▶ 문항카드 3

[건국대학교 문항정보]

1. 일반 정보

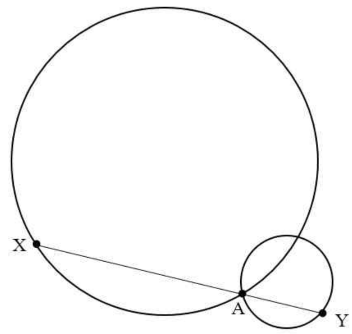
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	KU논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계A(수학) / 문제 1, 2, 3, 4, 5	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 도함수, 치환적분, 부분적분, 중복조합, 합성함수의 미분
예상 소요 시간	100분	

2. 문항 및 제시문

제시문 1

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(나) 그림에서 점 A는 원 $x^2+6x+y^2-8y=0$과 원 $x^2-2x+y^2=0$의 교점이다. 점 A를 지나는 직선이 두 원과 만나는 점이 각각 X, Y이다. (단, X, Y는 A가 아닌 점이다.)

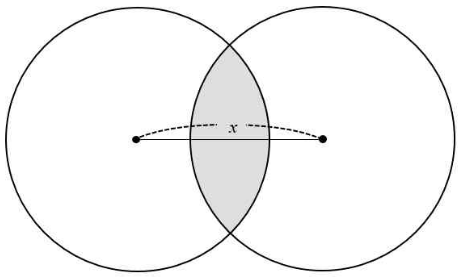


[문제 1] (나)에서 $\overline{\mathrm{XY}}$의 최댓값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [10점]

제시문 2

(가) 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$이다.

(나) 그림에서 두 원의 반지름의 길이는 1이고 중심 사이의 거리는 x이다. 두 원 내부의 공통 부분의 넓이를 $A(x)$라고 하자.

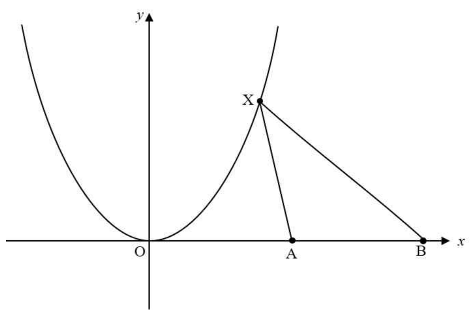


[문제 2] (나)에서 정적분 $\int_0^2 A(x)dx$ 의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [15점]

제시문 3

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,f(a))$에서의 접선의 기울기는 미분계수 $f'(a)$와 같다.

(나) 그림에서 점 X는 곡선 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x^2$ 위의 점이고 점 A, B는 x축 위에 있다.

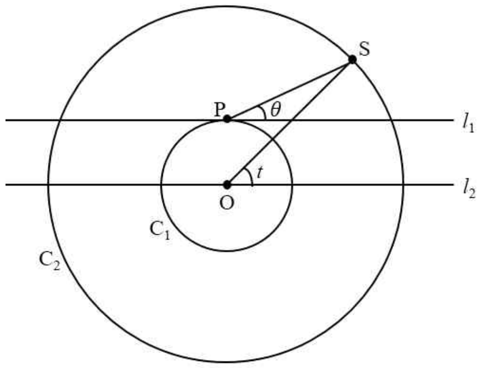


[문제 3] (나)에서 점 A, B의 좌표가 각각 $(2,0)$, $(4,0)$일 때 $\sin(\angle \mathrm{AXB})$의 최댓값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [20점]

제시문 4

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 $y' = f'(g(x))g'(x)$이다.

(나) 그림에서 C_1, C_2는 중심이 O인 동심원이고 C_1의 반지름은 r, C_2의 반지름은 R이다. 직선 l_1은 원 C_1과 점 P에서 접한다. 직선 l_2는 점 O를 지나고 l_1과 평행하다. 점 S는 원 C_2를 따라 돌고 있다. 시각 t일 때 직선 l_2와 직선 OS가 이루는 각의 크기가 t이고, θ는 직선 l_1와 직선 PS가 이루는 각의 크기이다.



[문제 4] (나)에서 $R=4r$ 라고 하자. $\theta=0$일 때의 $\dfrac{d\theta}{dt}$와 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$일 때의 $\dfrac{d\theta}{dt}$를 모두 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [25점]

제시문 5

(가) 실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내자.
예를 들어 $[4]=4$이고 $\left[\frac{21}{5}\right]=4$이다.

(나) 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$은 다음과 같이 정의한다.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{10^k}\right]$$

예를 들어, $f(123)=\left[\frac{123}{10}\right]+\left[\frac{123}{10^2}\right]+\left[\frac{123}{10^3}\right]+\cdots=12+1+0+\cdots=13$이다.

[문제 5]
(나)에서 정의된 함수 $f(n)$을 이용하여 함수 $g(n)$을 다음과 같이 정의한다.

$$g(n)=f(10n)-10f(n)$$

다음을 만족하는 자연수 n의 개수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

$$g(n)=8,\quad 1\le n\le 6200$$

[30점]

3. 출제 의도

[문제1] 주어진 상황을 함수로 수식화하고 미분을 이용하여 최댓값을 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 주어진 영역의 넓이를 각도와 삼각함수를 이용해 표현하고 정적분을 정확히 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 접선을 구하고 최댓값을 가지는 상황에 대한 방정식을 세운 후 고차방정식을 풀 수 있는지 알아본다.

[문제4] 각의 크기가 변화할 때 이를 함수로 나타내고 변화율을 계산할 수 있는지 알아본다. 또한 미분 계산에서 합성함수의 미분을 할 수 있는지 알아본다.

[문제5] 함수식이 주어졌을 때 이에 따라 함수가 정의된 방식을 정확히 이해할 수 있는지 알아본다. 또한 경우의 수에 대한 문제 상황을 조합 및 중복조합을 이용해 표현하고 계산할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 【별책 8】
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 1	수학II - (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 수학 - (1) 기하 ③ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
문제 2	① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문제 3	수학II - (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 수학 - (1) 문자와 식 ② 나머지정리 [10수학01-03] 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문제 4	미적분 - (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
문제 5	확률과통계 - (1) 경우의 수 ① 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. 미적분 - (1) 수열의 극한 ② 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수학II	황선욱 외	미래앤	2021	86
수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2019	69
미적분	박교식 외	동아출판	2020	113
수학I	이준열 외	천재교육	2020	63
수학II	황선욱 외	미래앤	2021	48, 86
미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2018	12
수학	권오남 외	교학사	2020	269
확률과 통계	박교식 외	동아출판	2020	21
미적분	박교식 외	동아출판	2020	101
수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2019	92, 95
확률 및 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2018	23

교과서 외

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
해당없음						

5. 문항 해설

[문제1] 주어진 상황을 함수로 수식화하고 미분을 이용하여 최댓값을 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 주어진 영역의 넓이를 각도와 삼각함수를 이용해 표현하고 정적분을 정확히 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 접선을 구하고 최댓값을 가지는 상황에 대한 방정식을 세운 후 고차방정식을 풀 수 있는지 알아본다.

[문제4] 각의 크기가 변화할 때 이를 함수로 나타내고 변화율을 계산할 수 있는지 알아본다. 또한 미분 계산에서 합성함수의 미분을 할 수 있는지 알아본다.

[문제5] 함수식이 주어졌을 때 이에 따라 함수가 정의된 방식을 정확히 이해할 수 있는지 알아본다. 또한 경우의 수에 대한 문제 상황을 조합 및 중복조합을 이용해 표현하고 계산할 수 있는지 알아본다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: B와 더불어 $\overline{\mathrm{XY}}$에 대한 함수식을 미분함. B: C와 더불어 $\overline{\mathrm{XY}}$에 대한 함수식을 구함. C: 교점을 모두 구함. D: $y=tx$로 놓고 교점을 하나 이상 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	10
2	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: B와 더불어 정적분 계산을 수행함. B: C와 더불어 정적분을 θ에 대한 적분으로 표현함. C: $A(x)$를 θ의 함수로 표현함. D: 부채꼴 또는 삼각형의 넓이를 모두 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	15
3	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 최대가 될 때의 접점을 구함. B: 외접원의 중심을 구함. C: 접선의 기울기를 표현함. D: 접선과의 관련을 파악함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20
4	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $\frac{dt}{d\theta}$의 값을 $\theta=0$일 때 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 중 하나를 계산함. B: 미분을 계산하여 $\frac{d\theta}{dt}$에 대한 식을 얻음. C: θ와 t의 관계식을 구함. D: 문제 풀이에 필요한 적절한 도형을 찾음. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	25
5	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: B와 더불어 중복조합 계산을 진행함. B: $g(n)=8$을 풀기 위해 중복조합의 필요성을 파악함. C: $g(n)$이 n의 자릿수의 합임을 제시함. D: $g(n)$의 의미를 파악하고자 시도함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1번] 답: 거리의 최댓값은 $8\sqrt{2}$

[풀이] 두 개의 원 $x^2+6x+y^2-8y=0 \cdots (1)$,
$x^2-2x+y^2=0 \cdots (2)$

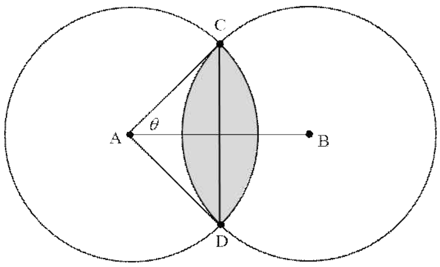
의 교점은 $(0,0),(1,1)$인데 둘 중 어느 점을 지나는 직선을 이용해 계산해도 결과는 같다.

점 $(0,0)$을 지나는 직선 $y=tx$가 원 (1)과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{8t-6}{1+t^2}, \frac{8t^2-6t}{1+t^2}\right)$이고 원 (2)와 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$이다.

이 두 점 사이의 거리의 제곱은 $f(t)=\frac{64(t-1)^2}{(1+t^2)}$이고 $f'(t)=\frac{2(t-1)(t+1)}{(1+t^2)^2}=0$이므로 $t=-1$에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

최댓값은 $f(-1)=2 \cdot 64$ 이다. 그러므로 거리의 최댓값은 $\sqrt{2 \cdot 64}=8\sqrt{2}$.

[문제 2번] 답: $\frac{8}{3}$



[풀이] 두 원의 중심을 A, B라 하고 두 원의 교점을 C, D라 하자. 각 CAB의 크기를 θ라 하자.

부채꼴 CAD의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (2\theta)=\theta$, 삼각형 CAD의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(2\theta)=\frac{\sin 2\theta}{2}$이다.

공통부분의 넓이는 부채꼴 CAD의 넓이에서 삼각형 CAD의 넓이를 뺀 것의 2배이므로

$$A(x)=2\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)=2\theta-\sin 2\theta.$$

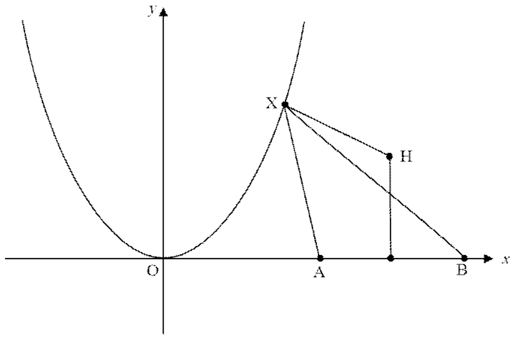
$x=2\cos\theta$이므로 $dx=-2\sin\theta\, d\theta$이다. $x=0$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이고 $x=2$일 때 $\theta=0$이므로

$$\int_0^2 A(x)\,dx = \int_0^2 2\theta - \sin 2\theta\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2\theta - \sin 2\theta)\,(-2\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta - 2\sin\theta\cos\theta)\,(2\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\theta\sin\theta - 4\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$$
$$= \left[-4\theta\cos\theta + 4\sin\theta - \frac{4}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

위 계산에서는 다음 부분적분 및 치환적분이 사용되었다.

$$\int \theta\sin\theta\, d\theta = -\theta\cos\theta + \int \cos\theta\, d\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta + C$$
$$\int \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$$

[문제 3번] 답: $\sin\angle \mathrm{APB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



[풀이] 삼각형 ABX의 외접원의 중심의 좌표를 H(3,b)라 하자. X의 좌표를 $X\left(a, \frac{\sqrt{2}}{4}a^2\right)$라 하자.

HA와 HX의 길이가 같아야 하므로

$$1 + b^2 = (3-a)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{2}}{4}a^2\right) = 9 - 6a + a^2 + b^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 b + \frac{a^4}{8}.$$

이 식을 정리하면

(1) $$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2 b = 8 - 6a + a^2 + \frac{a^4}{8}.$$

직선 HX가 접선과 수직이어야 하므로

(2) $$\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a^2 - b}{a-3} = -1\ .$$

따라서 식 (2)를 정리하면

(3) $$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2 b = \frac{a^4}{4} + a^2 - 3a$$

따라서 (1)과 (3)으로부터

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2b = 8-6a+a^2+\frac{a^4}{8} = \frac{a^4}{4}+a^2-3a$$

이므로

(4) $$\frac{a^4}{8}+3a-8=0$$

를 얻는다. 이 방정식을 풀면 $(a-2)\left(\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}+4\right)=0$에서 $a=2$이다.

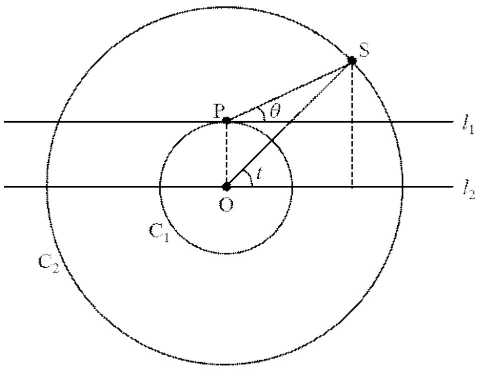
그러므로 $\sin(\angle\mathrm{AXB})$의 값이 최대가 되는 점 X의 좌표는 $(2, \sqrt{2})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AX}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BX}}=\sqrt{6}$이므로 $\angle\mathrm{BAX}=90^\circ$이다.

이로부터 $\sin\angle\mathrm{AXB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

[문제 4번] 답: $\theta'(0)=1$, $\theta'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{3}$

[풀이]



점 S로부터 x축에 수직으로 보조선을 그리면 그림과 같은 도형을 얻는다. 이로부터

(*) $$\tan\theta = \frac{R\sin t - r}{R\cos t}$$

을 얻는다. 이 식을 t에 관해 미분하면

(**) $$\frac{\theta'(t)}{\cos^2\theta} = \frac{R - r\sin t}{R\cos^2 t}$$

(1) $\theta=0$일 때 $\tan\theta=0$이므로 (*)로부터 $\sin t=\frac{r}{R}=\frac{1}{4}$, $\cos t=\frac{\sqrt{15}}{4}$이다.

그러므로 $\theta'(0)=1$이다. (주의: $\theta=0$일 때 $t\neq 0$이다.)

(2) $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때에는 $t=\frac{\pi}{2}$인데, 이를 (**)에 바로 대입하여 답을 얻을 수 없다.

(방법1) (*)에서 $\cos\theta = \frac{R\cos t\sin\theta}{R\sin t - r}$를 (**)에 대입하면

$\theta'(t) = \dfrac{R - r\sin t}{R\cos^2 t} \cdot \cos^2\theta = \dfrac{(R - r\sin t) \cdot R\sin^2\theta}{(R\sin t - r)^2}$

따라서 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \dfrac{\pi}{2}$를 대입하면 $\theta'(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{3r \cdot 4r}{(3r)^2} = \dfrac{4}{3}$

(방법2) (*)에서 $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{R^2\cos^2 t}{R^2 - 2rR\sin t + r^2}$를 (**)에 대입하면

$\theta'(t) = \dfrac{R(R - r\sin t)}{R^2 - 2rR\sin t + r^2}$이고, 이 식에 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \dfrac{\pi}{2}$, $R = 4r$를 대입하면

$\theta'(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{3r \cdot 4r}{(3r)^2} = \dfrac{4}{3}$

[문제 5번] 답: 161개

[풀이] 먼저, $g(n)$은 n의 자리수의 합인 것을 관찰할 수 있다. 예를 들어

$$\begin{aligned} g(5432) &= f(54320) - 10f(5432) \\ &= 5432 + 543 + 54 + 5 - 10(543 + 54 + 5) \\ &= (5432 - 5430) + (543 - 540) + (54 - 50) + 5 \\ &= 2 + 3 + 4 + 5 = 14 \end{aligned}$$

일반적으로 $n = a_1 a_2 \cdots a_m = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1} \cdot 10 + a_m$, 즉 n의 각 자리수가 $a_1, \cdots, a_m$일 때

$$\begin{aligned} g(n) &= f(10n) - 10f(n) \\ &= \left\{(a_1 10^{m-1} + \cdots + a_m) + (a_1 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1}) + \cdots + (a_1 \cdot 10 + a_2) + a_1\right\} \\ &\quad - 10\left\{(a_1 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1}) + (a_1 10^{m-3} + \cdots + a_{m-2}) + \cdots + a_1\right\} \\ &= \left\{(a_1 10^{m-1} + \cdots + a_m) - (a_1 10^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \cdot 10)\right\} \\ &\quad + \left\{(a_1 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1}) - (a_1 10^{m-2} + \cdots + a_{m-2} \cdot 10)\right\} \\ &\quad + \cdots + \left\{(a_1 \cdot 10 + a_2) - a_1 \cdot 10\right\} + a_1 \\ &= a_m + a_{m-1} + \cdots + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

따라서 $g(n) = a_1 + \cdots + a_m$이 성립한다. 즉 $g(n)$은 n의 자리수의 합이다.

4자리 이하의 음이 아닌 정수 $n = a_1 a_2 a_3 a_4$ (즉 $0 \le n \le 9999$인 정수 n) 중에서 $g(n) = 8$을 만족하는 것의 개수는 다음을 만족하는 정수들의 개수와 같다.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

중복조합을 이용하여 구하면 총 개수는 ${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$이다.

이 중에서 첫 번째 자리수가 8인 것은 8000으로 1개가 있는데, 이것은 6200보다 크다.

첫 번째 자리수가 7인 것은 7100, 7010, 7001 이렇게 3개가 있는데, 이들은 모두 6200보다 크다.

첫 번째 자리수가 6인 것은 모두 6200, 6020, 6002, 6110 등 모두 6200 이하이다.

첫 번째 자리수가 5 이하인 것은 모두 6200 이하이다.

따라서 구하는 개수는 $165 - (1 + 3) = 161$개다.

▶ 문항카드 4

[건국대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	KU논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계B(수학) / 문제 1, 2, 3, 4, 5	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	수열의 극한, 중복조합, 삼각함수, 극대와 극소, 합성함수의 미분
예상 소요 시간	100분	

2. 문항 및 제시문

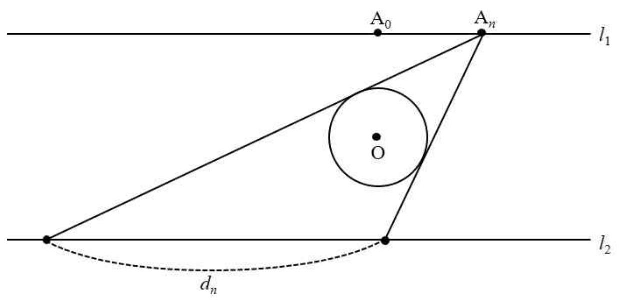
제시문 1

(가) 수열 $\{a_n\}$ 에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$ 은 α에 수렴한다고 하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

와 같이 나타낸다.

(나) 그림에서 반지름의 길이가 1인 원 O가 평행한 직선 l_1, l_2 사이에 놓여 있다. 두 직선 l_1, l_2는 각각 원의 중심 O로부터의 거리가 2이다. 점 A_0은 점 O에서 직선 l_1에 내린 수선의 발이고, 자연수 n에 대하여 점 A_n은 직선 l_1 위에 있고 A_0와의 거리가 n이다. 점 A_n에서 원에 그은 두 접선이 직선 l_2와 만나는 두 점 사이의 거리가 d_n이다.



[문제 1] (나)에서 주어진 수열 $\{d_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n}$ 을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [10점]

제시문 2

(가) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 이고, 중복조합의 수는 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ 이다.

(나) 서로 구별되지 않는 구슬들을 다섯 개의 상자 A, B, C, D, E에 다음 조건을 모두 만족하도록 넣으려 한다.

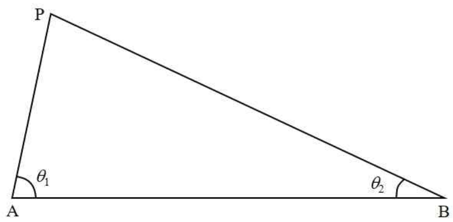
(1) 각 상자에 1개 이상의 구슬을 넣는다.
(2) 상자 A와 B에는 각각 홀수 개의 구슬을 넣는다.
(3) 상자 C와 D에는 각각 짝수 개의 구슬을 넣는다.
(4) 상자 E에 넣는 구슬의 개수는 5의 배수이다.

[문제 2] (나)에서 제시한 방법으로 서로 구별되지 않는 40개의 구슬을 상자에 넣는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [15점]

제시문 3

(가) 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 t의 함수 $x=f(t), y=g(t)$ 로 나타내었을 때, 시각 t에서 점 P의 속도는 $(f'(t), g'(t))$ 로 나타내며, 속력은 $\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}$ 이다.

(나) 그림에서 두 점 A, B 사이의 거리가 1이고 평면 위를 움직이는 점 P에 대해, 시각 t에서 $\angle\mathrm{PAB}=\theta_1$, $\angle\mathrm{PBA}=\theta_2$ 이다.



[문제 3] (나)에서 $t=0$일 때 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2=\frac{\pi}{4}$, $\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{1}{3}$, $\frac{d\theta_2}{dt}=0$ 이라고 하자. $t=0$에서 P의 속력을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [20점]

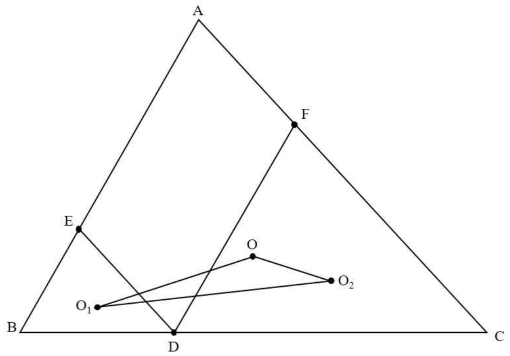
제시문 4

(가) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R라고 하면 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

(나) 그림에서 점 $\mathrm{D, E, F}$는 각각 변 $\mathrm{BC, AB, AC}$위의 점으로 직선 DE는 변 AC에 평행하고 직선 DF는 변 AB에 평행하다. 점 $\mathrm{O}, \mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$는 각각 삼각형 ABC, BDE, DCF의 외접원의 중심이다.

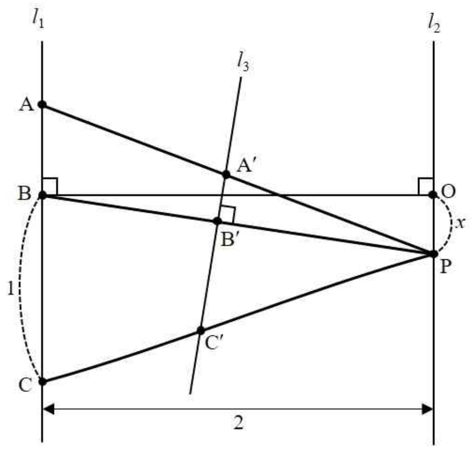


[문제 4] (나)에서 $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{AC}} = 5$, $\overline{\mathrm{BC}} = 6$이고 $\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}} = 1 : 2$일 때 삼각형 $\mathrm{OO_1O_2}$의 넓이를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [25점]

제시문 5

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(나) 그림에서 직선 l_1과 l_2는 평행하다. $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$는 l_1 위의 세 점이고, 점 O는 점 B에서 직선 l_2에 내린 수선의 발이다. 직선 l_2 위의 점 P는 점 O의 아래쪽에 있다. 직선 BP와 수직인 직선 l_3가 선분 AP, BP, CP와 각각 $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$에서 만난다. $\overline{\mathrm{BC}}=1$이고 $\overline{\mathrm{BO}}=2$이다.



[문제 5] (나)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=x$일 때 $\dfrac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{A'C'}}}$와 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 비 $\dfrac{\dfrac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{A'C'}}}}{\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}}$는 x에 대한 식으로 표현된다. 이 식을 $f(x)$라 할 때 $f(x)$가 최소가 되는 x의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [30점]

3. 출제 의도

[문제1] 원의 접선에 대한 문제를 방정식을 세워 해결할 수 있는지 알아본다. 수열의 극한을 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 경우의 수에 대한 문제 상황을 조합 및 중복조합을 이용해 표현하고 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 각의 크기가 변화할 때 이를 함수로 나타내고 변화율을 계산할 수 있는지 알아본다. 또한 미분 계산에서 합성함수의 미분을 할 수 있는지 알아본다.

[문제4] 주어진 도형의 넓이를 삼각함수를 이용해 표현하고 계산할 수 있는지 알아본다. 사인법칙과 코사인법칙을 적절히 적용할 수 있는지 알아본다.

[문제5] 주어진 상황을 사인, 코사인, 탄젠트 등 삼각함수를 적절히 활용하여 파악할 수 있는지 알아본다. 유리함수의 미분을 이용해 최솟값을 계산할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습 내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8]
문항 및 제시문	학습 내용 성취 기준
문제 1	수학 - (1) 기하 3 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. 미적분 - (1) 수열의 극한 1 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문제 2	확률과통계 - (1) 경우의 수 1 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
문제 3	수학I - (2) 삼각함수 1 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 2 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 3 도함수의 활용 [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 4	수학I - (2) 삼각함수 1 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 5	수학I - (2) 삼각함수 1 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학II - (2) 미분 3 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수학II	박교식 외	동아출판	2020	18, 73
수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2019	69, 92, 95
미적분	박교식 외	동아출판	2020	113
수학I	이준열 외	천재교육	2020	63, 98
수학II	황선욱 외	미래앤	2021	48, 86
미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2018	12, 15
수학	권오남 외	교학사	2020	269
확률과 통계	박교식 외	동아출판	2020	21
미적분	박교식 외	동아출판	2020	101
미적분	홍성복 외	지학사	2018	98, 125
확률 및 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2018	23

교과서 외

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
해당없음						

5. 문항 해설

[문제1] 원의 접선에 대한 문제를 방정식을 세워 해결할 수 있는지 알아본다. 수열의 극한을 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 경우의 수에 대한 문제 상황을 조합 및 중복조합을 이용해 표현하고 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 각의 크기가 변화할 때 이를 함수로 나타내고 변화율을 계산할 수 있는지 알아본다. 또한 미분 계산에서 합성함수의 미분을 할 수 있는지 알아본다.

[문제4] 주어진 도형의 넓이를 삼각함수를 이용해 표현하고 계산할 수 있는지 알아본다. 사인법칙과 코사인법칙을 적절히 적용할 수 있는지 알아본다.

[문제5] 주어진 상황을 사인, 코사인, 탄젠트 등 삼각함수를 적절히 활용하여 파악할 수 있는지 알아본다. 유리함수의 미분을 이용해 최솟값을 계산할 수 있는지 알아본다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: d_n의 식을 맞게 구함. B: d_n의 식에 대한 계산을 진행함. C: 접점 또는 접선에 대한 방정식을 씀. D: 직선과 원이 접할 조건을 파악함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	10
2	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 중복조합 계산을 부분적으로 진행함. B: 필요한 계산을 중복조합으로 표현함. C: 부정방정식을 풀기 위해 계산을 진행함. D: 조건에 맞게 부정방정식을 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	15
3	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: θ_1, θ_2의 미분에 대한 식을 구함. B: P의 속력에 대한 식을 구함. C: $\overline{AP}$를 θ_1, θ_2의 함수로 표현함. D: P의 좌표를 표현함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20
4	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 세 사다리꼴의 넓이를 구함. B: 삼각형 O_1BD, O_2DC의 높이를 구함. C: 삼각형 ABC의 높이를 구함. D: 삼각형 ABC의 외접원의 반지름을 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	25
5	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$의 식을 계산함. B: $\angle APC$와 $\angle BPC$의 삼각비를 모두 구함. C: $\angle APC$와 $\angle BPC$의 삼각비 중 하나를 구함. D: $\angle PBO$의 삼각비를 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1번]　답: $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n}=\frac{8}{3}$

[풀이] 좌표평면에서 원은 $x^2+y^2=1$, $l_1: y=2$, $l_2: y=-2$, $\mathrm{A}_n(n,2)$로 두자.
A_n을 지나는 직선 $l: y=k(x-n)+2$과 원이 접할 조건 $\frac{|nk-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ 로부터
이차방정식 $(n^2-1)k^2-4nk+3=0$을 얻는다. 이 방정식의 두 근을 k_1, k_2라 하면
$k_1+k_2=\frac{4n}{n^2-1}$, $k_1k_2=\frac{3}{n^2-1}$이다. 그러므로
$(k_1-k_2)^2=(k_1+k_2)^2-4k_1k_2=\frac{4n^2+12}{(n^2-1)^2}$ 이다.
직선 $l: y=k(x-n)+2$ 이 $l_2: y=-2$ 와 만나는 점의 x좌표는 $x=n-\frac{4}{k}$
따라서 $d_n=\left|(n-\frac{4}{k_1})-(n-\frac{4}{k_2})\right|=4\left|\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}\right|=\frac{4}{3}\sqrt{4n^2+12}$
그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n}=\frac{8}{3}$

[문제 2번]　답: 585가지

[풀이] 다음 조건을 만족하는 방정식의 정수해의 개수를 구한다.

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=40$$

(조건) x_1, x_2 는 홀수, x_3, x_4는 짝수, 그리고 x_5는 5의 배수

정수 k_1, k_2, k_3, k_4와 정수 t에 대하여

$$x_1=2k_1+1, x_2=2k_2+1, x_3=2k_3+2, x_4=2k_4+2, x_5=5t+5$$

로 나타낼 수 있으므로, 위의 방정식에서

$$40=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2(k_1+k_2+k_3+k_4)+11+5t,\ (k_i\ge 0,\ t\ge 0)$$

이다. 따라서 다음 방정식의 정수해의 개수를 구하면 된다.

$$2(k_1+k_2+k_3+k_4)=29-5t,\ (k_i\ge 0,\ t\ge 0)$$

이때, $t=1,3,5$일 때만 정수해가 존재한다.
(1) $t=1$일 때,

$$k_1+k_2+k_3+k_4=\frac{1}{2}(29-5t)=12,\ (k_i\ge 0)$$

이므로 해의 개수는 ${}_4H_{12}={}_{4+12-1}C_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3$

(2) $t=3$일 때,

$$k_1+k_2+k_3+k_4=\frac{1}{2}(29-5t)=7,\ (k_i \ge 0)$$

이므로 해의 개수는 ${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3$

(3) $t=5$일 때,

$$k_1+k_2+k_3+k_4=\frac{1}{2}(29-5t)=2,\ (k_i \ge 0)$$

이므로 해의 개수는 ${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2={}_5C_3$

따라서 (1), (2), (3)에 의하여 구슬을 상자에 넣는 방법의 수는

$${}_{15}C_3+{}_{10}C_3+{}_5C_3=455+120+10=585.$$

[문제 3번] 답: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

[풀이]

$\overline{\mathrm{PA}}=r$로 두고 직선 AB를 x축으로 생각하면 P의 좌표는 $(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1)$이다. (1)

이때 θ_1, θ_2, r은 모두 t의 함수이다.

따라서 속도는 $(r'\cos\theta_1-r\theta'\sin\theta_1, r'\sin\theta_1+r\theta'\cos\theta_1)$이고 속력은

$\sqrt{(r')^2+r^2(\theta_1{}')^2}$ 이다. (2)

사인법칙에 의해 $r=\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$. (3)

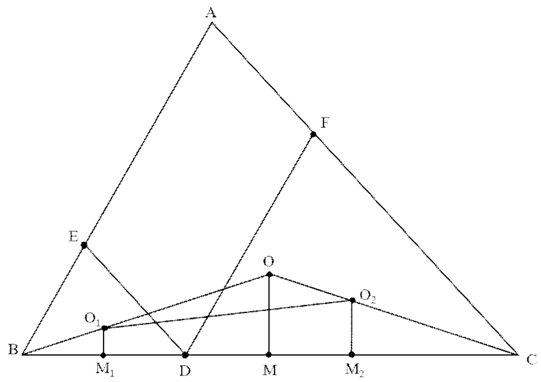
$r(0)=1$이다. (4)

식 (3)을 미분한 후 $t=0$일 때의 조건을 대입하면

$$r'(0)=\frac{\cos\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2)\theta_2{}'-\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)(\theta_1{}'+\theta_2{}')}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}=\frac{1}{3} \quad (5)$$

그러므로 속력은 $\frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

[문제 4번] 답: $\frac{2}{21}\sqrt{7}$



[풀이] 삼각형 ABC에 코사인정리를 적용하면

$\cos\angle A = \dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5} = \dfrac{1}{8}$ 이다. 이로부터 $\sin\angle A = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

사인정리를 적용하면 $2R\sin\angle A = 6$, 따라서 $R = \dfrac{8}{\sqrt{7}}$.

선분 BC, BD, DC의 중점을 각각 M, M_1, M_2라 하자.

삼각형 ABC, EBD, FDC가 닮은 삼각형으로 닮음비가 $3:1:2$이다.

$\angle COM = \angle A$, $\overline{CO} = R$이므로 $\overline{OM} = \overline{OC}\cos\angle A = \dfrac{8}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

닮음비를 이용하면 $\overline{OM_1} = \dfrac{1}{3\sqrt{7}}$, $\overline{OM_2} = \dfrac{2}{3\sqrt{7}}$ 임을 알 수 있다.

사각형 OO_1M_1M, OMM_2O_2, $O_1M_1M_2O_2$의 넓이는 각각

$$\frac{1}{2}(\overline{OM}+\overline{O_1M_1})\cdot\overline{MM_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{3\sqrt{7}}\right)\cdot 1 = \frac{2}{3\sqrt{7}},$$

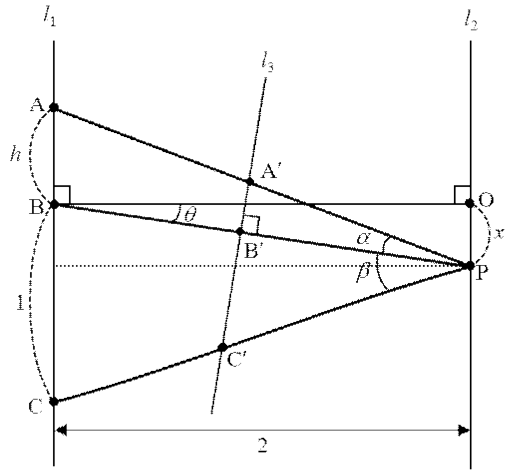
$$\frac{1}{2}(\overline{OM}+\overline{O_2M_2})\cdot\overline{MM_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{2}{3\sqrt{7}}\right)\cdot 2 = \frac{5}{3\sqrt{7}}$$

$$\frac{1}{2}(\overline{O_1M_1}+\overline{O_2M_2})\cdot\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{7}}+\frac{2}{3\sqrt{7}}\right)\cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

그런데 삼각형 OO_1O_2의 넓이는 사각형 OO_1M_1M와 OMM_2O_2의 넓이의 합에서 사각형 $O_1M_1M_2O_2$의 넓이를 뺀 것과 같다. 따라서 삼각형 OO_1O_2의 넓이는 $\dfrac{2}{21}\sqrt{7}$ 이다.

[문제 5번] 답: $x=2$일 때 최솟값을 가진다.

[풀이]



$\angle\mathrm{OBP}=\theta$라고 하면 $\tan\theta=\dfrac{x}{2}$. (1)

$\angle\mathrm{BPA}=\alpha$, $\angle\mathrm{BPC}=\beta$, $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{h}$라고 하면

$\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{x+h}{2}$, $\tan(\beta-\theta)=\dfrac{1-x}{2}$ 이다. (2)

그러면 $\tan\alpha=\tan(\alpha+\theta-\theta)=\dfrac{2h}{x^2+hx+4}$ (3)

$\tan\beta=\tan(\beta-\theta+\theta)=\dfrac{2}{x^2-x+4}$

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{\mathrm{h}}{1+\mathrm{h}}$, $\dfrac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{A'C'}}}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{h}{h+1}\dfrac{x^2-x+4}{x^2+4}$ (4)

그러면 $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x^2+4}$. (5)

미분하여 최솟값을 구하면 $x=2$일 때 최솟값을 가짐을 알 수 있다.