = 1000 mL이고, 당일에 생산되는 생수는 당일 모두 판매된다.) [30점]

3. 출제 의도

[3-1] 중복조합의 이해를 묻는다. 중복조합의 수를 구할 수 있는지 묻는다.
[3-2] 조건부분포를 이해하는지 확인한다. 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하는지 확인한다. 정규분포표를 이해하는지 확인한다.
[3-3] 모집단과 표본평균의 관계를 이해하는지 확인한다. 정규분포표를 이해하는지 확인한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
3-1	[12 확통 01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
3-2	[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
3-3	[12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12확통03-06] 표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	류희찬 외 9인	천재교과서	2021	59-64 93-100
	확률과 통계	박교식 외 19인	동아	2019	99-107 113-117

5. 문항 해설

[3-1] 중복조합의 뜻을 이해하고 주어진 조건을 만족하는 함수의 수의 개수를 구하는 것에 적용해 계산한다.
[3-2] 조건이 주어졌을 때 원래의 분포에서 변화된 분포인 조건부분포의 확률을 계산할 수 있는지 확인하는 문제이다. 이항분포와 정규분의 관계를 이해하고 정규분포표를 이용하여 확률을 계산할 수 있는지 확인하는 문제이다.
[3-3] 모집단의 분포로부터 표본평균의 분포를 찾고, 정규분포표를 이용하여 확률을 계산할 수 있는지 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	집합 $\{x\|x$는 5이상 9이하 자연수$\}$에서 $\{x\|x$는 1이상 7이하 자연수$\}$로 가는 함수 중 $f(5)=7$이고 $f(x) \geq f(x+1)$을 만족시키는 함수의 개수는 ${}_7H_4 = {}_{10}C_4 = 210$임을 구함	10점
	집합 $\{x\|x$는 4이하 자연수$\}$에서 $\{x\|x$는 7이하 자연수$\}$로 가는 함수 중 $f(4)=1$이고 $f(x) \leq f(x+1)+1$을 만족시키는 함수의 개수가 14임을 구함	10점
	조건 (가)와 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 $14 \times 210 = 2940$	5점
3-2	N : 1개의 기계가 1년중 정상가동하지 않는 달의 수가 $\mathrm{P}=(X=x)=\frac{14}{13}\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$ 임을 보임.	5점
	1개의 기계가 2021년 말 보험금을 지급 받을 확률이 $\mathrm{P}(X \geq 4 \| X \leq 7)$ 임을 보임.	5점
	1개의 기계가 2021년 말 보험금을 지급 받을 확률이 $\frac{1}{10}$임을 구함.	10점
	2021년 말에 100대의 기계 중 보험금을 지급받는 기계의 수를 Y라고 하면 Y는 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{10}\right)$을 따름을 도출함	5점
	Y는 근사적으로 $\mathrm{N}\left(100 \cdot \frac{1}{10}, 100 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}\right) = \mathrm{N}(10, 3^2)$을 따름을 도출함.	5점
	보험금 총지급액이 보험료 총납입액보다 클 확률은 15.9% 임을 계산함.	5점
3-3	이전 방식에서 한 병 무게의 분포를 $X_i \sim N(250, 25^2)$로 표현함	3점
	이전 방식에서 한 상자 무게의 분포가 $X = 16\overline{X} \sim N(4000, 100^2)$을 따름을 도출함.	7점
	이전 방식에서 하루 동안 판매부적합으로 판정되는 상자 수가 23임을 도출함	5점
	새로운 방식에서 한 병 무게의 분포를 $Y_i \sim N(160, 16^2)$로 표현함	3점
	새로운 방식에서 한 상자 무게의 분포가 $Y = 25\overline{Y} \sim N(4000, 80^2)$을 따름을 도출함.	7점
	새로운 방식에서 하루 동안 판매부적합으로 판정되는 상자 수가 6임을 도출함	5점

7. 예시 답안

3-1	$f(n) \le 7$이므로 $f(4)=1$이다. 그러면 $f(5)=7$이다. 집합 $\{x\|x$는 5이상 9이하 자연수$\}$에서 $\{x\|x$는 1이상 7이하 자연수$\}$로 가는 함수 중 $f(5)=7$이고 $f(x) \ge f(x+1)$을 만족시키는 함수의 개수는 ${}_7H_4 = {}_{10}C_4 = 210$ 집합 $\{x\|x$는 4이하 자연수$\}$에서 $\{x\|x$는 7이하 자연수$\}$로 가는 함수 중 $f(4)=1$이고 $f(x) \le f(x+1)+1$을 만족시키는 함수는 $f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=1$ $f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=2$ $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=1$ $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=2$ $f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=2$ $f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3)=1$ $f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3)=2$ $f(1)=2,\ f(2)=2,\ f(3)=1$ $f(1)=2,\ f(2)=2,\ f(3)=2$ $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=2$ $f(1)=3,\ f(2)=2,\ f(3)=1$ $f(1)=3,\ f(2)=2,\ f(3)=2$ $f(1)=3,\ f(2)=3,\ f(3)=2$ $f(1)=4,\ f(2)=3,\ f(3)=2$ 인 경우로 14개가 있다. 따라서 $f(4)=1$일 때, 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 $14 \times 210 = 2940$
3-2	N :1개의 기계가 1년중 정상가동하지 않는 달의 수 $\mathrm{P}=(X=x)=\dfrac{14}{13}\cdot\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\quad(x=0,1,2,\ \cdots,12)$ $=\dfrac{14}{13}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$ 1개의 기계가 2021년 말 보험금을 지급 받을 확률은 $\mathrm{P}(X \ge 4 \| X \le 7)$ $=1-\mathrm{P}(X \le 3 \| X \le 7)$ $=1-\dfrac{\frac{14}{13}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)}{\frac{14}{13}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ \cdots\ +\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)}$ $=1-\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{9}}$ $=1-\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}$ 2021년 말에 100대의 기계 중 보험금을 지급받는 기계의 수를 Y라고 하면 Y는 $\mathrm{B}\left(100,\dfrac{1}{10}\right)$을 따르고 이는

	근사적으로 $\mathrm{N}\left(100 \cdot \frac{1}{10}, 100 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}\right) = \mathrm{N}(10, 3^2)$을 따른다. 그러므로 보험금 총지급액이 보험료 총납입액보다 클 확률은 $\mathrm{P}(\text{총 보험금} > \text{총 보험료})$ $= \mathrm{P}(X \cdot 1000\text{만} > 100 \times 130\text{만})$ $= \mathrm{P}(X > 13)$ $= \mathrm{P}\left(\frac{X-10}{3} > \frac{13-10}{3}\right)$ $= \mathrm{P}(Z > 1)$ $= 0.5 - 0.341$ $= 0.159$ 여기에서 Z는 $\mathrm{N}(0, 1^2)$을 따른다. 답 15.9%
3-3	i) 이전 방식으로 포장 $(\mathrm{A} = 250)$ 했을 경우 한 병 무게의 분포 : $X_i \sim N(250, 25^2)$ 한 병 평균무게의 분포 : : $\overline{X} = \frac{1}{16}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{16}) \sim N(250, \frac{1}{16} \times 25^2)$ 한 상자 무게 : $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{16} = 16\overline{X}$ 의 형태로 나타낼 수 있다. 한 상자 무게의 분포 : $X = 16\overline{X} \sim N(16 \times 250, 16^2 \times \frac{1}{16} \times 25^2) = N(4000, 100^2)$ 이전 방식의 한 상자가 판매부적합으로 판정될 확률 $\mathrm{P}(X \le 3800) = \mathrm{P}\left(z \le \frac{3800-4000}{100}\right)$ $= \mathrm{P}(z \le -2)$ $= 0.023$ 이전 방식으로 포장했을 때 하루 판매부적합으로 판정되는 상자 수 = 하루 생산되는 상자 수 $\times\, 0.023$ $= 1000 \times 0.023 = 23$상자 ii) 새로운 방식으로 포장 $(A = 160)$ 했을 경우 한 병 무게의 분포 : $Y_i \sim N(160, 16^2)$ 한 병 평균무게의 분포 : : $\overline{Y} = \frac{1}{25}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{25}) \sim N(160, \frac{1}{25} \times 16^2)$ 한 상자 무게 : $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{25} = 25\overline{Y}$ 의 형태로 나타낼 수 있다. 한 상자 무게의 분포: $Y = 25\overline{Y} \sim N(25 \times 160, 25^2 \times \frac{1}{25} \times 16^2) = N(4000, 80^2)$ 새로운 방식의 한 상자가 판매부적합으로 판정될 확률 $\mathrm{P}(Y \le 3800) = \mathrm{P}\left(z \le \frac{3800-4000}{80}\right)$ $= \mathrm{P}(z \le -2.5)$ $= 0.006$ 새로운 방식으로 포장했을 때 하루 판매부적합으로 판정될 상자 수 = 하루 생산되는 상자 수 $\times\, 0.006$ $= 1000 \times 0.006 = 6$상자 ∴ 새로운 포장방법은 이전 포장방법에 비해 17상자 적게 판매부적합으로 판정된다.

[문항카드 16]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II (약학과) / 4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	다항함수, 지수함수, 함수의 최대와 최소, 연립일차부등식
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

4. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> A는 철분, 비타민 등과 같이 신체 균형을 유지하기 위해 사람에게 필요한 성분들 중 하나이다. 건강한 사람의 A의 혈중 농도는 $8\,\mu\text{g/ml}$와 $16\,\mu\text{g/ml}$ 사이로 유지된다. 즉, A의 혈중 농도를 a라 할 때, 건강한 사람의 혈중 농도는 다음을 항상 만족시킨다.

$$8 \le a \le 16$$

<나> 대부분의 사람들은 A를 몸에서 스스로 생성하지만 A-결핍증 환자는 A를 몸에서 생성하지 못한다. A-결핍증 환자는 주기적으로 약을 복용하여 A의 혈중 농도를 제시문 <가>의 범위 내로 유지하고자 한다.

<다> 모 제약회사는 A-결핍증 환자를 위해 $10\,\text{mg}$의 A를 함유한 알약을 판매하고 있다. 이 알약들은 1시간에 걸쳐 흡수되도록 만들었다. $t=0$일 때 A의 혈중 농도가 b이고, 알약을 k개 복용하였다. 약을 복용한 후 경과된 시간 t $(0 \le t \le 1)$에서의 A의 혈중 농도 $g(t)$는

$$g(t) = \frac{24}{25}(b+k)t + b(1-t)$$

이다. (단, b, k는 상수이다.)

[4-1] A-결핍증 환자가 제시문 <다>의 알약을 복용한 후 경과된 시간 t에서의 A의 혈중 농도 $f(t)$는

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & (0 \le t \le 1) \\ ce^{-\frac{t}{24}} & (1 < t \le 12) \end{cases}$$

이다. (단, c는 상수이다.)

어떤 A-결핍증 환자가 k개의 알약을 복용했을 당시 $(t=0)$의 A의 혈중 농도가 b일 때, $f(t)$가 연속함수가 되도록 하는 c를 구하시오. (단, $e^{-\frac{1}{24}} = 0.96$으로 계산한다.) [20점]

[4-2] 어떤 A-결핍증 환자가 11월 26일 오전 9시에 측정한 A의 혈중 농도가 $9\,\mu\text{g/ml}$ 이고, 측정 직후 알약을 k개 복용하였다. 이 환자가 알약을 복용한 후 경과된 시간 t가 $0 \le t \le 12$일 때, A의 혈중 농도의 최솟값과 최댓값에 대하여 논술하시오. (단, k는 자연수이고, $\sqrt{e} = 1.6$으로 계산한다.) [25점]

[4-3] 어떤 A-결핍증 환자가 어제 오전 9시에 측정한 A의 혈중 농도가 $9\,\mu\text{g/ml}$였다. 다음 식약처 권고사항에 맞춰 어제 오전 9시와 오후 9시에 각각 k개의 알약을 복용하였다. 위 제시문과 문제 4-2를 이용하여 가능한 자연수 k에 대하여 논술하시오. (단, $\sqrt{e} = 1.6$으로 계산하고, 이 환자는 A의 혈

중 농도를 측정한 즉시 알약을 복용한다.) [45점]

< 식약처 권고사항 >

A-결핍증 환자가 약을 복용하는 방법을 다음과 같이 권고한다.

(1) 약은 12시간 간격으로 복용한다.

(2) 복용 시기는 A의 혈중 농도가 $9\,\mu\text{g/ml}$와 $10\,\mu\text{g/ml}$사이일 때 복용한다.

(3) 약을 복용한 후 A의 혈중 농도는 12시간 동안 $8\,\mu\text{g/ml}$와 $16\,\mu\text{g/ml}$ 사이를 유지하고, 12시간 후에 $9\,\mu\text{g/ml}$와 $10\,\mu\text{g/ml}$사이가 되도록 1회 복용량을 조절한다.
즉, 약을 복용한 후 경과된 시간 t $(0 \le t \le 12)$에서의 A의 혈중 농도 $f(t)$는

$$8 \le f(t) \le 16,\ 9 \le f(12) \le 10$$

를 만족시킨다.

3. 출제 의도

[4-1] 함수의 연속의 정의를 이해하고 연속성을 확인할 수 있는지 평가한다.
[4-2] 닫힌 구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
[4-3] 구간별로 달라지는 함수의 전체 구간에서 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
자연수의 값에 따라 달라지는 함수가 특정 조건을 만족하도록 자연수를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가. 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
4-1	[12수학Ⅱ 01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
4-2	[12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
4-3	[10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다.

나. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외 6인	신사고	2021	83-86
	수학	배종숙 외 6인	금성	2021	88-92
	수학 Ⅰ	고성은 외 6인	신사고	2020	40-47
	수학 Ⅰ	김원경 외 14인	비상교육	2021	38-49
	수학 Ⅱ	박교식 외 19인	동아	2020	31-41
	수학 Ⅱ	배종숙 외 6인	금성	2020	83-91
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2021	60-62
	미적분	박교식 외 19인	동아	2021	57-60

5. 문항 해설

[4-1] $t \neq 1$인 경우 연속이므로 $t = 1$에서만 연속이 되는지 판별하면 된다는 것을 확인하고, 연속의 정의를 활용하여 연속성을 판단하는 문제이다.

[4-2] 닫힌 구간에서 정의된 함수의 1계 도함수를 이용하여 최댓값을 구하고, 복용하는 알약의 개수에 따른 최솟값의 변화에 대해 논술하는 문제이다.

[4-3] [4-1]에서의 구간별로 정의된 함수의 전체 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하고, 연속함수의 성질을 이용하여 특정 조건을 만족하는지 판별하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4-1	$x = 1$에서 연속이려면 $\lim_{t \to 1+} f(t) = \lim_{t \to 1-} f(t) = f(1)$ 또는 $\lim_{t \to 1+} f(t) = \lim_{t \to 1-} f(t)$ 임을 만족해야 함을 설명함.	5점
	$\lim_{t \to 1-} f(t) = \frac{24}{25}(b+k)$를 구함.	5점
	$\lim_{t \to 1+} f(t) = ce^{-\frac{1}{24}} = 0.96c$를 구함.	5점
	$c = b + k$를 구함.	5점
4-2	$t = 1$일 때 극댓값(최댓값)을 가짐을 보임.	10점
	최댓값 $f(1) = \frac{24}{25}(9+k)$를 구함.	5점
	$k < 5.4$ 또는 $k \leq 5$일 때, 최솟값 $f(12) = \frac{45}{8} + \frac{5k}{8}$을 가짐을 보임.	5점
	$k > 5.4$ 또는 $k \geq 6$일 때, 최솟값 $f(0) = 9$를 가짐을 보임.	5점
4-3	$9 \leq f(12) \leq 10$임을 이용하여 가능한 k가 6과 7임을 보임.	10점
	$k = 6$일 때, 주어진 기간 내의 최댓값이 항상 16이하 임을 보임.	20점
	$k = 7$일 때, 주어진 기간 내의 최댓값이 16을 초과함을 보이거나 두 번째 약을 복용 후 12시간 뒤의 값이 10을 초과함을 보임.	10점
	식약처 권고사항에 맞추기 위해서는 매 복용 시 6개를 복용해야 한다는 결론을 보임.	5점

7. 예시 답안

4-1	$f(t)$는 $0<t<1$일 때, 일차함수이므로 연속이다. $t>1$일 때, 지수함수이므로 연속이다. 따라서 $t=1$일 때 연속하면 $f(t)$는 연속함수이다. $f(t)$가 $t=1$에서 연속하려면 $$f(1)=\lim_{t\to1}f(t)$$ 를 만족해야 한다. 제시문 <라>에 의해 $f(1)=\frac{24}{25}(b+k)$이고, $$\lim_{t\to1-}f(t)=\lim_{t\to1-}\left\{\frac{24}{25}(b+k)t+b(1-t)\right\}=\frac{24}{25}(b+k),$$ $$\lim_{t\to1+}f(t)=\lim_{t\to1+}ce^{-\frac{t}{24}}=ce^{-\frac{1}{24}}=0.96c$$ 이다. 따라서 $0.96c=\frac{24}{25}(b+k)$일 때, $t=1$에서 연속이다. 그러므로 $c=b+k$이다.
4-2	오전 9시에 알약을 복용하고 경과된 시간 t에서의 A의 혈중 농도 $f(t)$는 $$f(t)=\begin{cases}\frac{24}{25}(9+k)t+9(1-t) & 0\le t\le1\\(9+k)e^{-\frac{t}{24}} & 1<t\le12\end{cases}$$ 이다. 이때 $0<t<1$일 때, k는 자연수이므로 $f'(t)=\frac{24}{25}(9+k)-9=\frac{24k-9}{25}>0$이다. $1<t<12$일 때, $f'(t)=-\frac{1}{24}(9+k)e^{-\frac{t}{24}}<0$이므로 $t=1$일 때, 극댓값(최댓값)을 갖는다. 이때, 최댓값 $f(1)=\frac{24}{25}(9+k)$이다. 함수 $f(t)$는 $[0,12]$에서 연속이고, $f(0)=9$, $f(12)=(9+k)e^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{8}(9+k)$이다. 이때, $\frac{5}{8}(9+k)-9=\frac{5}{8}k-\frac{27}{8}$이므로 $k<5.4$이면 $f(12)=\frac{45}{8}+\frac{5k}{8}$가 최솟값이고, $k>5.4$이면 $f(0)=9$가 최솟값이다.
4-3	이 환자가 어제 오전 9시에 알약 k개를 먹은 후 경과된 시간 t에서 A의 혈중 농도 $f(t)$는 다음과 같다. $$f(t)=\begin{cases}\frac{24}{25}(9+k)t+9(1-t) & 0\le t\le1\\(9+k)e^{-\frac{t}{24}} & 1<t\le12\end{cases}$$ 식약처 권고사항을 만족하게 복용하였기 때문에 $9\le f(12)\le10$를 만족해야 한다. 따라서 $$9\le(9+k)e^{-\frac{1}{2}}\le10\ \Rightarrow\ \frac{144}{10}\le9+k\le\frac{160}{10}$$ $$\Rightarrow\ 5.4\le k\le7$$ 이므로 6개 또는 7개를 복용했을 것이다. 그리고 $f(t)$는 모든 t에 대하여 $8\le f(t)\le16$도 만족해야 한다.

Case 1 : 6개를 복용할 경우

6개를 복용할 경우 오후 9시에 복용하기 직전까지 A의 혈중 농도의 최댓값은 $\frac{24}{25}\times 15 = \frac{72}{5} \le 16$이고, 최솟값은 $9 \ge 8$이다. $f(12) = 15\times\frac{5}{8} = \frac{75}{8}$이고, $9 \le \frac{75}{8} \le 10$이므로 식약처 권고사항을 만족한다. 오후 9시에 알약을 6개 복용한 후 경과된 시간 t에서의 A의 혈중 농도 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{24}{25}\left(\frac{75}{8}+6\right)t + \frac{75}{8}(1-t) & 0 \le t \le 1 \\ \left(\frac{75}{8}+k\right)e^{-\frac{t}{24}} & 1 < t \le 12 \end{cases}$$

이때 $f(t)$의 최댓값은 $\frac{24}{25}\left(\frac{75}{8}+6\right) = \frac{369}{25} \le 16$이고, 최솟값은 $\frac{75}{8} \ge 8$이다.

그리고 $f(12) = \frac{123}{8}\times\frac{5}{8} = \frac{615}{64}$이므로 $9 \le f(12) \le 10$이다.

따라서 첫 복용 할 때와 두 번째 복용 때 모두 식약처 권고사항을 만족한다.

Case 2 : 7개를 복용할 경우

오후 9시에 알약을 복용하기 직전까지 A의 혈중 농도의 최댓값은 $\frac{24}{25}\times 16 = \frac{384}{25} \le 16$이고, 최솟값은 $9 \ge 8$이다. 따라서 첫 복용 시에는 식약처 권고사항을 만족한다. 두 번째 복용 시에는 $f(12) = 16e^{-\frac{1}{2}} = 10$이므로 오후 9시에 알약을 7개 복용한 후 경과된 시간 t에서의 A의 혈중 농도 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{24}{25}(10+7)t + 10(1-t) & 0 \le t \le 1 \\ (10+k)e^{-\frac{t}{24}} & 1 < t \le 12 \end{cases}$$

이다. 이때 $f(t)$의 최댓값은 $\frac{24}{25}\times 17 > 16$이므로 식약처의 권고사항을 만족하지 않는다.

$\therefore$ 매 복용시마다 6개를 복용하면 식약처 권고사항을 만족한다.