2. 자연 · 공학 계열 / 간호학과

【자연·공학/간호학과 1】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연과학 · 공학계열 및 간호학과 / 문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	복소수와 이차 방정식, 삼차방정식, 이차부등식과 이차함수의 관계
예상 소요 시간	30분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 함수 $f(x)$와 실수 k, 복소수 z는 다음 조건을 만족시킨다. (단, $i=\sqrt{-1}$)

> (가) $f(x)=2x^3-2(k+2)x^2+(k^2+4k-6)x-2k^2+12$
>
> (나) $3z-1$은 방정식 $f(x)=0$의 한 허근이다.
>
> (다) $3z-1$은 $2z-\dfrac{5}{3}i$의 켤레복소수이다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 집합을 S라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 $\left|ax^2-2(a+3)x+11\right| \le \dfrac{|f'(x)|}{2}$ 이다.

논제 1. (15점) 제시문 (ㄱ)의 k의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (15점) 제시문 (ㄴ)의 집합 S를 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

가) 다항식의 인수분해를 하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
나) 복소수의 성질을 이해하고 활용할 수 있는지 확인한다.
다) 다항함수의 도함수를 구할 수 있는지 확인한다.
라) 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고 이차부등식을 풀 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	**[수학] – (1) 문자와 식 – 1 다항식의 연산** [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. **[수학] – (1) 문자와 식 – 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.
제시문 (ㄴ)	**[수학] – (1) 문자와 식 – 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. **[수학] – (3) 수와 연산 – 2 명제** [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. **[수학 II] – (2) 미분 – 2 도함수** [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
논제 1	**[수학] – (1) 문자와 식 – 1 다항식의 연산** [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. **[수학] – (1) 문자와 식 – 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-05] 복소수의 뜻과 성질을 이해하고 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.
논제 2	**[수학] – (1) 문자와 식 – 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. **[수학] – (3) 수와 연산 – 2 명제** [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. **[수학 II] – (2) 미분 – 2 도함수** [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2020	43−88, 159−192
	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	46−98, 166−206
	수학	박교식 외	동아출판	2021	41−89, 163−200

	수학 Ⅱ	김원경 외	비상	2020	51-95
	수학 Ⅱ	이준열 외	천재교육	2021	52-102
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책 신사고	2021	53-99

5. 문항 해설

1) 복소수의 성질을 이해하고 활용할 수 있는지 확인한다.
2) 다항함수의 도함수를 구할 수 있는지 확인한다.
3) 다항식의 인수분해를 하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
4) 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고 이차부등식을 풀 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제 1	제시문 (ㄱ)의 (가)에 의해서 $$f(x)=(x-2)\left(2x^2-2kx+k^2-6\right)$$ 실수 α, β에 대하여 $z=\alpha+\beta i$라 하자. 제시문 (ㄱ)의 (다)에 의해서 $$3\alpha-1-3\beta i=\overline{3z-1}=2z-\frac{5}{3}i=2\alpha+\left(2\beta-\frac{5}{3}\right)i$$ 이 되고 $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{3}$이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 한 허근은 $3z-1=2+i$이다.	10
	$f(2+i)=i\left(2(3+4i)-2k(2+i)+k^2-6\right)=(k-4)(2+ki)=0$ 이므로 $k=4$이다.	5
논제 2	$f(x)=2x^3-12x^2+26x-20$이므로 $f'(x)=6x^2-24x+26=6(x-2)^2+2>0$이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $$-3x^2+12x-13\le ax^2-2(a+3)x+11\le 3x^2-12x+13$$ 즉, $$\begin{cases}(3-a)x^2-2(3-a)x+2\ge 0\\(a+3)x^2-2(a+9)x+24\ge 0\end{cases}$$ 을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 집합이 S이다.	3
	1) $a=3$인 경우 모든 실수 x에 대하여	4

	$(3-a)x^2-2(3-a)x+2=2\geq 0$ 이고 $(a+3)x^2-2(a+9)x+24=6(x-2)^2\geq 0$ 이다. 따라서 $a=3$은 집합 S의 원소이다. 2) $a=-3$인 경우 $x=3$ 일 때, $(a+3)x^2-2(a+9)x+24=-12(x-2)=-12<0$이다. 따라서 $a=-3$은 집합 S의 원소가 아니다.	
	3) $a\neq 3$, $a\neq -3$인 경우 모든 실수 x에 대하여 위의 두 이차부등식이 성립하기 위한 조건은 $3-a>0,\quad (3-a)^2-2(3-a)=(a-1)(a-3)\leq 0$ 이고 $a+3>0,\quad (a+9)^2-24(a+3)=(a-3)^2\leq 0$ 이다. 따라서 $a\neq 3$, $a\neq -3$인 실수 a는 집합 S의 원소가 아니다.	6
	1), 2), 3)에 의해서 $S=\{3\}$.	2

7. 예시 답안

논제 1.

제시문 (ㄱ)의 (가)에 의해서

$$f(x)=(x-2)\left(2x^2-2kx+k^2-6\right)$$

실수 α, β에 대하여 $z=\alpha+\beta i$라 하자. 제시문 (ㄱ)의 (다)에 의해서

$$3\alpha-1-3\beta i=\overline{3z-1}=2z-\frac{5}{3}i=2\alpha+\left(2\beta-\frac{5}{3}\right)i$$

이 되고 $\alpha=1$, $\beta=\dfrac{1}{3}$이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 한 허근은 $3z-1=2+i$이다.

$$f(2+i)=i\left(2(3+4i)-2k(2+i)+k^2-6\right)=(k-4)(2+ki)=0$$

이므로 $k=4$이다.

논제 2.

$f(x)=2x^3-12x^2+26x-20$이므로 $f'(x)=6x^2-24x+26=6(x-2)^2+2>0$이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여

$$-3x^2+12x-13\leq ax^2-2(a+3)x+11\leq 3x^2-12x+13$$

즉,

$$\begin{cases}(3-a)x^2-2(3-a)x+2\geq 0\\ (a+3)x^2-2(a+9)x+24\geq 0\end{cases}$$

을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 집합이 S이다.

1) $a=3$인 경우

모든 실수 x에 대하여

$(3-a)x^2-2(3-a)x+2=2\geq 0$ 이고 $(a+3)x^2-2(a+9)x+24=6(x-2)^2\geq 0$이다. 따라서 $a=3$은 집합 S의 원소이다.

2) $a=-3$인 경우

$x=3$일 때, $(a+3)x^2-2(a+9)x+24=-12(x-2)=-12<0$이다. 따라서 $a=-3$은 집합 S의 원소가 아니다.

3) $a\neq 3$, $a\neq -3$인 경우

모든 실수 x에 대하여 위의 두 이차부등식이 성립하기 위한 조건은

$$3-a>0,\quad (3-a)^2-2(3-a)=(a-1)(a-3)\leq 0$$

이고

$$a+3>0,\quad (a+9)^2-24(a+3)=(a-3)^2\leq 0$$

이다. 따라서 $a\neq 3$, $a\neq -3$인 실수 a는 집합 S의 원소가 아니다.

1), 2), 3)에 의해서 $S=\{3\}$.

【자연·공학/간호학과 2】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연과학 · 공학계열 및 간호학과 / 문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II
	핵심개념 및 용어	극대와 극소, 함수의 그래프, 도함수의 활용, 정적분, 미분과 적분의 관계
예상 소요 시간	30분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=0$
>
> (나) 임의의 실수 t에 대하여 $\int_0^t f(5+x)\,dx = \int_0^t f(5-x)\,dx$이다.
>
> (다) $f(x)$는 $x=10$에서 극값을 가진다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 실수 M은 다음 조건을 만족시킨다.

> 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 양의 실근의 개수를 n이라 할 때,
>
> (가) $0<k<M$ 이면 $n=3$
>
> (나) $k>M$ 이면 $n=1$

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 실수 a, b, c는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 < a < b < c$
>
> (나) $f(a) = f(b) = f(c)$
>
> (다) $c - a = \sqrt{70}$

논제 1. (15점) 제시문 (ㄴ)의 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (15점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$와 제시문 (ㄷ)의 a에 대하여 $f(a)$의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

가) 정적분의 뜻을 알고 미분과 적분의 관계를 활용할 수 있는지 확인한다.
나) 함수의 극대, 극소의 의미를 활용할 수 있는지 확인한다.
다) 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 파악할 수 있는지 확인한다.
라) 방정식과 부등식에 대한 문제에 도함수를 활용하여 해결할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학 II] – (2) 미분 – 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [수학 II] – (3) 적분 – 2 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
제시문 (ㄴ)	[수학 II] – (2) 미분 – 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (ㄷ)	[수학 II] – (2) 미분 – 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
논제 1	[수학 II] – (2) 미분 – 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [수학 II] – (2) 미분 – 3 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

	[수학 II] – (3) 적분 – ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
논제 2	**[수학 II] –** (2) 미분 – ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **[수학 II] –** (2) 미분 – ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	류희찬 외	천재교과서	2021	50-149
	수학 II	김원경 외	비상교육	2021	50-142
	수학 II	고성은 외	좋은책 신사고	2021	53-151

5. 문항 해설

1) 함수의 극대, 극소의 의미, 미분과 적분의 관계를 알고 이를 활용하여 사차함수를 구할 수 있는지 확인한다.
2) 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 파악하고 이를 통해 방정식의 근의 개수를 파악할 수 있는지 확인한다.
3) 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 파악하고 이를 통해 방정식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제 1	$\int_0^t f(5+x)\,dx = \int_0^t f(5-x)\,dx$의 양변을 t에 대하여 미분하면 $f(5+t)=f(5-t)$이다. $g(x)=f(x+5)$라 하면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $g(x)=x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ 이다. 그런데, 임의의 실수 t에 대하여 $g(t)=f(t+5)=f(5-t)=g(-t)$, 즉 $t(c_3t^2+c_1)=0$이다. $t=1$일 때 $c_3+c_1=0$이고, $t=2$일 때 $4c_3+c_1=0$이므로 $c_3=c_1=0$이다. 따라서 $g(x)=x^4+c_2x^2+c_0$ 이다. $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프이므로 제시문 (ㄱ)의 (가)와 (다)에 의해 $g(-5)=0$이고 $g(x)$는 $x=5$에서 극값을 가진다. 그러므로 $g(-5)=625+25c_2+c_0=0$, $g'(5)=500+10c_2=0$, 즉 $c_2=-50$, $c_0=625$이다.	10

	따라서 $g(x)=x^4-50x^2+625=(x^2-25)^2=(x-5)^2(x+5)^2$, $f(x)=g(x-5)=x^2(x-10)^2$ 이다.	
	함수 $f(x)$는 $x=0,\ 10$에서 극솟값 $f(0)=f(10)=0$을 가지고, $x=5$에서 극댓값 $f(5)=625$을 갖는다. 따라서 방정식 $x^2(x-10)^2=k$의 서로 다른 양의 실근의 개수는 $0<k<625$일 때 3이고, $k>625$일 때 1이다. 그러므로 $M=625$이다.	5
논제 2	$f(a)=f(b)=f(c)=k$라 하자. $a,\ b,\ c$가 방정식 $f(x)=k$, 즉 $x^2(x-10)^2=k$의 서로 다른 세 양의 실근이므로 $0<k<625$이다. $g(x)=f(x+5)=(x^2-25)^2=x^4-50x^2+625$라 하면, 함수 $y=g(x)$는 $x=-5$, $x=5$에서 극솟값 $g(-5)=g(5)=0$을 가지고 $x=0$에서 극댓값 $g(0)=625$를 가진다. 그러므로 방정식 $g(x)=k$는 서로 다른 네 실근 $-\beta,\ -\alpha,\ \alpha,\ \beta$ (단, $0<\alpha<5<\beta$)를 갖는다. 따라서 $$g(x)-k=(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta)=x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2$$ 이다. 또한 $g(x)-k=x^4-50x^2+625-k$이므로 $\alpha^2+\beta^2=50$, $\alpha^2\beta^2=625-k$이다. $f(5-\beta)=g(-\beta)=k$, $f(5-\alpha)=g(-\alpha)=k$, $f(5+\alpha)=g(\alpha)=k$, $f(5+\beta)=g(\beta)=k$이므로 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 네 실근은 $5-\beta,\ 5-\alpha,\ 5+\alpha,\ 5+\beta$이다. $0<\alpha<5<\beta$이므로 $5-\beta<0<5-\alpha<5+\alpha<5+\beta$가 되어 $a=5-\alpha,\ b=5+\alpha,\ c=5+\beta$이다.	10
	제시문 (ㄷ)의 (다)에 의해 $c-a=\sqrt{70}$ 이므로 $2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)=(c-a)^2-50=20$, 즉 $\alpha\beta=10$이다. 따라서 $100=\alpha^2\beta^2=625-k$이고, $f(a)=k=525$이다.	5

7. 예시 답안

논제 1.

$\int_0^t f(5+x)\,dx=\int_0^t f(5-x)\,dx$의 양변을 t에 대하여 미분하면 $f(5+t)=f(5-t)$이다.

$g(x)=f(x+5)$라 하면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$g(x)=x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ 이다.

그런데, 임의의 실수 t에 대하여 $g(t)=f(t+5)=f(5-t)=g(-t)$, 즉 $t(c_3t^2+c_1)=0$이다. $t=1$일 때 $c_3+c_1=0$이고, $t=2$일 때 $4c_3+c_1=0$이므로 $c_3=c_1=0$이다.

따라서 $g(x)=x^4+c_2x^2+c_0$ 이다.

$y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프이므로 제시문 (ㄱ)의 (가)와 (다)에 의해 $g(-5)=0$이고 $g(x)$는 $x=5$에서 극값을 가진다.

그러므로 $g(-5)=625+25c_2+c_0=0$, $g'(5)=500+10c_2=0$, 즉 $c_2=-50$, $c_0=625$이다.

따라서 $g(x)=x^4-50x^2+625=(x^2-25)^2=(x-5)^2(x+5)^2$,
$f(x)=g(x-5)=x^2(x-10)^2$ 이다.
함수 $f(x)$는 $x=0$, 10에서 극솟값 $f(0)=f(10)=0$을 가지고, $x=5$에서 극댓값 $f(5)=625$을 갖는다.
따라서 방정식 $x^2(x-10)^2=k$의 서로 다른 양의 실근의 개수는 $0<k<625$일 때 3이고, $k>625$일 때 1이다. 그러므로 $M=625$이다.

논제 2.

$f(a)=f(b)=f(c)=k$라 하자. a, b, c가 방정식 $f(x)=k$, 즉 $x^2(x-10)^2=k$의 서로 다른 세 양의 실근이므로 $0<k<625$이다.

$g(x)=f(x+5)=(x^2-25)^2=x^4-50x^2+625$라 하면, 함수 $y=g(x)$는 $x=-5$, $x=5$에서 극솟값 $g(-5)=g(5)=0$을 가지고 $x=0$에서 극댓값 $g(0)=625$를 가진다. 그러므로 방정식 $g(x)=k$는 서로 다른 네 실근 $-\beta$, $-\alpha$, α, β (단, $0<\alpha<5<\beta$)를 갖는다. 따라서

$$g(x)-k=(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta)=x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2$$

이다. 또한 $g(x)-k=x^4-50x^2+625-k$이므로 $\alpha^2+\beta^2=50$, $\alpha^2\beta^2=625-k$이다.

$f(5-\beta)=g(-\beta)=k$, $f(5-\alpha)=g(-\alpha)=k$, $f(5+\alpha)=g(\alpha)=k$, $f(5+\beta)=g(\beta)=k$이므로 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 네 실근은 $5-\beta$, $5-\alpha$, $5+\alpha$, $5+\beta$이다. $0<\alpha<5<\beta$이므로 $5-\beta<0<5-\alpha<5+\alpha<5+\beta$가 되어 $a=5-\alpha$, $b=5+\alpha$, $c=5+\beta$이다.
제시문 (ㄷ)의 (다)에 의해 $c-a=\sqrt{70}$ 이므로
$2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)=(c-a)^2-50=20$, 즉 $\alpha\beta=10$이다.
따라서 $100=\alpha^2\beta^2=625-k$이고, $f(a)=k=525$이다.

【자연·공학/간호학과 3】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연과학 · 공학계열 및 간호학과 / 문항 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	평면좌표, 직선의 방정식, 점과 직선 사이의 거리, 원의 방정식, 원과 직선의 위치 관계
예상 소요 시간	30분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-5, 0)$, $\mathrm{B}(-4, 3)$에 대하여 두 점 C, D는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 원 $x^2+y^2=9$ 위의 두 점 C, D에서의 접선은 모두 점 A를 지난다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{BC}} < \overline{\mathrm{BD}}$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 네 점 A, B, C, D에 대하여 삼각형 ABC와 삼각형 ABD의 넓이 중 더 큰 값을 S라 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 점 A와 다음 조건을 만족시키는 모든 점 P, Q에 대하여 삼각형 APQ의 넓이의 최댓값을 M이라 하자.

(가) 두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2=18$ 위에 있다.

(나) $\overline{\mathrm{PQ}}=6$

(다) 세 점 A, P, Q는 한 직선 위에 있지 않다.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄴ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㄷ)의 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

가) 원과 직선의 위치 관계를 활용할 수 있는지 확인한다.
나) 원의 방정식을 구하고 점과 직선 사이의 거리를 활용할 수 있는지 확인한다.
다) 원의 방정식과 직선의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학] – (2)기하 – 1 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학] – (2)기하 – 3 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
제시문 (ㄴ)	[수학] – (2)기하 – 2 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
제시문 (ㄷ)	[수학] – (2)기하 – 3 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
논제 1	[수학] – (2)기하 – 1 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학] – (2)기하 – 2 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학] – (2)기하 – 3 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

논제 2	[수학] – ⑵기하– $\boxed{2}$ 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학] – ⑵기하 – $\boxed{3}$ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2021	80-151
	수학	박교식 외	동아출판	2021	73-142
	수학	김원경 외	비상교육	2021	71-140

5. 문항 해설

1) 원과 직선의 관계를 알고 이를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지 확인한다.
2) 점과 직선의 거리를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.
3) 원과 직선의 관계를 파악하고 이를 통해 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제 1	원 $x^2+y^2=9$ 위의 한 점 (a,b)에서의 접선이 점 A를 지난다고 하자. 접선의 방정식은 $ax+by=9$이고, 이 접선이 점 $\mathrm{A}(-5,0)$를 지나므로 $-5a=9$이다. 즉, $a=-\dfrac{9}{5}$이다. 점 (a,b)는 원 위에 있으므로 $a^2+b^2=9$이고, $b=\pm\dfrac{12}{5}$이다. 제시문 (ㄱ)에 의하여 $\mathrm{C}\left(-\dfrac{9}{5},\dfrac{12}{5}\right)$이고 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{12}{5}\right)$이다.	10
	$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10}$이고 직선 AB의 방정식은 $3x-y+15=0$이므로 점 C, D에서 직선 AB까지의 거리는 각각 $\dfrac{\lvert-27-12+75\rvert}{5\sqrt{10}}=\dfrac{36}{5\sqrt{10}}$, $\dfrac{\lvert-27+12+75\rvert}{5\sqrt{10}}=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$이다. 따라서 $S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\dfrac{12}{\sqrt{10}}=6$	10
논제 2	두 점 P, Q의 중점을 $\mathrm{R}(c,d)$라 하자. 원점 O에 대해 삼각형 OPQ는 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=3\sqrt{2}$인 이등변삼각형이므로 선분 PQ와 선분 OR은 수직이고 $\overline{\mathrm{OR}}^2+\overline{\mathrm{RP}}^2=18$, 즉 $\overline{\mathrm{OR}}=3$이다.	8

	따라서 직선 PQ는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $\mathrm{R}(c,d)$에서의 접선, $cx+dy=9$와 같다. 논제 1에서 $c=-\frac{9}{5}$이면 점 A, P, Q가 한 직선 위에 있으므로 $-3 \le c \le 3$, $c \ne -\frac{9}{5}$이다.	
	역으로 원 $x^2+y^2=9$ 위의 한 점 $\mathrm{R}(c,d)$ (단, $-3 \le c \le 3$, $c \ne -\frac{9}{5}$)에서의 접선이 원 $x^2+y^2=18$과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면 점 P, Q는 제시문 (ㄷ)의 조건을 모두 만족시킨다.	6
	삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\frac{\lvert 5c+9\rvert}{\sqrt{c^2+d^2}}=\lvert 5c+9\rvert$이므로 $-3 \le c \le 3$, $c \ne -\frac{9}{5}$일 때 $\lvert 5c+9\rvert$의 최댓값이 M이다. 따라서 $M=\lvert 5\times3+9\rvert=24$이다.	6

7. 예시 답안

논제 1.

원 $x^2+y^2=9$ 위의 한 점 (a,b)에서의 접선이 점 A를 지난다고 하자. 접선의 방정식은 $ax+by=9$이고, 이 접선이 점 $\mathrm{A}(-5,0)$를 지나므로 $-5a=9$이다. 즉, $a=-\frac{9}{5}$이다.

점 (a,b)는 원 위에 있으므로 $a^2+b^2=9$이고, $b=\pm\frac{12}{5}$이다.

제시문 (ㄱ)에 의하여 $\mathrm{C}\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$이고 $\mathrm{D}\left(-\frac{9}{5},-\frac{12}{5}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10}$이고 직선 AB의 방정식은 $3x-y+15=0$이므로 점 C, D에서 직선 AB까지의 거리는 각각 $\frac{\lvert -27-12+75\rvert}{5\sqrt{10}}=\frac{36}{5\sqrt{10}}$, $\frac{\lvert -27+12+75\rvert}{5\sqrt{10}}=\frac{12}{\sqrt{10}}$이다.

따라서 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{12}{\sqrt{10}}=6$

논제 2.

두 점 P, Q의 중점을 $\mathrm{R}(c,d)$라 하자. 원점 O에 대해 삼각형 OPQ는 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=3\sqrt{2}$인 이등변삼각형이므로 선분 PQ와 선분 OR은 수직이고 $\overline{\mathrm{OR}}^2+\overline{\mathrm{RP}}^2=18$, 즉 $\overline{\mathrm{OR}}=3$이다.

따라서 직선 PQ는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $\mathrm{R}(c,d)$에서의 접선, $cx+dy=9$와 같다.

논제 1에서 $c=-\frac{9}{5}$이면 점 A, P, Q가 한 직선 위에 있으므로 $-3 \le c \le 3$, $c \ne -\frac{9}{5}$이다.

역으로 원 $x^2+y^2=9$ 위의 한 점 $\mathrm{R}(c,d)$ (단, $-3 \le c \le 3$, $c \ne -\frac{9}{5}$)에서의 접선이 원 $x^2+y^2=18$과 만나는 두 점을 각각 P,Q라 하면 점 P,Q는 제시문 (ㄷ)의 조건을 모두 만족시킨다.
삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\frac{|5c+9|}{\sqrt{c^2+d^2}}=|5c+9|$이므로 $-3 \le c \le 3$, $c \ne -\frac{9}{5}$일 때 $|5c+9|$의 최댓값이 M이다. 따라서 $M=|5\times3+9|=24$이다.

3. 의예과/약학과

【의예/약학 1】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 / 약학과 문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심개념 및 용어	집합, 제곱근, 로그
예상 소요 시간	의예과 25분(총 100분) / 약학과 30분(총 90분)	

2. 문항 및 제시문

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (160점)

(ㄱ) 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 집합을 A라고 하자.

모든 실수 x에 대하여 $\log_{\left(\frac{1}{2}k-5\right)}\{-(k-11)x^2+(k-11)x+2\}$가 정의된다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 집합 A에 대하여 집합 B를 다음과 같이 정의한다.

$$B=\left\{(m,n)\,\middle|\,\frac{1}{3}m^2+n\in A,\ n>1,\ m\text{과 } n\text{은 정수}\right\}$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 집합 B에 대하여 집합 C를 다음과 같이 정의한다.

$$C = \{(m,n) \mid (m,n) \in B\text{이고, } x^n = m\text{을 만족하는 실수 } x\text{가 존재한다.}\}$$

(ㄹ) **[a 의 n 제곱근]** n이 2 이상의 정수일 때, n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^n = a$를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

논제. (160점) 제시문 (ㄷ)의 집합 C의 원소의 개수를 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

1) 집합을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
2) 로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
3) 제곱근을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	**[수학]** – (3) 수와 연산 – ① 집합 [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. **[수학 Ⅰ]** – (1) 지수함수와 로그함수 – ① 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
제시문 (ㄴ)	**[수학]** – (3) 수와 연산 – ① 집합 [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
제시문 (ㄷ)	**[수학]** – (3) 수와 연산 – ① 집합 [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. **[수학]** – (5) 확률과 통계 – ① 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. **[수학 Ⅰ]** – (1) 지수함수와 로그함수 – ① 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
제시문 (ㄹ)	**[수학 Ⅰ]** – (1) 지수함수와 로그함수 – ① 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
논제	**[수학]** – (3) 수와 연산 – ① 집합 [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2021	163-183
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	165-182
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	175-192
	수학 Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2021	12-18, 29-35
	수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2021	11-15, 23-28
	수학 Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2021	11-15, 26-31

5. 문항 해설

1) 집합을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
2) 로그를 이해하고 로그가 정의되는 조건을 이해하는지를 평가한다.
3) 제곱근을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	모든 실수 x에 대해, $\log_{\left(\frac{1}{2}k-5\right)}\left(-(k-11)x^2+(k-11)x+2\right)$가 정의되기 위한 실수 k는 ① $\frac{1}{2}k-5>0$, $\frac{1}{2}k-5\neq1$, ② 모든 실수 x에 대해, $-(k-11)x^2+(k-11)x+2>0$이 성립해야 한다. ① $\frac{1}{2}k-5>0$, $\frac{1}{2}k-5\neq1 \Rightarrow k>10$, $k\neq12$ ② ㉠ $k\neq11$일 때 $-(k-11)>0$이고 $D=(k-11)^2-4(-2(k-11))=(k-3)(k-11)<0$이므로 $3<k<11$이다.	40
	㉡ $k=11$일 때 $-(k-11)x^2+(k-11)x+2=2>0$이 성립한다. 따라서, ㉠, ㉡에 의해 이를 만족하는 실수 k의 범위는 $3<k\leq11$이다. ①, ②에 의해, 집합 $A=\{k\vert 10<k\leq11\}$이다.	20
	제시문 (ㄴ)의 집합 B의 정의에 의해, $n>1$이면서 집합 B의 원소인 정수의 순서쌍 (m,n)은	50

	$10<\frac{1}{3}m^2+n\le 11 \quad\Rightarrow\quad 10-\frac{1}{3}m^2<n\le 11-\frac{1}{3}m^2$ 을 만족시키므로, 집합 B에 속하는 원소를 모두 나열해보면 다음과 같다. $m=\ 0\ :\ 10<n\le 11 \quad\Rightarrow n=11$ $m=\pm 1\ :\ \frac{29}{3}<n\le\frac{32}{3} \quad\Rightarrow n=10$ $m=\pm 2\ :\ \frac{26}{3}<n\le\frac{29}{3} \quad\Rightarrow n=9$ $m=\pm 3\ :\ 7<n\le 8 \quad\Rightarrow n=8$ $m=\pm 4\ :\ \frac{14}{3}<n\le\frac{17}{3} \quad\Rightarrow n=5$ $m=\pm 5\ :\ \frac{5}{3}<n\le\frac{8}{3} \quad\Rightarrow n=2$ 한편, 제시문 (ㄷ)의 집합 C의 정의에 의해, 순서쌍 $(m,n)\in B$이 집합 C의 원소이기 위해서는, m의 n제곱근 중 실수가 존재해야 한다.	
	㉠ $m=0$인 경우 0의 n제곱근은 임의의 정수 n에 대해서 0이므로, $(0,11)$은 C의 원소이다. ㉡ $m\neq 0$인 경우 ⓐ n이 짝수일 때 n이 짝수일 경우, m의 n제곱근 중 실수는 $m>0$일 때 존재한다. 따라서, 집합 B에 속하는 정수의 순서쌍 (m,n)중, n이 짝수이면서 $n>1$인 경우를 생각해보면 다음과 같다. $n=2$일 때, $m=5 \Rightarrow (5,2)$ $n=8$일 때, $m=3 \Rightarrow (3,8)$ $n=10$일 때, $m=1 \Rightarrow (1,10)$ ⓑ n이 홀수일 때 n이 홀수일 경우, m의 n제곱근 중 실수는 유일하게 하나 존재한다. 따라서, 집합 B에 속하는 정수의 순서쌍 (m,n)중, n이 홀수인 경우를 생각해보면 다음과 같다. $n=5$일 때, $m=\pm 4 \Rightarrow (-4,5),\ (4,5)$ $n=9$일 때, $m=\pm 2 \Rightarrow (-2,9),\ (2,9)$	40
	따라서, 집합 C의 원소의 개수는 8개이다.	10

7. 예시 답안

모든 실수 x에 대해, $\log_{\left(\frac{1}{2}k-5\right)}\left(-(k-11)x^2+(k-11)x+2\right)$가 정의되기 위한 실수 k는 ① $\frac{1}{2}k-5>0$, $\frac{1}{2}k-5\neq 1$, ② 모든 실수 x에 대해, $-(k-11)x^2+(k-11)x+2>0$이 성립해야 한다.

① $\frac{1}{2}k-5>0$, $\frac{1}{2}k-5\neq 1 \Rightarrow k>10$, $k\neq 12$

② ㉠ $k\neq 11$일 때

$-(k-11)>0$이고 $D=(k-11)^2-4(-2(k-11))=(k-3)(k-11)<0$이므로 $3<k<11$이다.

㉡ $k=11$일 때

$-(k-11)x^2+(k-11)x+2=2>0$이 성립한다.

따라서, ㉠, ㉡에 의해 이를 만족하는 실수 k의 범위는 $3<k\leq 11$이다.

①, ②에 의해, 집합 $A=\{k|10<k\leq 11\}$이다.

제시문 (ㄴ)의 집합 B의 정의에 의해, $n>1$이면서 집합 B의 원소인 정수의 순서쌍 (m,n)은

$$10<\frac{1}{3}m^2+n\leq 11 \quad \Rightarrow \quad 10-\frac{1}{3}m^2<n\leq 11-\frac{1}{3}m^2$$

을 만족시키므로, 집합 B에 속하는 원소를 모두 나열해보면 다음과 같다.

$$m=\ \ 0\ :\ \ 10<n\leq 11 \quad \Rightarrow n=11$$

$$m=\pm 1\ :\ \frac{29}{3}<n\leq\frac{32}{3} \quad \Rightarrow n=10$$

$$m=\pm 2\ :\ \frac{26}{3}<n\leq\frac{29}{3} \quad \Rightarrow n=9$$

$$m=\pm 3\ :\ 7<n\leq 8 \quad \Rightarrow n=8$$

$$m=\pm 4\ :\ \frac{14}{3}<n\leq\frac{17}{3} \quad \Rightarrow n=5$$

$$m=\pm 5\ :\ \frac{5}{3}<n\leq\frac{8}{3} \quad \Rightarrow n=2$$

한편, 제시문 (ㄷ)의 집합 C의 정의에 의해, 순서쌍 $(m,n)\in B$이 집합 C의 원소이기 위해서는, m의 n제곱근 중 실수가 존재해야 한다.

㉠ $m=0$인 경우

0의 n제곱근은 임의의 정수 n에 대해서 0이므로, $(0,11)$은 C의 원소이다.

㉡ $m\neq 0$인 경우

ⓐ n이 짝수일 때

n이 짝수일 경우, m의 n제곱근 중 실수는 $m>0$일 때 존재한다. 따라서, 집합 B에 속하는 정수의 순서쌍 (m,n)중, n이 짝수이면서 $n>1$인 경우를 생각해보면 다음과 같다.

$n=2$일 때, $m=5 \Rightarrow (5,2)$

$n=8$일 때, $m=3 \Rightarrow (3,8)$

$n=10$일 때, $m=1 \Rightarrow (1,10)$

ⓑ n이 홀수일 때

n이 홀수일 경우, m의 n제곱근 중 실수는 유일하게 하나 존재한다.따라서, 집합 B에 속하는 정수의 순서쌍 (m,n)중, n이 홀수인 경우를 생각해보면 다음과 같다.

$$n=5\text{일 때, } m=\pm 4 \Rightarrow (-4,5),\ (4,5)$$
$$n=9\text{일 때, } m=\pm 2 \Rightarrow (-2,9),\ (2,9)$$

따라서, 집합 C의 원소의 개수는 8개이다.

【의예/약학 2】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 / 약학과 문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학 Ⅱ
	핵심개념 및 용어	원과 직선의 위치관계, 사인법칙, 미분의 활용
예상 소요 시간	의예과 25분(총 100분) / 약학과 30분(총 90분)	

2. 문항 및 제시문

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

(ㄱ) 좌표평면 위의 원 C_1, C_2는 다음과 같다.

$$\mathrm{C}_1:\ (x-1)^2+y^2=\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{C}_2:\ (x+2)^2+(y+3)^2=\frac{4}{5}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 원 C_1, C_2에 동시에 접하는 직선 중 기울기가 최대인 직선을 l, 최소인 직선을 m이라 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 원 C_1, C_2와 제시문 (ㄴ)의 직선 l, m에 대하여 정의역이 열린구간 $(0,1)$인 함수 $f(t)$, $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

(가) 직선 l이 원 C_1에 접하는 점을 A_1, 직선 m이 원 C_2에 접하는 점을 A_2라 하자.

(나) 직선 m을 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 직선과 원 C_1의 두 교점을 P_1, Q_1이라 할 때, $f(t)=\sin(\angle P_1A_1Q_1)$이다. (단, $0<t<1$)

(다) 직선 l을 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 직선과 원 C_2의 두 교점을 P_2, Q_2라 할 때, $g(t)=\sin(\angle P_2A_2Q_2)$이다. (단, $0<t<1$)

(ㄹ) 제시문 (ㄷ)의 함수 $f(t)$와 $g(t)$에 대하여 실수 M은 다음 조건을 만족시킨다.

> 정의역이 열린구간 $(0,1)$인 함수 $y=f(t)g(t)$는 $t=M$에서 최댓값을 갖는다.

논제. (170점) 제시문 (ㄹ)의 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

1) 원과 직선의 위치 관계를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
2) 사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
3) 다항함수의 미분을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학] – (2) 기하 – ③ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (ㄴ)	[수학] – (2) 기하 – ③ 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

제시문 (ㄷ)	**[수학]** – (2) 기하 – ③ 원의 방정식 [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학 I]** – (2) 삼각함수 – ① 삼각함수 [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문 (ㄹ)	**[수학 II]** – (2) 미분 – ② 도함수 [12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[수학 II]** – (2) 미분 – ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
논제	**[수학 II]** – (2) 미분 – ② 도함수 [12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[수학 II]** – (2) 미분 – ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2021	139-152
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	133-145
	수학	권오남 외	교학사	2021	131-143
	수학 I	고성은 외	좋은책 신사고	2021	92-112
	수학 I	김원경 외	비상교육	2021	95-116
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2021	97-119
	수학 II	홍성복 외	지학사	2021	52-89
	수학 II	김원경 외	비상교육	2021	51-85
	수학 II	황선욱 외	미래엔	2021	53-89

5. 문항 해설

1) 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 원에 접하는 접선을 구할 수 있는지를 평가한다.
2) 사인법칙을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.
3) 다항함수의 미분을 활용하여 주어진 구간에서 최댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제	두 원에 동시에 접하는 직선을 $y=ax+b$이라 표현하면, 원 C_1: $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{5}$과의 거리가 $\frac{1}{\sqrt{5}}$이고 원 C_2: $(x+2)^2+(y+3)^2=\frac{4}{5}$와의 거리가 $\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 두 식	40

$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{|-2a+b+3|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$를 만족시킨다. 즉,

$$2|a+b|=|-2a+b+3|,\ 5(a+b)^2=(a^2+1)$$

을 만족하는 a, b의 쌍을 구하면 두 원에 접하는 접선을 모두 찾을 수 있다.

i) $2(a+b)=(-2a+b+3)$인 경우, $b=-4a+3$이므로 이를 두 번째 식에 대입하면 $44a^2-90a+44=0$을 얻을 수 있고, $a=\frac{45\pm\sqrt{45^2-44^2}}{44}=\frac{45\pm\sqrt{89}}{44}$이다.

ii) $2(a+b)=(2a-b-3)$인 경우, $b=-1$이므로 이를 대입하면 $a=2$ 혹은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $2>\frac{45+\sqrt{89}}{44}>\frac{45-\sqrt{89}}{44}>\frac{1}{2}$이므로 직선 l은 $y=2x-1$, 직선 m은 $y=\frac{1}{2}x-1$이다.

40

이제 $f(t)=\sin(\angle \mathrm{P_1A_1Q_1})$을 구해보자. 사인법칙에 의해 $\sin(\angle \mathrm{P_1A_1Q_1})=\frac{\sqrt{5}}{2}\overline{\mathrm{P_1Q_1}}$이고, $\overline{\mathrm{P_1Q_1}}$과 원 $\mathrm{C_1}$의 중심 사이의 거리는 점과 직선의 거리에 의해 $\frac{\left|\frac{1}{2}-1+t\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\frac{|2t-1|}{\sqrt{5}}$이므로

$\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=2\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{(2t-1)^2}{5}}=\frac{4\sqrt{t-t^2}}{\sqrt{5}}$이다. 즉, $f(t)=2\sqrt{t-t^2}$이다.

$g(t)=\sin(\angle \mathrm{P_2A_2Q_2})$의 경우 $\sin(\angle \mathrm{P_2A_2Q_2})=\frac{\sqrt{5}}{4}\overline{\mathrm{P_2Q_2}}$이고, $\overline{\mathrm{P_2Q_2}}$와 원 $\mathrm{C_2}$의 중심 사이의 거리는 $\frac{|-4-1+t+3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|t-2|}{\sqrt{5}}$이므로

$\overline{\mathrm{P_2Q_2}}=2\sqrt{\frac{4}{5}-\frac{(\mathrm{t}-2)^2}{5}}=\frac{2\sqrt{4\mathrm{t}-\mathrm{t}^2}}{\sqrt{5}}$이고, $g(t)=\frac{\sqrt{4t-t^2}}{2}$이다.

50

따라서 제시문 (ㄹ)의 함수는 $y=f(t)g(t)=\sqrt{(t-t^2)(4t-t^2)}$이다. 4차함수 $(t-t^2)(4t-t^2)$와 함수의 증감이 동일하므로 미분이 0이 되는 t를 찾으면 $8t-15t^2+4t^3=0$에서 $t=0$, $\frac{15\pm\sqrt{97}}{8}$이다. 즉, $y=f(t)g(t)$의 증감표는 정의역 $(0,1)$에서 다음과 같다.

t	$\cdots$	$\frac{15-\sqrt{97}}{8}$	$\cdots$
$f(t)g(t)$	↗	최댓값	↘

따라서 $M=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$이다.

40

7. 예시 답안

두 원에 동시에 접하는 직선을 $y=ax+b$이라 표현하면, 원 C_1: $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{5}$과의 거리가 $\frac{1}{\sqrt{5}}$이고 원 C_2: $(x+2)^2+(y+3)^2=\frac{4}{5}$와의 거리가 $\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로 두 식

$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{|-2a+b+3|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$를 만족시킨다. 즉,

$$2|a+b|=|-2a+b+3|,\ 5(a+b)^2=(a^2+1)$$

을 만족하는 a, b의 쌍을 구하면 두 원에 접하는 접선을 모두 찾을 수 있다.

i) $2(a+b)=(-2a+b+3)$인 경우, $b=-4a+3$이므로 이를 두 번째 식에 대입하면 $44a^2-90a+44=0$을 얻을 수 있고, $a=\frac{45\pm\sqrt{45^2-44^2}}{44}=\frac{45\pm\sqrt{89}}{44}$이다.

ii) $2(a+b)=(2a-b-3)$인 경우, $b=-1$이므로 이를 대입하면 $a=2$ 혹은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $2>\frac{45+\sqrt{89}}{44}>\frac{45-\sqrt{89}}{44}>\frac{1}{2}$이므로 직선 l은 $y=2x-1$, 직선 m은 $y=\frac{1}{2}x-1$이다.

이제 $f(t)=\sin(\angle P_1A_1Q_1)$을 구해보자. 사인법칙에 의해 $\sin(\angle P_1A_1Q_1)=\frac{\sqrt{5}}{2}\overline{P_1Q_1}$이고, $\overline{P_1Q_1}$과 원 C_1의 중심 사이의 거리는 점과 직선의 거리에 의해 $\frac{\left|\frac{1}{2}-1+t\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\frac{|2t-1|}{\sqrt{5}}$이므로

$\overline{P_1Q_1}=2\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{(2t-1)^2}{5}}=\frac{4\sqrt{t-t^2}}{\sqrt{5}}$이다. 즉, $f(t)=2\sqrt{t-t^2}$이다.

$g(t)=\sin(\angle P_2A_2Q_2)$의 경우 $\sin(\angle P_2A_2Q_2)=\frac{\sqrt{5}}{4}\overline{P_2Q_2}$이고, $\overline{P_2Q_2}$와 원 C_2의 중심 사이의 거리는 $\frac{|-4-1+t+3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|t-2|}{\sqrt{5}}$이므로 $\overline{P_2Q_2}=2\sqrt{\frac{4}{5}-\frac{(t-2)^2}{5}}=\frac{2\sqrt{4t-t^2}}{\sqrt{5}}$이고, $g(t)=\frac{\sqrt{4t-t^2}}{2}$이다.

따라서 제시문 (ㄹ)의 함수는 $y=f(t)g(t)=\sqrt{(t-t^2)(4t-t^2)}$이다. 4차함수 $(t-t^2)(4t-t^2)$와 함수의 증감이 동일하므로 미분이 0이 되는 t를 찾으면 $8t-15t^2+4t^3=0$에서 $t=0$, $\frac{15\pm\sqrt{97}}{8}$이다. 즉, $y=f(t)g(t)$의 증감표는 정의역 $(0,1)$에서 다음과 같다.

t	$\cdots$	$\frac{15-\sqrt{97}}{8}$	$\cdots$
$f(t)g(t)$	↗	최댓값	↘

따라서 $M=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$이다.

【의예 3】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 / 문항 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분, 부분적분법, 치환적분법
예상 소요 시간	25분(총 100분)	

2. 문항 및 제시문

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)

(ㄱ) 함수 $f(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(t) = \int_0^t \left\{ \frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}} - \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}} \right\} dx$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(t)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$는 다음과 같다.

$$v(t) = 3t^2\{f(t)+1\}$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 점 P에 대하여 s는 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리이다.

논제. (180점) 제시문 (ㄷ)의 s에 대하여 s^4의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

1) 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
2) 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
3) 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있는지를 확인한다.
4) 속도와 이동 거리를 이해하고 구할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	**[수학 II] – (3) 적분 – 2 정적분** [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. **[미적분] – (3) 적분법 – 1 여러 가지 적분법** [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
제시문 (ㄴ)	**[수학 II] – (3) 적분 – 3 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[미적분] – (3) 적분법 – 2 정적분의 활용** [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (ㄷ)	**[수학 II] – (3) 적분 – 3 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[미적분] – (3) 적분법 – 2 정적분의 활용** [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
논제	**[수학 II] – (3) 적분 – 3 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[미적분] – (3) 적분법 – 1 여러 가지 적분법** [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. **[미적분] – (3) 적분법 – 2 정적분의 활용** [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	김원경 외	비상	2020	112-118, 132-134
	수학II	황선욱 외	미래엔	2021	122-128, 143-146
	수학II	홍성복 외	지학사	2021	125-130, 148-151
	미적분	황선욱 외	미래엔	2021	137-154, 172-175
	미적분	이준열 외	천재교육	2021	138-160, 176-180
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2021	127-144, 160-164

5. 문항 해설

1) 부분적분법을 이용하여 주어진 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.
2) 치환적분법을 이용하여 주어진 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.
3) 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="3">논제</td><td>

$F(x)=x$, $G(x)=\dfrac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}$ 라 하자. 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx &= \int_0^t F'(x)G(x)\,dx \\ &= \Big[\, F(x)\,G(x)\Big]_0^t - \int_0^t F(x)\,G'(x)\,dx \\ &= \left[\frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}\right]_0^t + \int_0^t \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}dx\end{aligned}$$

</td><td>80</td></tr>
<tr><td>

따라서, 제시문 (ㄱ)의 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^t \frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx - \int_0^t \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx \\ &= \left[\frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}\right]_0^t + \int_0^t \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx - \int_0^t \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx = \frac{t}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

</td><td>40</td></tr>
<tr><td>

$f(t)$가 $[0,1]$에서 $f(t)\ge 0$이므로 제시문 (ㄷ)의 s는

$$\begin{aligned}s &= \int_0^1 |v(t)|\,dx = \int_0^1 v(t)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}dt + \int_0^1 3t^2\,dt = \int_0^1 \frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}dt + 1\end{aligned}$$

위의 적분에서 $u=1+t^4$로 치환하면 치환적분법에 의해서

$\displaystyle\int_0^1 \frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}dt = \frac{3}{4}\int_1^2 u^{-\frac{1}{4}}du = \left[u^{\frac{3}{4}}\right]_1^2 = 2^{\frac{3}{4}}-1$이므로,

</td><td>50</td></tr>
</table>

	$$s=\int_0^1 \frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}dt+1=2^{\frac{3}{4}}$$	
	따라서 $s^4=8$	10

7. 예시 답안

$F(x)=x$, $G(x)=\frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}$ 라 하자. 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx &= \int_0^t F'(x)G(x)dx \\ &= \Big[F(x)G(x)\Big]_0^t-\int_0^t F(x)G'(x)dx \\ &= \left[\frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}\right]_0^t+\int_0^t \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}dx\end{aligned}$$

따라서, 제시문 (ㄱ)의 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^t \frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx-\int_0^t \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx \\ &= \left[\frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}\right]_0^t+\int_0^t \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx-\int_0^t \frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}dx=\frac{t}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

$f(t)$가 $[0,1]$에서 $f(t)\geq 0$이므로 제시문 (ㄷ)의 s는

$$s=\int_0^1|v(t)|dx=\int_0^1 v(t)dx=\int_0^1 \frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}dt+\int_0^1 3t^2dt=\int_0^1 \frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}dt+1$$

위의 적분에서 $u=1+t^4$로 치환하면 치환적분법에 의해서

$\int_0^1 \frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}dt=\frac{3}{4}\int_1^2 u^{-\frac{1}{4}}du=\left[u^{\frac{3}{4}}\right]_1^2=2^{\frac{3}{4}}-1$이므로,

$$s=\int_0^1 \frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}dt+1=2^{\frac{3}{4}}$$

따라서 $s^4=8$

【의예 4 / 약학 3】

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 문항 4 / 약학과 문항 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 미적분
	핵심개념 및 용어	집합, 로그, 급수
예상 소요 시간	의예과 25분(총 100분) / 약학과 30분(총 90분)	

2. 문항 및 제시문

[문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (190점)

(ㄱ) 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이다.

(다) 실수 x가 $a_n < x \le a_{n+1}$일 때, 집합 $\left\{ \frac{1}{k} \ln \frac{k}{x} \,\middle|\, 1 \le k \le 5n, k\text{는 자연수} \right\}$의 원소 중 최댓값은 $\frac{1}{n} \ln \frac{n}{x}$이다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수의 합 S를 다음과 같이 정의한다.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_{n+1}}{n} \right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a_n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

논제. (190점) 제시문 (ㄴ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

1) 집합을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
2) 로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
3) 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	**[수학] – (3) 수와 연산 – 1 집합** [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. **[수학 I] – (1) 지수함수와 로그함수 – 1 지수와 로그** [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
제시문 (ㄴ)	**[미적분] – (1) 수열의 극한 – 2 급수** [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
논제	**[수학 I] – (1) 지수함수와 로그함수 – 1 지수와 로그** [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. **[수학 I] – (1) 지수함수와 로그함수 – 2 지수함수와 로그함수** [12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. **[미적분] – (1) 수열의 극한 – 2 급수** [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2021	163-183
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	165-182
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	175-192
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2021	29-35, 53-58
	수학 I	김원경 외	비상교육	2021	23-28, 48-52
	수학 I	고성은 외	좋은책 신사고	2021	26-31, 46-51
	미적분	이준열 외	천재교육	2021	30-35, 58
	미적분	홍성복 외	지학사	2021	29-33, 55
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2021	27-30, 52

5. 문항 해설

1) 집합을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
2) 로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
3) 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제	$a_n=\dfrac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$을 얻는 과정을 논술한다.	70
	$a_n < a_{n+1}$임을 명확하게 논술한다.	30
	$a_n < x \le a_{n+1}$일 때, $\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{n}{x}$이 최대임을 명확하게 논술한다.	60
	위의 a_n에 대하여 $S=1$임을 논술한다.	30

7. 예시 답안

제시문 (ㄱ)의 (다)는 범위에 포함되는 x와 $1 \le k \le 5n$인 모든 자연수에 대하여

$$\frac{1}{k}\ln\frac{k}{x} \le \frac{1}{n}\ln\frac{n}{x}$$

이 성립함을 말한다. 그런데, 자연수 k와 임의의 양의 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{k}\ln\frac{k}{x}-\frac{1}{k+1}\ln\frac{k+1}{x}=\frac{1}{k(k+1)}\ln\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k x} \cdots\cdots(*)$$

이므로, $x \le \dfrac{k^{k+1}}{(k+1)^k}$이면 $\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{k}{x} \ge \dfrac{1}{k+1}\ln\dfrac{k+1}{x}$이고, $x > \dfrac{k^{k+1}}{(k+1)^k}$이면 $\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{k}{x} < \dfrac{1}{k+1}\ln\dfrac{k+1}{x}$이다. 이 때,

$$\frac{(k-1)^k}{k^{k-1}}\bigg/\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}=\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^k<1 \cdots\cdots(**)$$

이므로 $\dfrac{(k-1)^k}{k^{k-1}}<\dfrac{k^{k+1}}{(k+1)^k}$이 성립하여, k가 증가함에 따라 $\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{k}{x}$는 증가하다가 감소하는 형태가 된다.

따라서, 제시문 (ㄱ)의 (다)가 성립하려면, $\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{k}{x}$이 $1 \le k \le n$에서 증가하고 $n \le k \le 5n$에서는 감소해야 한다. 식 $(*)$에 $k=n$을 넣으면 $x \le \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$인 경우,

$$\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x} \ge \frac{1}{n+1}\ln\frac{n+1}{x} \ge \frac{1}{n+2}\ln\frac{n+2}{x} \ge \cdots \ge \frac{1}{5n}\ln\frac{5n}{x}$$

임을 알 수 있다, 식 $(*)$에 $k=n-1$을 넣으면 $\dfrac{(n-1)^n}{n^{n-1}}<x$인 경우,

$$\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x} > \frac{1}{n-1}\ln\frac{n-1}{x} > \frac{1}{n-2}\ln\frac{n-2}{x} > \cdots > \ln\frac{1}{x}$$

가 된다. 또한 (**)에 의하여 $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} < \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$ [제시문 (ㄱ)의 (나)]이므로, $a_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ 이다.

$\left(\frac{a_n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n-1}{n}$, $\left(\frac{a_{n+1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$ 이므로, $S = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{a_{n+1}}{n}\right)^{1/n} - \left(\frac{a_n}{n}\right)^{1/n}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ 이다.