

다. 자연계열

문항카드 7

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	2022학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학II
	핵심개념 및 용어	수열의 귀납적 정의, 수학적 귀납법, 함수의 증가, 함수의 그래프, 방정식과 부등식
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 1] 상수 $p(1 < p < 2)$ 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - px^2 + px$ 가 있다. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

을 만족시킨다. $0 < a_1 < 1$ 일 때, 아래 물음에 답하시오. [40점]

- (1) $0 < x < \beta$ 에서 부등식 $f(x) > x$ 가 성립하고, $\beta < x < 1$ 에서 부등식 $f(x) < x$ 가 성립하는 β 를 구하시오.
- (2) 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $0 < a_n < 1$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.
- (3) 문항 (1)에서 정해진 β 에 대하여 $a_1 \neq \beta$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $0 < a_n < \beta$ 가 성립하거나, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\beta < a_n < 1$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.
- (4) 문항 (1)에서 정해진 β 에 대하여 $a_1 \neq \beta$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_{n+1} > a_n$ 이 성립하거나, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_{n+1} < a_n$ 이 성립함을 보이시오.

3. 출제 의도

이 문제는 함수와 관련하여 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 수리적 추론을 통해 주어진 수열의 성질들을 증명하는 문제이다. 함수의 미분을 통해 함수의 증가 상태 및 함수의 성질을 분석할 수 있고 이를 함수와 관련하여 귀납적으로 정의된 수열에

적용할 수 있는 수리적 조작 능력을 평가한다. 또한 이 과정에서 수학적 귀납법을 활용하여 수열의 성질을 추론하는 능력을 평가한다.

1-(1). 삼차방정식의 해를 구하고 삼차함수의 그래프의 활용을 통해 구간에서의 부등식을 유추할 수 있는 수리적 추론능력을 평가한다.

1-(2). 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하기 위해 관련된 함수의 미분을 통한 증가 상태를 분석할 수 있는 추론능력과 함수의 상태를 수열에 적용하여 수열의 성질을 유추하기 위해 수학적 귀납법을 활용하는 수리적 추론능력을 평가한다.

1-(3). 함수와 관련하여 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하기 위해 함수의 상태를 활용하고 수열의 성질과 관련된 함수의 상태를 연관하여 이해하는 추론능력을 평가한다.

1-(4). 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 점검하기 위해 앞선 문항들에서 파악된 수열의 성질들과 관련된 함수의 성질들을 종합적으로 활용하여 수리적 추론능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1-(1)	<p>[수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p>
1-(2)	<p>[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.</p> <p>[수학 I] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</p>
1-(3)	<p>[수학 I] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</p>
1-(4)	<p>[수학 I] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	63-65, 76-78
	수학	류희찬 외	천재교과서	2021	64-67, 75-77
	수학 I	박교식 외	동아출판	2021	139-144
	수학 I	김원경 외	비상교육	2021	145-150
	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2020	83-85, 93-95, 98-101
	수학 II	황선욱 외	미래엔	2021	82-97

5. 문항 해설

수학적 귀납법은 수열의 여러 가지 성질을 증명하는 데 있어서 매우 유용한 추론 방법이다. 함수와 관련하여 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 점검하기 위하여 주어진 함수의 증가 상태 및 함수의 성질을 활용하는 문항이다. 함수의 미분을 활용해 증가 상태 등을 점검하고 방정식의 근을 통해 함수의 성질을 점검한다. 또한 점검한 함수의 성질을 귀납적으로 정의된 수열에 적용함으로써 수열의 성질을 수학적 귀납법으로 추론할 수 있는 능력을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	$0 < x < \beta$ 에서 부등식 $f(x) > x$ 가 성립하고, $\beta < x < 1$ 에서 부등식 $f(x) < x$ 가 성립하는 β 를 구하시오.	6점
	방정식 $g(x) = f(x) - x = 0$ 을 설정함.	1점
	$g(x) = x(x-1)(x-p+1)$ 로 인수분해하여 근 $x = 0, 1, p-1$ 를 구함.	2점
	$0 < p-1 < 1$ 임을 언급함.	1점
	$0 < x < p-1$ 에서 $f(x) > x$ 임과 $p-1 < x < 1$ 에서 $f(x) < x$ 임을 보임.	2점

하위 문항	채점 기준	배점
1-(2)	모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $0 < a_n < 1$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.	15점
	$n = 1$ 일 때 $0 < a_1 < 1$ 임을 언급함.	2점
	$n = k$ 일 때 $0 < a_k < 1$ 임을 가정함.	2점
	$f'(x) = 3x^2 - 2px + p$ 임을 보임.	1점
	$3x^2 - 2px + p = 0$ 의 판별식을 이용하여 $1 < p < 2$ 에서 $D < 0$ 임을 보임.	2점
	$f'(x) = 3x^2 - 2px + p > 0$ 임을 보이고 함수 $f(x)$ 가 증가함을 주장함.	2점
	$f(0) = 0, f(1) = 1$ 임을 언급함.	1점
	앞의 근거들을 기반으로 $0 < x < 1$ 일 때 $0 < f(x) < 1$ 임을 주장함.	2점
	가정 $0 < a_k < 1$ 을 언급하고 $0 < f(a_k) < 1$ 임을 주장함.	1점
	$0 < f(a_k) < 1$ 임을 근거로 $0 < a_{k+1} < 1$ 임을 주장함.	1점
	수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n < 1$ 이 성립함을 기술함.	1점
1-(3)	문항 (1)에서 정해진 β 에 대하여 $a_1 \neq \beta$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $0 < a_n < \beta$ 가 성립하거나, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\beta < a_n < 1$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.	11점
	$n = 1$ 일 때 $0 < a_1 < \beta$ 임을 언급함.	1점
	$n = k$ 일 때 $0 < a_k < \beta$ 를 가정함.	1점
	문항 (2)의 결과를 인용하여 $f(x)$ 가 증가함을 보임.	2점
	$f(x)$ 의 증가와 $f(0) = 0, f(\beta) = \beta$ 를 인용하여 $0 < a_{k+1} < \beta$ 를 보임.	2점
	수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n < \beta$ 이 성립함을 기술함.	1점
	$n = 1$ 일 때 $\beta < a_1 < 1$ 임을 언급함.	1점
	$n = k$ 일 때 $\beta < a_k < 1$ 을 가정함.	1점
	$f(x)$ 의 증가와 $f(\beta) = \beta, f(1) = 1$ 을 인용하여 $\beta < a_{k+1} < 1$ 을 보임.	2점

하위 문항	채점 기준	배점
1-(4)	문항 (1)에서 정해진 β 에 대하여 $a_1 \neq \beta$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_{n+1} > a_n$ 이 성립하거나, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_{n+1} < a_n$ 이 성립함을 보이시오.	8점
	$0 < a_1 < \beta$ 인 경우, 문항 (3)의 결과를 인용하여 $0 < a_n < \beta$ 임을 활용함.	2점
	문항 (1)의 결과를 인용하여 $0 < x < \beta$ 이면 $f(x) > x$ 임을 활용하여 $f(a_n) > a_n$ 를 보임.	1점
	$a_{n+1} = f(a_n) > a_n$ 을 보임.	1점
	$\beta < a_1 < 1$ 인 경우, 문항 (3)의 결과를 인용하여 $\beta < a_n < 1$ 임을 활용함.	2점
	문항 (1)의 결과를 인용하여 $\beta < x < 1$ 이면 $f(x) < x$ 임을 활용하여 $f(a_n) < a_n$ 를 보임.	1점
	$a_{n+1} = f(a_n) < a_n$ 을 보임.	1점

7. 예시 답안

1-(1) $0 < x < \beta$ 에서 부등식 $f(x) > x$ 가 성립하고, $\beta < x < 1$ 에서 부등식 $f(x) < x$ 가 성립하는 β 를 구하시오.

[풀이]

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) - x$ 라고 하자.

$$g(x) = x^3 - px^2 + (p-1)x = x(x-1)(x-p+1)$$

이므로 $g(x) = 0$ 의 근은 $x = 0, 1, p-1$ 이고 $1 < p < 2$ 이므로 $0 < p-1 < 1$ 이다.

최고차 항의 계수가 양수이고 삼차방정식이 서로 다른 세 근을 갖는 삼차함수의 그래프의 성질에 의해 $0 < x < p-1$ 에서 $g(x) > 0$ 이고, $p-1 < x < 1$ 에서 $g(x) < 0$ 이다. 따라서 $0 < x < p-1$ 에서 $f(x) > x$ 이고 $p-1 < x < 1$ 에서 $f(x) < x$ 이다.

따라서 구하는 β 는 $p-1$ 이다.

1-(2) 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $0 < a_n < 1$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

[풀이]

$n = 1$ 일 때, $0 < a_1 < 1$ 이다.

$n = k$ 일 때, $0 < a_k < 1$ 을 가정하자. $a_{k+1} = f(a_k)$ 이므로 $0 < f(a_k) < 1$ 을 보이면 $0 < a_{k+1} < 1$ 이 성립한다. $f'(x) = 3x^2 - 2px + p$ 이다.

이차방정식 $3x^2 - 2px + p = 0$ 의 판별식을 이용하면 $D/4 = p^2 - 3p = p(p-3)$ 이 $1 < p < 2$ 에서 $D/4 < 0$ 이므로 $f'(x) = 3x^2 - 2px + p > 0$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$ 이므로 $0 < x < 1$ 일 때, $0 < f(x) < 1$ 이다. $0 < a_k < 1$ 이므로 $0 < f(a_k) = a_{k+1} < 1$ 이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n < 1$ 이 성립한다.

1-(3) 문항 (1)에서 정해진 β 에 대하여 $a_1 \neq \beta$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $0 < a_n < \beta$ 가 성립하거나, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\beta < a_n < 1$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

[풀이]

문항 (1)의 결과로부터 $\beta = p - 1$ 이고 $0 < a_1 < \beta$ 인 경우와 $\beta < a_1 < 1$ 인 경우로 나누어 수열의 부등식이 성립함을 보인다.

(i) $0 < a_1 < \beta$ 인 경우

$n = 1$ 일 때, $0 < a_1 < \beta$ 가 성립한다.

$n = k$ 일 때, $0 < a_k < \beta$ 를 가정하자. 문항 (2)의 풀이로부터 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하므로 $f(0) < f(a_k) < f(\beta)$ 이다. $f(0) = 0$, $f(\beta) = \beta$ 이므로 $0 < a_{k+1} < \beta$ 이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n < \beta$ 이다.

(ii) $\beta < a_1 < 1$ 인 경우

$n = 1$ 일 때, $\beta < a_1 < 1$ 이 성립한다.

$n = k$ 일 때, $\beta < a_k < 1$ 을 가정하자. 문항 (2)의 풀이로부터 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하므로 $f(\beta) < f(a_k) < f(1)$ 이다. $f(\beta) = \beta$, $f(1) = 1$ 이므로 $\beta < a_{k+1} < 1$ 이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $\beta < a_n < 1$ 이다.

1-(4) 문항 (1)에서 정해진 β 에 대하여 $a_1 \neq \beta$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_{n+1} > a_n$ 이 성립하거나, 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_{n+1} < a_n$ 이 성립함을 보이시오.

[풀이]

문항 (3)과 마찬가지로 $0 < a_1 < \beta$ 인 경우와 $\beta < a_1 < 1$ 인 경우로 나누어 수열의 부등식이 성립함을 보인다.

(i) $0 < a_1 < \beta$ 인 경우

문항 (3)의 결과로부터 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n < \beta$ 이다.

문항 (1)의 결과로부터 $0 < x < \beta$ 이면 $f(x) > x$ 이므로 $f(a_n) > a_n$ 이다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = f(a_n) > a_n$ 이 성립한다.

(ii) $\beta < a_1 < 1$ 인 경우

문항 (3)의 결과로부터 모든 자연수 n 에 대하여 $\beta < a_n < 1$ 이다.

문항 (1)의 결과로부터 $\beta < x < 1$ 이면 $f(x) < x$ 이므로 $f(a_n) < a_n$ 이다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = f(a_n) < a_n$ 이 성립한다.

문항카드 8

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	2022학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 기하
	핵심개념 및 용어	타원, 이차곡선과 직선의 위치 관계, 이차방정식의 판별식, 이차방정식의 근과 계수의 관계, 접선의 방정식, 점과 직선 사이의 거리, 함수의 증가와 감소, 함수의 최댓값, 도함수
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 2] 아래 물음에 답하시오. [30점]

- (1) 좌표평면에서 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.
- (2) 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 1이고, 점 P의 x 좌표는 양수이다. 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 Q, R에서 만날 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(k)$ 라 하자. $f(k)$ 를 구하시오.
- (3) 문항 (1)에 해당하는 실수 k 에 대하여 $\{f(k)\}^2$ 의 최댓값을 구하시오.

3. 출제 의도

이 문제는 좌표평면에서 이차곡선과 직선의 위치 관계 및 이차곡선과 직선이 만나는 교점의 좌표를 구하는 과정에 대한 이해를 점검하고, 이차곡선의 접선 및 점과 직선 사이의 거리 등의 개념을 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 효율적으로 계산하는 능력을 평가한다. 또한 도함수를 활용하여 다항함수의 최댓값을 구하는 과정에 대한 이해와 계산 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
2-(1)	<p>[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.</p> <p>[수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립 이차부등식을 풀 수 있다.</p> <p>[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p>
2-(2)	<p>[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.</p> <p>[수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.</p> <p>[수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</p> <p>[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.</p> <p>[기하]- (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p>
2-(3)	<p>[수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.</p> <p>[수학II] - (2) 미분 - ② 도함수 [12수학II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</p> <p>[수학II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2020	58-65, 79-85, 98-101, 111-113, 135-137
	수학	김원경 외	비상교육	2021	49-54, 71-75, 82-87, 99-101, 120-122
	수학II	박교식 외	동아출판	2021	62-67, 81-96
	수학II	홍성복 외	지학사	2021	62-69, 83-92
	기하	이준열 외	천재교육	2021	18-24, 39-40, 42-46
	기하	권오남 외	교학사	2021	20-25, 35-49

5. 문항 해설

문항 2-(1). 좌표평면에서 이차곡선과 직선이 주어져 있을 때, 이차곡선과 직선의 방정식을 연립하여 얻어지는 이차방정식의 판별식의 부호를 이용하여 이차곡선과 직선의 위치 관계를 알아내는 과정에 대한 이해와 계산 능력을 평가한다.

문항 2-(2). 이차곡선의 접선 중 주어진 값을 기울기로 가지는 접선과 그 접점을 구할 수 있는지 점검한다. 이차곡선과 직선이 두 점에서 만날 때, 두 교점의 좌표 혹은 두 교점 사이의 거리를 구하는 과정에 대한 이해와 계산 능력을 평가한다. 이때 교점들의 좌표를 직접 구해서 점과 점 사이의 거리 개념을 사용할 수도 있고, 이차방정식의 근의 차를 이차방정식의 계수를 이용하여 표현할 수도 있다. 점과 직선 사이의 거리 등의 개념을 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 삼각형의 넓이를 밑변의 길이와 높이를 사용해서 구할 수도 있고, 다른 방법을 이용하여 구해도 무방하다.

문항 2-(3). 구간에서 주어진 다항함수의 도함수를 계산하고 이를 활용하여 함수의 증가 및 감소를 조사하고, 이를 통해 함수의 최댓값을 구하는 과정에 대한 이해와 계산 능력을 평가한다. 이 문제에서의 도함수는 인수분해를 통하여 구간별로 부호가 어떻게 바뀌는지 조사할 수 있다. 이를 통해 주어진 함수가 구간별로 증가하는지 혹은 감소하는지를 관찰하여 최댓값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	좌표평면에서 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.	8점
	두 식 $x^2 + 3y^2 = 3$ 과 $y = x + k$ 를 연립하여 이차방정식 $4x^2 + 6kx + 3(k^2 - 1) = 0$ 을 얻어 낸.	2점
	타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이 이차방정식 $4x^2 + 6kx + 3(k^2 - 1) = 0$ 의 판별식이 양수여야 함을 관찰함.	3점
	판별식을 잘 계산하여 $D = 12(4 - k^2)$ 를 얻고, 따라서 답이 $-2 < k < 2$ 임을 얻어 낸.	3점
	※ $k = \pm 2$ 일 때 접한다는 사실을 발견하여 답 $-2 < k < 2$ 를 얻어도 무방함.	
2-(2)	타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 1이고, 점 P의 x좌표는 양수이다. 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 Q, R에서 만날 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(k)$ 라 하자. $f(k)$ 를 구하시오.	12점
	문항 (1)에서의 판별식 $D = 0$ 이어야 한다는 조건을 사용하여, 점 P의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 임을 얻어 내거나 점 P에서의 접선이 $y = x - 2$ 임을 얻음.	4점
	이차방정식 $4x^2 + 6kx + 3(k^2 - 1) = 0$ 을 풀어서 점 Q, R의 좌표들 $\left(\frac{-3k \pm \sqrt{3(4 - k^2)}}{4}, \frac{k \pm \sqrt{3(4 - k^2)}}{4}\right)$ 을 구하거나 이차방정식 $4x^2 + 6kx + 3(k^2 - 1) = 0$ 의 두 근의 차를 계산하여 선분 QR의 길이 $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3(4 - k^2)}}{2}$ 을 구함.	4점
	점 P와 직선 $y = x + k$ 사이의 거리 $\frac{ 2 + k }{\sqrt{2}}$ 를 이용하거나 혹은 다른 방법을 통하여 삼각형 PQR의 넓이 $f(k) = \frac{\sqrt{3(4 - k^2)}(2 + k)}{4}$ (단, $-2 < k < 2$)를 구함.	4점

하위 문항	채점 기준	배점
2-(3)	문항 (1)에 해당하는 실수 k 에 대하여 $\{f(k)\}^2$ 의 최댓값을 구하시오.	10점
	$\{f(k)\}^2 = \frac{3}{16}(4-k^2)(2+k)^2$ 의 도함수를 고려하고 계산함.	2점
	$\{f(k)\}^2$ 의 도함수를 $\frac{3}{4}(2+k)^2(1-k)$ 형태로 인수분해하는 등의 방법을 통해 $\{f(k)\}^2$ 의 도함수가 $-2 < k < 1$ 에서 양수이고 $1 < k < 2$ 에서 음수임을 관찰함.	3점
	$\{f(k)\}^2$ 의 도함수의 부호를 통하여 함수 $\{f(k)\}^2$ 이 $-2 < k < 1$ 에서 증가하고 $1 < k < 2$ 에서 감소함을 관찰하고, 따라서 $k = 1$ 에서 최댓값을 가진다는 사실을 얻어 냄.	3점
	최댓값 $\frac{81}{16}$ 을 구함.	2점

7. 예시 답안

2-(1) 좌표평면에서 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.

[풀이]

식 $y = x + k$ 를 $x^2 + 3y^2 = 3$ 에 대입하면 $x^2 + 3(x + k)^2 = 3$ 이고,

$$4x^2 + 6kx + 3(k^2 - 1) = 0$$

을 얻는다. 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D 가 양수여야 한다.

$$D/4 = 9k^2 - 4 \cdot 3(k^2 - 1) = -3k^2 + 12 = 3(4 - k^2) > 0$$

이므로 $4 - k^2 > 0$ 이다.

따라서 구하는 답은 $-2 < k < 2$ 이다.

2-(2) 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 1이고, 점 P의 x 좌표는 양수이다. 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 Q, R에서 만날 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(k)$ 라 하자. $f(k)$ 를 구하시오.

[풀이]

문항 (1)의 풀이에서 직선 $y = x + k$ 가 타원 $x^2 + 3y^2 = 3$ 에 접할 때는 $D = 0$ 일 때이다.

따라서 $k = \pm 2$ 이고, 이때 이차방정식

$$4x^2 + 6kx + 3(k^2 - 1) = 4x^2 \pm 12x + 9 = (2x \pm 3)^2 = 0$$

의 근은 $x = \mp \frac{3}{2}$ 이다.

이 중 양수인 경우는 $k = -2$ 일 때 $x = \frac{3}{2}$ 이며, 이때 $y = x + k = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 P의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 이다.

$-2 < k < 2$ 일 때 두 점 Q, R의 x좌표의 차는 이차방정식 $4x^2 + 6kx + 3(k^2 - 1) = 0$ 의 두 근의 차와 같으며, 이는 근의 공식 혹은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{\sqrt{3(4-k^2)}}{2}$ 임을 알 수 있다. 두 점 Q, R를 지나는 직선의 기울기가 1이므로, 선분

QR의 길이는 $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3(4-k^2)}}{2}$ 이다.

점 $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 과 직선 $x - y + k = 0$ 사이의 거리가

$$\frac{\left|\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) + k\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2+k|}{\sqrt{2}}$$

이므로 구하는 삼각형 PQR의 넓이는

$$f(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \sqrt{3(4-k^2)}}{2} \cdot \frac{|2+k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3(4-k^2)}(2+k)}{4}$$

이다. (단, $-2 < k < 2$)

2-(3) 문항 (1)에 해당하는 실수 k 에 대하여 $\{f(k)\}^2$ 의 최댓값을 구하시오.

[풀이]

$-2 < k < 2$ 에서 함수 $g(k)$ 를 $g(k) = \{f(k)\}^2 = \frac{3}{16}(4-k^2)(2+k)^2$ 이라 하고, k 에 대하여 미분하면

$$g'(k) = \frac{3}{16}\{(-2k)(2+k)^2 + (4-k^2)2(2+k)\} = \frac{3}{4}(2+k)^2(1-k)$$

이다. $-2 < k < 1$ 에서 $g'(k) > 0$ 이므로 $g(k)$ 가 증가하고, $1 < k < 2$ 에서 $g'(k) < 0$ 이므로 $g(k)$ 가 감소한다.

따라서 $g(k) = \{f(k)\}^2$ 은 $k = 1$ 에서 최댓값 $\frac{3(4-1)(2+1)^2}{16} = \frac{81}{16}$ 을 갖는다.

문항카드 9

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	2022학년도 수시모집 논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	원, 직선, 원과 직선의 위치 관계, 함수와 그래프
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

[문항 3] 다음과 같이 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(s)$ 에 대하여 아래 물음에 답하십시오. [30점]

좌표평면에서 실수 s 에 대하여 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 과 함수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때 원의 반지름의 길이를 $f(s)$ 라 하자.

- (1) 점 (4,5)에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 내린 수선의 발을 구하십시오.
- (2) $s \geq 4$ 일 때, 함수 $f(s)$ 를 구하십시오.
- (3) $-4 < s < 4$ 일 때, 함수 $f(s)$ 를 구하십시오.

3. 출제 의도

본 문항은 좌표평면의 함수의 그래프와 원의 관계로 제시된 조건의 수리적 의미를 이해하고 원과 직선의 관계, 두 점 사이의 거리에 대한 이해를 활용하여 조건을 만족하는 함수를 결정하는 수리적 조작을 수행하는 문제이다.

3-(1). 두 직선의 수직의 의미에 대한 개념 이해와 직선의 방정식을 구하고 교점을 구하는 계산 능력을 평가한다.

3-(2). 원과 직선의 위치 관계에 대한 개념을 바탕으로 조건을 만족하는 원의 성질을 추론하고 이를 근거로 직선의 방정식을 구하여 함수를 구성하는 종합적 수리 능력을 평가한다.

3-(3). 직선과 원의 관계에 대한 개념을 바탕으로 조건의 개별적 특성을 추론하고 이를 바탕으로 좌표평면의 두 점 사이의 거리를 구하여 함수를 구성하는 종합적 수리능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
3-(1)	<p>[수학] - (2) 기하 - ㉔ 직선의 방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.</p> <p>[수학] - (4) 함수 - ㉑ 함수 [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.</p>
3-(2)	<p>[수학] - (2) 기하 - ㉑ 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</p> <p>[수학] - (2) 기하 - ㉔ 직선의 방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.</p> <p>[수학] - (2) 기하 - ㉓ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.</p> <p>[수학] - (4) 함수 - ㉑ 함수 [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.</p>
3-(3)	<p>[[수학] - (2) 기하 - ㉑ 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</p> <p>[수학] - (2) 기하 - ㉓ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.</p> <p>[수학] - (4) 함수 - ㉑ 함수 [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2021	99-101, 112-122, 127-136, 203-208
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	105-107, 119-128, 133-141, 209-213

5. 문항 해설

이 문제는 함수의 그래프와 원의 방정식으로 제시된 조건을 이해하고 수리적 추론과 조작을 수행하여 함수를 구하는 문제이다. 이 과정에서 원과 직선의 위치 관계에 관한 수리적 개념에 대한 이해를 바탕으로 그래프에 관하여 제시된 조건으로부터 수리적 조건을 유도하는 수리적 추론 능력과 이 조건에 근거하여 좌표평면의 두 점 사이의 거리, 점과 직선 사이의 거리를 바르게 이해하고 효율적으로 활용하여 함수를 구하는 수리적 조작 능력을 평가하고자 한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	점 (4,5)에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 내린 수선의 발을 구하시오.	6점
	직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 임을 구함.	2점
	기울기가 $-\frac{3}{4}$ 이고 점 (4,5)를 지나는 직선의 방정식이 $y = -\frac{3}{4}x + 8$ 임을 구함.	2점
	이 직선과 주어진 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 의 교점을 구해 수선의 발 (0,8)을 구함.	2점
3-(2)	$s \geq 4$ 일 때, 함수 $f(s)$ 를 구하시오.	14점
	문항(1)에서 제시된 점 (4,5)가 조건을 만족하므로 $s = 4$ 일 때 $f(4) = 5$ 임.	2점
	$s > 4$ 일 때 x 축에 접하는 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 함수 $y = \frac{4}{3} x + 8$ 의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 접해야 함을 서술함.	4점
	두 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 과 $y = 0$ 의 각을 이등분하는 직선 중 제1사분면을 지나는 직선을 구해야 함을 올바른 근거로 서술함.	3점
	점 (-6,0)과 점 (4,5)를 지나는 직선의 방정식 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 을 구함.	3점
	$s \geq 4$ 일 때 구하는 함수 $f(s) = \frac{1}{2}s + 3$ 을 얻음.	2점

하위 문항	채점 기준	배점
3-(3)	$-4 < s < 4$ 일 때, 함수 $f(s)$ 를 구하시오.	10점
	$-4 < s < 4$ 이면 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 두 반직선과 접하지 못하므로 원이 점 $(0,8)$ 을 지남을 적절한 근거를 바탕으로 서술함.	3점
	원의 중심 $(s, f(s))$ 과 점 $(0,8)$ 의 거리, 원의 중심 $(s, f(s))$ 와 x 축과의 거리가 같음을 설명함.	2점
	원의 중심과 $(s, f(s))$ 과 점 $(0,8)$ 의 거리, 원의 중심 $(s, f(s))$ 와 x 축과의 거리를 구하여 $f(s) = \frac{1}{16}s^2 + 4$ 를 얻음.	4점
	$-4 < s < 4$ 에서 구하는 함수 $f(s) = \frac{1}{16}s^2 + 4$ 를 얻음.	1점

7. 예시 답안

3-(1) 점 $(4,5)$ 에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 내린 수선의 발을 구하시오.

[풀이]

직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이므로 기울기가 $-\frac{3}{4}$ 이고 점 $(4,5)$

를 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = -\frac{3}{4}(x-4) + 5 = -\frac{3}{4}x + 8$ 이다.

이 직선과 주어진 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 의 교점을 구하면 $(0,8)$ 이다.

따라서 구하는 수선의 발은 $(0,8)$ 이다.

3-(2) $s \geq 4$ 일 때, 함수 $f(s)$ 를 구하시오.

[풀이]

문항 (1)의 점 $(4,5)$ 에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 내린 수선의 발은 $(0,8)$ 이고 이 점은 함

수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프 위에 있다. 점 $(4,5)$ 는 점 $(0,8)$ 과의 거리가

$\sqrt{(0-4)^2 + (8-5)^2} = 5$ 이고 x 축과의 거리가 5이므로 원 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2$ 은

함수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프와 한 점 $(0,8)$ 에서 만나고 x 축과 접한다. 따라서 $s = 4$

일 때 $f(4) = 5$ 이다.

$s > 4$ 일 때 x 축에 접하는 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 함수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 접해야 한다. 좌표평면의 평행하지 않은 두 직선에 동시에 접하는 원의 중심은 두 직선의 각을 이등분하는 직선 위에 있으므로 두 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 과 $y = 0$ 의 각을 이등분하는 직선 중 제1사분면을 지나는 직선을 구한다. 문항 (1)의 점 $(4,5)$ 가 두 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$, $y = 0$ 과 같은 거리에 있으므로, 구하려는 직선은 두 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 과 $y = 0$ 의 교점 $(-6,0)$ 과 점 $(4,5)$ 를 지나는 직선이다. 따라서 구하는 직선은 $y = \frac{0-5}{-6-4}(x-4) + 5 = \frac{1}{2}x + 3$ 이고, $f(s)$ 를 결정하는 원의 중심이 $(s, f(s))$ 이므로 $s > 4$ 일 때 $f(s) = \frac{1}{2}s + 3$ 이다.

$s = 4$ 일 때 $\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 5$ 이므로 $s \geq 4$ 일 때 구하는 함수는 $f(s) = \frac{1}{2}s + 3$ 이다.

[별해]

문항 (1)의 점 $(4,5)$ 에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 내린 수선의 발은 $(0,8)$ 이고 이 점은 함수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프 위에 있다. 점 $(4,5)$ 는 점 $(0,8)$ 과의 거리가 $\sqrt{(0-4)^2 + (8-5)^2} = 5$ 이고 x 축과의 거리가 5이므로 원 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2$ 은 함수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프와 한 점 $(0,8)$ 에서 만나고 x 축과 접해야 한다. 따라서 $s = 4$ 일 때 $f(4) = 5$ 이다.

$s > 4$ 일 때 x 축에 접하는 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 함수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 에 접한다. 따라서 조건을 성립하는 원의 중심 $(s, f(s))$ 와 직선 $y = \frac{4}{3}x + 8$ 의 거리

$$\frac{\left| f(s) - \frac{4}{3}s - 8 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{4}{3} \right)^2}} = \frac{3}{5} \left| f(s) - \frac{4}{3}s - 8 \right|$$

과 원의 중심 $(s, f(s))$ 와 x 축의 거리 $|f(s)|$ 가 같으므로

$$\frac{3}{5} \left| f(s) - \frac{4}{3}s - 8 \right| = |f(s)| \text{ 를 정리하면 } f(s) = \frac{1}{2}s + 3 \ (s > 4) \text{이다.}$$

$s = 4$ 일 때 $\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 5$ 이므로 $s \geq 4$ 일 때 구하는 함수는 $f(s) = \frac{1}{2}s + 3$ 이다.

3-(3) $-4 < s < 4$ 일 때, 함수 $f(s)$ 를 구하시오.

[풀이]

좌표평면에서 x 축에 접하는 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 함수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프

와 한 점에서 만나려면 원이 반직선 $y = \frac{4}{3}x + 8 (x > 0)$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x + 8 (x < 0)$ 에 접하거나 그래프의 꼭짓점 $(0, 8)$ 을 지난다.

$-4 < s < 4$ 이면 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 두 반직선과 접하지 못하므로 원이 점 $(0, 8)$ 을 지난다. 따라서 조건을 만족하는 원의 중심 $(s, f(s))$ 와 점 $(0, 8)$ 의 거리 $\sqrt{(s-0)^2 + (f(s)-8)^2}$ 과, 원의 중심 $(s, f(s))$ 와 x 축과의 거리 $|f(s)|$ 가 같다.

$$(|f(s)|)^2 = (\sqrt{s^2 + (f(s)-8)^2})^2 = s^2 + (f(s))^2 - 16f(s) + 64$$

를 정리하면 $-4 < s < 4$ 에서 구하는 함수는 $f(s) = \frac{1}{16}s^2 + 4$ 이다.

[별해]

좌표평면에서 x 축에 접하는 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 함수 $y = \frac{4}{3}|x| + 8$ 의 그래프

와 한 점에서 만나려면 원이 반직선 $y = \frac{4}{3}x + 8 (x > 0)$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x + 8 (x < 0)$ 에 접하거나 그래프의 꼭짓점 $(0, 8)$ 을 지난다.

$-4 < s < 4$ 이면 원 $(x-s)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 두 반직선과 접하지 못하므로 원이 점 $(0, 8)$ 을 지난다. 따라서 조건을 만족하는 원의 중심 $(s, f(s))$ 와 점 $(0, 8)$ 의 거리와 원의 중심 $(s, f(s))$ 와 x 축과의 거리가 같다. 이 조건을 만족하는 점 $(s, f(s))$ 는 x 축을 준선으로 하고 점 $(0, 8)$ 을 초점으로 하는 포물선 위에 있다. 포물선의 정의에 따라 이 포물선은 준선 $y = -4$, 초점 $(0, 4)$ 인 포물선 $x^2 = 4 \cdot (4)y = 16y$ 를 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 $x^2 = 16(y-4)$, 즉 $y = \frac{1}{16}x^2 + 4$ 이다.

따라서 $-4 < s < 4$ 에서 구하는 함수는 $f(s) = \frac{1}{16}s^2 + 4$ 이다.