[아주대학교 문항정보 3]

1. 일반 정보

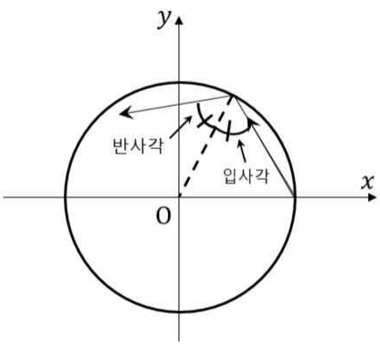
<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연(오전) 대문항 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학 I, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>귀류법, 시초선, 동경, 일반각, 호도법, 라디안, 사인법칙, 주기, 덧셈정리</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">120분 중 60분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

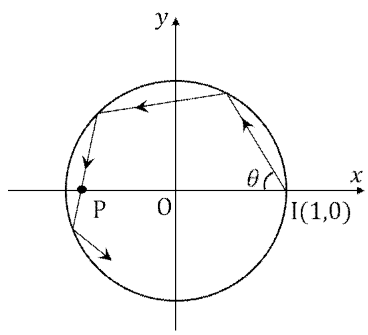
[제시문]

직진하던 빛이 물체에 부딪칠 때 진행 방향이 바뀌어 나아가는 현상을 **빛의 반사**라고 한다. 빛이 원에서 반사될 때, [그림 1-1]에서와 같이 입사각과 반사각의 크기가 같다.

중심이 원점 O이고 반지름이 1인 원 $x^2+y^2=1$을 단위원이라 한다. 점 $\mathrm{I}(1,0)$에서 빛이 x축과 각 θ (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)를 이루며 단위원 내부로 발사되고 계속해서 원에서 반사된다고 하자. 이때, 각 θ를 **발사각**이라 한다. 반사가 일어나는 원 위의 점을 **반사지점**이라 하고, n번째 반사가 일어나는 반사지점을 n**번째 반사지점**이라 한다. [그림 1-2]는 점 $\mathrm{I}(1,0)$에서 발사된 빛이 원 위에 2번 반사된 후, x축 위의 점 P를 통과하는 예를 보여준다. 모든 각의 단위는 라디안(radian)이다.



[그림 1-1]



[그림 1-2]

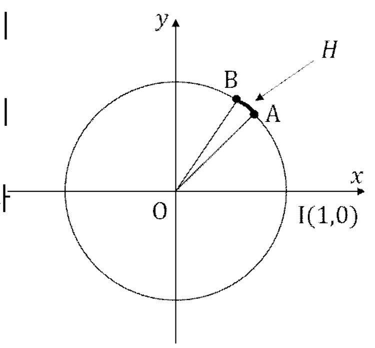
[문항]

[문제 1-1] (25점) [그림 1-2]와 같이 단위원 위의 점 I에서 빛이 발사각 θ를 이루며 발사되어 제2사분면에서 원 위의 2번째 반사지점을 지나 제3사분면에서 원 위의 3번째 반사지점을 갖게 된다고 하자.

(1) 발사각 θ의 범위를 구하고, 빛이 통과하는 x축 위의 점 P의 x좌표를 θ를 이용하여 나타내라.

(2) $\theta = \dfrac{7\pi}{24}$이고 $a = \cos\dfrac{\pi}{24}$라 할 때, 2번째 반사지점에서 점 P까지 빛이 이동한 거리를 a에 대한 식으로 나타내라.

[문제 1-2] (15점) [그림 1-3]에서 $\angle \mathrm{IOA} = \dfrac{18\pi}{64}$ 이고 $\angle \mathrm{IOB} = \dfrac{21\pi}{64}$이다. 호 AB를 H라 하자. 발사각이 $\theta = \dfrac{59\pi}{128}$일 때, 점 I에서 발사된 빛이 n번째 반사지점에서 H와 2번째로 만난다고 하자. n을 구하라.



[그림 1-3]

[문제 1-3] (10점) 점 I에서 빛이 발사각 $\theta = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$로 발사되었을 때, 점 I가 반사지점이 될 수 없음을 $\sqrt{6}$이 무리수라는 사실을 이용하여 증명하라.

3. 출제 의도

[문제 1-1] 사각형 또는 삼각형의 도형을 잘 관찰하고, 사인법칙, 덧셈정리, 피타고라스 정리를 잘 활용할 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-2] 문제에 주어진 상황을 수학적으로 표현한 후 답을 찾아가는 관찰을 잘 할 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-3] 무리수와 유리수의 차이를 알고 귀류법을 사용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 [10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. 수학 Ⅰ [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외 8	미래앤	2021	201
	수학	박교식 외 19	동아	2021	196
	수학	이준열 외 9	천재교육	2021	207
	수학 Ⅰ	박교식 외 19	동아	2021	61,62,74,87
	수학 Ⅰ	고성은 외 5	신사고	2021	65,66,77,92
	수학 Ⅰ	이준열 외 9	천재교육	2021	69,70,83,99
	수학 Ⅰ	김원경 외 14	비상	2021	65,66,78,96
	미적분	김원경 외 14	비상	2021	59,60
	미적분	황선욱 외 8	미래엔	2021	66,67
	미적분	고성은 외 5	신사고	2021	62,63

5. 문항 해설

본 문항은 수학의 귀류법을 이용한 증명, 수학Ⅰ의 삼각함수에서 시초선, 동경, 호도법, 라디안의 기본 개념을 이해하고 사인법칙의 활용에 대한 내용, 미적분에서 삼각함수의 덧셈정리에 대한 지식을 활용하고 있다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 주어진 상황에서 각을 표현하고 규칙성을 발견하는 과정과 사인법칙을 활용하여 삼각형에서 변의 길이를 문자를 이용하여 표현하고, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 간단하게 변형할 수 있는지 확인한다. 이러한 과정을 통해 학생들이 대수적인 조작과 함께 기하적 사고를 융합하여 적용할 수 있는지 측정하고 문제 해결의 효율적인 해결 전략을 찾는 문제해결력과 귀류법을 이해하고 이를 활용하여 논리적으로 자신의 사고를 전개하는 추론 역량을 평가하는 문항이다.

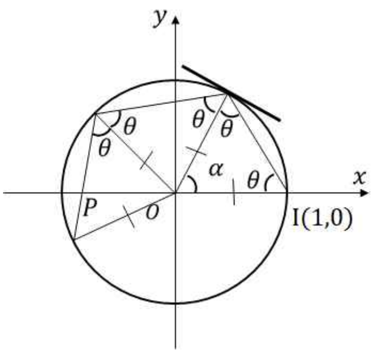
6. 채점 기준

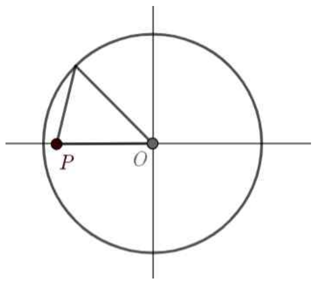
하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$\alpha = \pi - 2\theta$을 관찰하고 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$을 유도	4점
	$-x$를 한 변의 길이로 가지는 삼각형을 찾고, 사인법칙을 이용하여 x와 θ의 관계 유도	4점
	사인함수의 성질을 이용하여 x를 $\frac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$로 표현	2점
[1-1] (2)	θ와 5θ를 $\frac{\pi}{24}$를 이용하여 표현한 후 덧셈정리를 이용하여 a로 표현한 후, P의 x좌표를 a의 식으로 구함	8점
	두 번째 반사지점의 좌표를 구한 후 피타고라스 정리를 이용하여 그 점과 점 P 사이의 거리를 구함	7점

하위문항	채점 기준	배점
[1-2]	n번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각을 구함.	4점
	n번째 반사지점과 호 H가 만난다는 것을 수식으로 표현해냄	4점
	$p=0,1,2,\cdots$을 따라 빛이 호 H와 만나게 되는 상황들을 추적하여 두 번째 만나게 되는 n(번째)을 구함	7점
[1-3]	점 I이 반사지점이 된다고 가정하고 $\sqrt{6}$을 유리식으로 표현	5점
	귀류법에 의하여 점 I가 반사지점이 될 수 없음으로 결론냄	5점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]





(1) 빛의 입사각과 반사각이 같으므로 첫 번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선(x축의 양의 방향 반직선)이 이루는 각을 α라고 두면, $\alpha=\pi-2\theta$이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\alpha<\pi$이다. 또한 2번째, 3번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각은 각각 $2\alpha, 3\alpha$가 된다. 문제의 가정에 의해 $2\alpha<\pi<3\alpha$이므로 $\alpha=\pi-2\theta$로부터 부등식 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$을 얻는다. 이때, 점 $\mathrm{P}(x,0)$에 대하여 선분 OP의 길이는 $-x$이므로, 두 번째 반사지점과 점 P, 원점 O를 꼭지점으로 하는 삼각형과 사인법칙에 의해,

$$\frac{-x}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin(2\pi - 5\theta)}$$

이다. 따라서, $\sin(2\pi - 5\theta) = -\sin 5\theta$에 의해서 $x = \frac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$이다.

(2) $\theta = \frac{7\pi}{24}$이므로 덧셈정리를 이용하여

$$\sin\theta = \sin\frac{7\pi}{24} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{24} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\left\{a\sqrt{3} - \sqrt{1-a^2}\right\}$$

을 얻고

$$\sin 5\theta = \sin\frac{35\pi}{24} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{24}\right) = \sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{24} - \cos\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{24} = -a$$

이므로, 점 P의 x좌표는

$$x = \frac{\sin\theta}{\sin 5\theta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}$$

이다. 한편 $2\alpha = 2\pi - 4\theta = \frac{5\pi}{6}$이므로 2번째 반사지점의 좌표는 $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다. 따라서, 2번째 반사지점에서 점 P까지 빛의 이동거리는

$$\sqrt{(x - \cos 2\alpha)^2 + (\sin 2\alpha)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2a}$$

이다.

[문제 1-2]

첫 번째 반사지점을 지나는 동경이 시초선과 이루는 각은 $\alpha = \pi - 2\theta = \frac{5\pi}{64}$이다. 두 번째 이상의 각 반사지점의 동경과 시초선이 이루는 각은 직전 반사지점

을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각에 $\alpha = \dfrac{5\pi}{64}$을 더한 것이므로, n번째 반사지점의 동경과 시초선이 이루는 각은 $n\alpha = \dfrac{5n\pi}{64}$가 된다. 따라서 문제에서 주어진 호 H에 n번째 반사지점이 있다는 것은 어떤 $p = 0, 1, 2, \cdots$에 대하여

$$2p\pi + \frac{18\pi}{64} \le \frac{5n\pi}{64} \le 2p\pi + \frac{21\pi}{64}$$

를 만족한다는 의미가 된다. 빛이 2번째로 호 H와 만나게 되는 순간의 n을 p의 값을 키워가며 찾아간다.

• $p = 0$일 때, $\dfrac{18\pi}{64} \le \dfrac{5n\pi}{64} \le \dfrac{21\pi}{64}$를 정리하면 $18 \le 5n \le 21$, 즉 $n = 4$이다. 따라서 빛은 4번째 반사지점에서 호 H와 첫 번째로 만난다.

• $p = 1$일 때, $2\pi + \dfrac{18\pi}{64} \le \dfrac{5n\pi}{64} \le 2\pi + \dfrac{21\pi}{64}$를 정리하면 $146 \le 5n \le 149$인데, 이 부등식을 만족하는 자연수 n은 없다.

• $p = 2$일 때, $4\pi + \dfrac{18\pi}{64} \le \dfrac{5n\pi}{64} \le 4\pi + \dfrac{21\pi}{64}$를 정리하면 $274 \le 5n \le 277$이고, $n = 55$이다. 따라서, 빛이 2번째로 호 H와 만나는 반사지점은 55번째 반사지점이다.

[문제 1-3]
 점 $\mathrm{I}(1,0)$이 발사된 빛의 반사지점 중 하나가 된다고 가정하자. 그러면 적당한 자연수 n과 p에 대해

$$n\left(\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right) = 2p\pi \text{ 또는 } \sqrt{6} = \frac{n}{n-2p}$$

을 만족해야 한다. 하지만, 두 번째 식의 우변이 유리수이므로 $\sqrt{6}$이 무리수라는 사실에 모순이다. 따라서 귀류법에 의하여, 위 식을 만족하는 n과 p를 찾을 수 없고, 점 $\mathrm{I}(1,0)$은 발사각이 $\theta = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$인 빛의 반사지점 중 하나가 될 수 없다.

[아주대학교 문항정보 4]

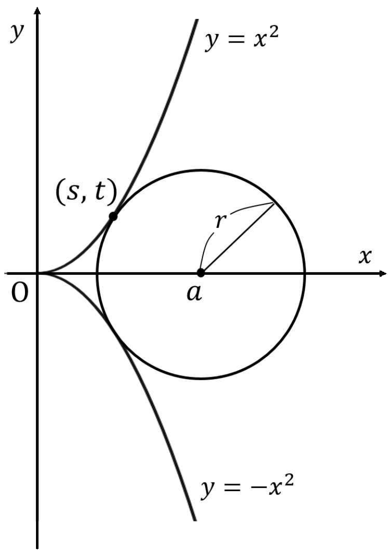
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(오전) 대문항 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	수렴, 극한(값), 발산, 무한대, 정적분, $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx$
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

양수 a에 대해, 중심이 점 $(a,0)$인 원이 아래 그림과 같이 $x \geq 0$에서 정의된 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2$과 각각 한 점에서만 만난다. 이때 원의 반지름을 r이라고 하고 원과 곡선 $y=x^2$이 만나는 점을 (s,t)라고 하자.



점 $(a,0)$이 x축을 따라 원점으로 다가갈수록 원의 반지름 r은 작아지고, s와 t도 작아진다. 즉, 세 양수 r, s, t는 a에 의존하여 변한다. 특히, 점 (s,t)는 다음의 식을 만족함이 알려져 있다.

$$t=\frac{a-s}{2s} \qquad \text{또는} \qquad 2st+s-a=0 \quad \text{--- ㉠}$$

식 ㉠과 $t=s^2$를 이용하면

$$2s^3+s=a$$

를 얻는다. s는 양수이므로 $0<s<a$이어야 한다. 그러므로 $\lim_{a\to 0+} s=0$이 된다.

[문항]

[문제 2-1] (10점) 원의 중심 $(a,0)$과 점 (s,t)를 잇는 선분을 ℓ_1이라 하고 ℓ_1과 x축이 이루는 예각을 θ(라디안)이라고 하자. a가 0에 한없이 가까워질 때, θ가 $\frac{\pi}{2}$에 한없이 가까워짐을 보여라.

[문제 2-2] (20점) $n=0,1,2,\cdots$에 대하여 다음의 물음에 답하라.

(1) $\frac{a^n}{r}$을 a, r, t를 포함하지 않는 s만의 식으로 나타내라.

(2) $\lim_{a\to 0+}\frac{a^n}{r}$이 정수가 되는 n을 모두 구하라.

[문제 2-3] (20점) 제시문과 [문제 2-1]을 참고하여 다음의 물음에 답하라.

(1) x축에 대하여 선분 ℓ_1과 대칭인 선분을 ℓ_2라 하자. $x\ge 0$에서 정의된 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2$과 두 선분 ℓ_1, ℓ_2로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하자. S를 a, r, t를 포함하지 않는 s만의 식으로 나타내라.

(2) (1)에서 서술한 영역 중 원 내부에 포함된 부분의 넓이를 T라 할 때, $\lim_{a\to 0+}\frac{T}{S}$을 구하라.

3. 출제 의도

[문제 2-1] 상황에 따라 변하는 양들 사이의 관계를 알아차릴 수 있는지와 삼각함수의 연속성을 이용할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-2] 연결되어 있는 양들을 하나의 양으로 표현할 수 있는지와 극한값을 잘 구할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-3] 간단한 정적분을 할 수 있는지와, 앞선 문제로부터의 정보를 이용하여 극한값을 찾을 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 II [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. 미적분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	박교식 외 19	동아	2021	12~15, 20,140
	수학 Ⅱ	고성은 외 5	신사고	2021	11~15,19,134
	수학 Ⅱ	이준열 외 9	천재교육	2021	12~15,20,134
	수학 Ⅱ	김원경 외 14	비상	2021	12~15,19,127
	수학 Ⅱ	류희찬 외10	천재교과서	2021	13~16,22,133
	미적분	김원경 외 14	비상	2021	65
	미적분	황선욱 외 8	미래엔	2021	73
	미적분	고성은 외 5	신사고	2021	67

5. 문항 해설

본 문항은 수학Ⅱ의 함수의 극한과 극한값, 함수의 극한에 대한 성질, 다항함수의 정적분, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이, 미적분의 삼각함수의 극한에 관한 기초적인 내용을 근간으로 하는 수학 내적 연결 융합형 문항이다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 주어진 상황에서 여러 가지 조건을 이용하여 식을 정리하고 정적분을 이용하여 다항함수에서 도형의 넓이를 표현한 후 이를 함수의 극한에 관한 기초적인 수학적 사실을 활용하여 함수의 수렴과 발산을 판단하여 문제를 전략적으로 해결할 수 있는지 파악하고자 하는 문항이다. 또한 학생들이 제시문에 주어진 수학적 설명과 시각적 정보를 관찰하여 식을 세우고 주어진 식을 변형하거나 정리하는 과정을 통해 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 문제 해결과정을 전개할 수 있는지 확인한다. 이러한 과정을 통해 문제해결력 역량과 효율적인 방법을 찾거나 정교화하는 융합 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	식 ㉠을 이용하여 $\sin\theta$를 s의 식으로 표현	6점
	제시문의 $\lim_{a\to 0+} s = 0$을 이용하여 $\lim_{a\to 0+} \sin\theta = 1$이 되고, 사인함수의 연속성을 이용하여 $\lim_{a\to 0+} \theta = \frac{\pi}{2}$임을 보임	4점
[2-2] (1)	식 ㉠을 비롯한 여러 가지 관계식을 이용하여 r을 s(만)의 식으로 표현	2점
	$\frac{a^n}{r}$을 s(만)의 식으로 나타냄.	3점
[2-2] (2)	$n=0$일 때 극한을 관찰	2점
	$n=1$일 때 극한을 관찰	4점
	$n=2$일 때 극한을 관찰	5점
	$n \geq 3$일 때 극한을 관찰 후, 답을 확정함	4점
[2-3] (1)	삼각형의 면적의 공식과 적분식을 이용하여 S의 식을 세움	5점
	S의 정적분을 계산하고 s(만)의 식으로 표현	5점
[2-3] (2)	부채꼴의 넓이 공식을 이용하여 T를 s와 θ에 관하여 표현	4점
	$\lim_{a\to 0+} \theta = \frac{\pi}{2}$을 이용하여 $\lim_{a\to 0+} \frac{T}{S}$ 의 극한값을 구함	6점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1]

식 ㉠을 이용하면

$$\sin\theta = \frac{t}{r} = \frac{t}{\sqrt{(a-s)^2+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{(2st)^2+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{4s^2+1}}$$

이고 $\lim_{a\to 0+}\sin\theta = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{\sqrt{4s^2+1}} = 1$이 된다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $1=\sin\frac{\pi}{2}$이므로 사인 함수의 연속성에 의하여 $\lim_{a\to 0+}\theta = \frac{\pi}{2}$이다.

[문제 2-2]

(1) 점 (s,t)와 점 $(a,0)$사이의 거리가 원의 반지름 r이다. 이와 함께 식 ㉠과 점 (s,t)가 포물선 위에 있다는 것을 이용하면 식

$$r = t\sqrt{4s^2+1} = s^2\sqrt{4s^2+1}$$

을 얻는다. 위 식과 식 $2s^3+s=a$를 이용하면

$$\frac{a^n}{r} = \frac{(2s^3+s)^n}{s^2\sqrt{4s^2+1}}$$

의 식을 얻게 된다.

(2) n에 따라 다음의 극한을 관찰할 수 있다.

$n=0$; $\qquad \lim_{a\to 0+}\frac{a^0}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \infty.$

$n=1$; $\qquad \lim_{a\to 0+}\frac{a}{r} = \lim_{s\to 0+}\frac{2s^3+s}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \lim_{s\to 0+}\frac{2s^2+1}{s\sqrt{4s^2+1}} = \infty.$

$n=2;$ $$\lim_{a\to 0+}\frac{a^2}{r}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2s^3+s)^2}{s^2\sqrt{4s^2+1}}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2s^2+1)^2}{\sqrt{4s^2+1}}=1.$$

$n\ge 3;$ $$\lim_{a\to 0+}\frac{a^n}{r}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2s^3+s)^n}{s^2\sqrt{4s^2+1}}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2s^2+1)^n s^{n-2}}{\sqrt{4s^2+1}}=0.$$

따라서 문제에서 구하는 답은 2이상의 정수가 된다.

[문제 2-3]

(1) 관찰을 통해 $S=(a-s)t+2\int_0^s x^2\,dx$ 임을 알 수 있다. 따라서, 식 ㉠과 점 (s,t)가 포물선 위에 있다는 것에 의하여 식

$$S=(2st)t+\frac{2}{3}s^3=2s^5+\frac{2}{3}s^3$$

을 얻는다.

(2) 부채꼴의 넓이의 공식을 이용하면 $T=r^2\theta=s^4(4s^2+1)\theta$이다. 따라서 $\lim_{a\to 0+}\theta=\frac{\pi}{2}$를 이용하면

$$\lim_{a\to 0+}\frac{T}{S}=\lim_{s\to 0+}\frac{s(4s^2+1)}{2s^2+\frac{2}{3}}\lim_{a\to 0+}\theta=0$$

의 극한값을 얻게 된다.

[아주대학교 문항정보 5]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(오후) 대문항 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	합의 법칙, 수열, 수학적 귀납법, 수렴, 사잇값 정리, 도함수, 그래프의 개형, 수열의 극한
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 짧은 신호(**S**)와 긴 신호(**L**)만으로 구성된 전신부호를 **모스부호**라 한다. 모스부호에 들어 있는 신호의 총 개수를 그 모스부호의 **길이**라 한다. 예를 들어, **SSL**은 길이가 3인 모스부호이고, **LSLLS**는 길이가 5인 모스부호이다. 길이가 n인 모든 모스부호의 개수가 2^n인 것은 자명하다. 아래 조건 ㈀을 만족하며 길이가 n인 모스부호의 개수를 a_n이라 하자.

㈀ 긴 신호(**L**)가 2개 이상 연속해서 나타나지 않는다.

조건 ㈀을 만족하는 모스부호 중에서 길이가 1인 것은 **S**, **L**이므로 $a_1 = 2$, 길이가 2인 것은 **SS**, **SL**, **LS**이므로 $a_2 = 3$, 길이가 3인 것은 **SSS**, **SSL**, **SLS**, **LSS**, **LSL**이므로 $a_3 = 5$이다. 따라서, $a_3 = a_2 + a_1$이다. 일반적으로 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

이 성립한다. 그리고 수열 $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$이 수렴한다는 것이 알려져 있다.

(나) 위에서 주어진 조건을 바꾸면 모스부호들의 개수가 달라진다. 아래의 조건 ㈁을 만족하며 길이가 n인 모스부호의 개수를 b_n이라 하자.

(ㄴ) 긴 신호(**L**)가 3개 이상 연속해서 나타나지 않는다.

조건 (ㄴ)을 만족하는 모스부호 중에서 길이가 1인 것은 **S**, **L**이므로 $b_1 = 2$, 길이가 2인 것은 **SS**, **SL**, **LS**, **LL**이므로 $b_2 = 4$이고, 길이가 3인 것은 **SSS**, **SSL**, **SLS**, **SLL**, **LSS**, **LSL**, **LLS**이므로 $b_3 = 7$이다. 한편, 수열 $\left\{\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$이 수렴한다는 것이 알려져 있다.

[문항]

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 다음 질문에 답하라.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하라.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \le a_n \le 2^n$$

(2) $A = \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$라 하자. A의 값을 구하라.

[문제 1-2] (30점) 제시문 (나)를 읽고 다음 질문에 답하라.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 성립하는 $b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3}$의 관계식을 구하라.

(2) $B = \lim_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$라 하자. 부등식 $\dfrac{3}{2} < B < 2$이 성립함을 증명하라.

3. 출제 의도

[문제 1-1] 제시문에 주어진 수열의 성질을 이해하고 이를 활용하여 수학적 귀납법과 극한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2] 제시문에 주어진 수열의 성질을 이해하고 함수의 그래프를 활용해 부등식을 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. 수학Ⅰ [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. 수학Ⅱ [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. 미적분 [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외 14	비상	2021	243
	수학	이준열 외 9	천재교육	2021	263
	수학Ⅰ	고성은 외 6	신사고	2021	147, 148
	수학Ⅰ	홍성복 외 10	지학사	2021	154, 155
	수학Ⅱ	박교식 외 19	동아	2021	40, 41, 89, 93
	수학Ⅱ	김원경 외 14	비상	2021	38, 86, 90
	수학Ⅱ	고성은 외 6	신사고	2021	38, 87, 94
	수학Ⅱ	류희찬 외 10	천재교과서	2021	38, 86, 92
	미적분	황선욱 외 8	미래엔	2021	12, 17
	미적분	김원경 외 14	비상	2021	12, 17, 24
	미적분	고성은 외 5	신사고	2021	12, 15

5. 문항 해설

본 문항은 수학의 합의 법칙, 수학Ⅰ의 수열, 수학적 귀납법, 미적분의 수열의 극한, 수학Ⅱ의 함수 그래프의 개형, 연속함수의 성질 등의 교육과정 수학 내용을 활용하여 문제해결력을 평가하기 위한 문항이다. 이러한 다양한 수학적 지식을 토대로 수열의 극한을 계산하고, 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명할 수 있는지에 대한 수학적 문제해결력 및 추론 역량을 평가하는 문제이다. 또한, 도함수를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 파악하고 사잇값 정리를 이용하여 주어진 구간에서 방정식의 실근이 존재함을 확인할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$n=1$일 때 확인	1점
	$n=2$일 때 확인	2점
	$a_{k+1} \le 2a_k \le 2\times 2^k = 2^{k+1}$	3점
	$a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k \ge \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$	4점
[1-1] (2)	A는 $x^2-x-1=0$의 근이다	7점
	$A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	3점
[1-2] (1)	첫 번째 신호가 S인 경우	3점
	첫 번째 신호는 L이고, 두 번째 신호는 S인 경우	3점
	첫 번째 신호와 두 번째 신호가 모두 L인 경우	3점
	$b_{n+3}=b_{n+2}+b_{n+1}+b_n$	6점
[1-2] (2)	$B^3 = B^2+B+1$	5점
	$f(x)$의 증감을 조사하면 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 번 만난다는 사실을 알 수 있다.	5점
	사잇값 정리에 의하여 $\frac{3}{2}<B<2$이 증명	5점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]

(1) $a_2 \le 2a_1$이고, $n \ge 3$이면 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \le 2a_{n-1}$이다. 그러므로

$$a_n \le 2a_{n-1}, \quad (n \ge 2) \text{ .....㉠}$$

이 성립한다.

$n=1$일 때, $a_1 = 2$이므로 $\frac{3}{2} \le a_1 \le 2$이 성립한다. $n=2$일 때, $a_2 = 3$이므로 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \le a_2 \le 2^2$이 성립한다. $k \ge 2$이라 하자. 주어진 부등식이 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 증명한다. ㉠을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$a_{k+1} \le 2a_k \le 2 \times 2^k = 2^{k+1}$$

한편 ㉠을 이용하면, $3a_k = 2a_k + a_k \le 2a_k + 2a_{k-1} = 2(a_k + a_{k-1}) = 2a_{k+1}$이다. 즉, $a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k$이다. 따라서

$$a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k \ge \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$$

이 성립한다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} \ge a_n$이므로 $A \ge 1$이다. 관계식 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$의 양변을 a_{n+1}로 나누면

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

을 얻는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = A$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{A}$이므로 위의 식의 양변에서 n을 무한대로 보내면 $A = 1 + \frac{1}{A}$이 된다. 즉 $A^2 - A - 1 = 0$. 그러므로 A는 $x^2 - x - 1 = 0$의 근이다. 이 방정식의 두 근은 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$인데, $A \ge 1$이므로 $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

[문제 1-2]
(1) 길이 $(n+3)$이며 조건 ㈁을 만족하는 모스부호의 첫 번째와 두 번째 신호에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(a) 첫 번째 신호가 S인 경우: 2번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $(n+2)$이며 조건 ㈁을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_{n+2}이다.

(b) 첫 번째 신호는 L이고, 두 번째 신호는 S인 경우: 3번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $(n+1)$이며 조건 ㈁을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_{n+1}이다.

(c) 첫 번째 신호와 두 번째 신호가 모두 L인 경우: 3번째 신호는 자동적으로 S이다. 그리고 4번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 n이며 조건 ㈁을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 b_n이다.

세 가지 경우의 개수를 모두 합하여 관계식

$$b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$$

을 얻는다.

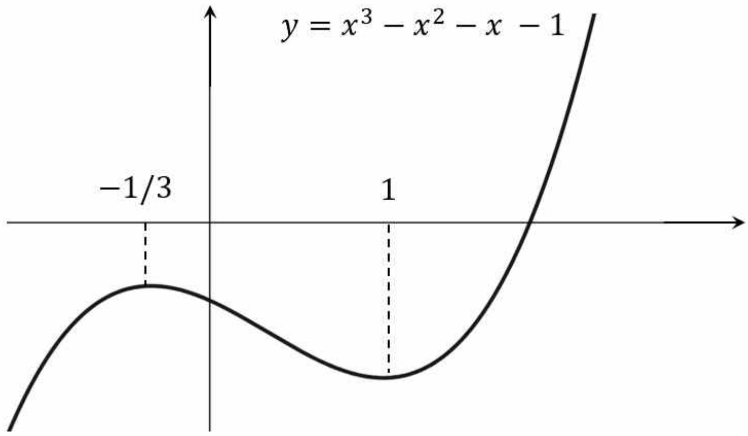
(2) 문제 (1)에서 얻은 관계식의 양변을 b_n으로 나누면

$\dfrac{b_{n+3}}{b_n} = \dfrac{b_{n+2}}{b_n} + \dfrac{b_{n+1}}{b_n} + 1$이 된다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+3}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+3}}{b_{n+2}}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = B^3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = B^2$$

이다. 따라서 위의 관계식에서 n을 무한대로 보내어 $B^3 = B^2 + B + 1$을 얻는다. 이제 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$라 놓으면 B는 방정식 $f(x) = 0$의 근이다. $f(x)$의 증감을 조사하면 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 한 번 만난다는 사실을 알 수 있다.

x		$-1/3$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	증가	$-22/27$	감소	-2	증가



그런데 $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8} < 0$이고 $f(2) = 1 > 0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $\frac{3}{2} < B < 2$이 증명된다.

[아주대학교 문항정보 6]

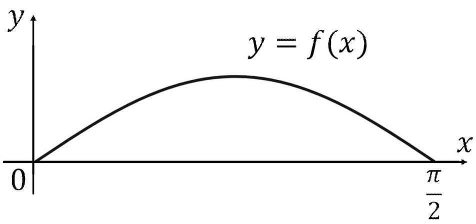
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(오후) 대문항 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 함수의 극한, 그래프의 개형, 롤의 정리, 정적분, 급수, 삼각함수의 극한, 이계도함수, 치환적분법
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{1}{n+1}\sin(nx)$의 정의역을 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{n}$이라 하자. 예를 들어 $n=2$일 때 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n을 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

(나) 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 위로 볼록한 그래프를 가지는 이차함수를 이용하여 S_n에 대한 어림값을 구할 수 있다. 자연수 n에 대하여 $f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$ (단, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{n}$)를 잡고, 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\pi}{n}, 0\right)$을 지나는 이차함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T_n이라

하면 T_n은 S_n에 대한 어림값이다. 점 P의 위치가 변하면 T_n도 변한다.

(다) 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 공통의 정의역에서 함숫값이 0보다 크고 K는 상수라 하자. 다음 부등식 ㉠이 참이면 부등식 ㉡도 참이다.

$$Kh(x)-g(x)\ge 0 \text{ ---㉠} \qquad\qquad \frac{g(x)}{h(x)}\le K \text{ ---㉡}$$

[문항]

[문제 2-1] (15점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) 각 자연수 n에 대하여 제시문 (가)에서 서술한 S_n을 구하라.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하라.

[문제 2-2] (35점) 제시문을 이용하여 다음 물음에 답하라.

(1) 각 자연수 n에 대하여 제시문 (나)에서 서술한 T_n을 n과 α에 대한 식으로 나타내라.

(2) $\lim_{\alpha\to 0+} T_n$을 구하라.

(3) $n=1$이라 하자. (1)과 제시문 (다)를 이용하여 $\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 T_1이 최댓값을 가짐을 증명하라.

(4) (3)을 이용하여 각 자연수 n에 대하여 T_n의 최댓값을 구하라.

3. 출제 의도

[문제 2-1] 제시문의 함수의 성질을 이해하고 정적분과 급수 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 2-2] 제시문의 함수의 성질을 이해하고 정적분, 극한, 최댓값 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학Ⅰ [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. 수학Ⅱ [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. 미적분 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	배종숙 외 6	금성	2021	83, 84
	수학Ⅰ	고성은 외 6	신사고	2021	76, 77
	수학Ⅱ	김원경 외 14	비상	2021	74, 75, 86, 127
	수학Ⅱ	홍성복 외 10	지학사	2021	79, 90, 91, 142
	수학Ⅱ	이준열 외 9	천재교육	2021	20, 83, 91, 133,134
	미적분	황선욱 외 8	미래엔	2021	31, 73, 98, 141, 148, 166
	미적분	김원경 외 14	비상	2021	29, 65, 99, 124, 135, 147
	미적분	홍성복 외 10	지학사	2021	31, 69, 75, 142, 153, 164
	미적분	류희찬 외 9	천재교과서	2021	31, 77, 120, 168, 159, 162

5. 문항 해설

본 문항은 수학Ⅰ의 삼각함수, 수학Ⅱ의 함수의 극한, 그래프의 개형, 롤의 정리, 정적분, 미적분의 급수, 삼각함수의 극한, 이계도함수 등의 교육과정 수학 내용을 다루고 있다. 따라서 본 문항을 통해 삼각함수의 정적분과 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하고, 간단한 수열에 대한 급수를 계산할 수 있는지 평가하며 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 최댓값 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 이를 통해 다양한 함수적 사고를 할 수 있는지 측정하고 문제를 해결하기 위한 수학적 절차를 논리적으로 수행할 수 있는지에 대한 수학 문제해결 역량 및 추론 능력을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$S_n = \int_0^{\pi/n} f(x)dx$ 의 정적분식 구성	3점
	$S_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$ 의 유도	7점
[2-1] (2)	$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 2$	5점
[2-2] (1)	$g(x) = \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \dfrac{\pi}{n}\right)} x\left(x - \dfrac{\pi}{n}\right)$	5점
	$T_n = \dfrac{\pi^3}{6n^2(n+1)} \dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)}$	5점
[2-2] (2)	$\lim_{\alpha \to 0+} T_n = \dfrac{\pi^2}{6n(n+1)}$	5점
[2-2] (3)	$k(x) = \dfrac{4}{\pi^2} x(\pi - x) - \sin x$ 라 놓고, $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $k(x) \ge 0$을 보인다.	5점
	$\lim_{x \to 0+} k(x) = 0$, $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $\lim_{x \to 0+} k'(x) = \dfrac{4}{\pi} - 1 > 0$, $k'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	5점
	롤의 정리에 의해 $k''(x) = 0$을 만족하는 x가 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재하여 모순이다.	5점
[2-2] (4)	T_n의 최댓값은 $\dfrac{2\pi}{3n(n+1)}$	5점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1]

(1) 각 자연수 n에 대하여

$$S_n = \int_0^{\pi/n} f(x)dx = \int_0^{\pi/n} \frac{1}{n+1}\sin(nx)dx = \left[-\frac{1}{n(n+1)}\cos(nx)\right]_0^{\pi/n}$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}(-1-1) = \frac{2}{n(n+1)}$$

이 된다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$

[문제 2-2]

(1) 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\pi/n, 0)$을 지나는 이차함수는 $g(x) = cx\left(x - \frac{\pi}{n}\right)$의 형태로 표현할 수 있고, 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$를 지나야 하므로 $c = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}$가 된다. 즉,

$$g(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}x\left(x - \frac{\pi}{n}\right).$$

따라서, T_n은

$$T_n = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}\int_0^{\pi/n}\left(x^2 - \frac{\pi}{n}x\right)dx = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{n}\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^3$$

이다. 이것을 정리하면

$$T_n = \frac{\pi^3}{6n^2(n+1)}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)}$$

(2) $T_n = \frac{\pi^3}{6n(n+1)} \frac{1}{(\pi - n\alpha)} \frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha}$이므로, $\lim_{\alpha \to 0+} \frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha} = 1$을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{\alpha \to 0+} T_n = \frac{\pi^2}{6n(n+1)}$$

(3) (1)에서 구한 $T_1 = \frac{\pi^3}{12} \frac{\sin\alpha}{\alpha(\pi - \alpha)}$가 $\alpha = \frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $\frac{\pi}{3}$를 갖는 것을 증명하기 위해서 구간 $0 < x < \pi$에서 정의된 함수 $h(x) = \frac{\sin x}{x(\pi - x)}$가 $x = \frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$을 갖는 것을 증명하면 된다. 그런데 함수 $h(x)$의 그래프는 $x = \frac{\pi}{2}$를 중심으로 대칭이므로 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$일 때 $h(x) = \frac{\sin x}{x(\pi - x)} \le \frac{4}{\pi^2}$이 성립함을 보이면 된다. $k(x) = \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x) - \sin x$라 놓으면, 제시문 (다)에 의하여 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$일 때 $k(x) \ge 0$을 보이면 된다.

$k(x)$와 $k'(x) = \frac{4}{\pi^2}(\pi - 2x) - \cos x$ 그리고 $k''(x) = -\frac{8}{\pi^2} + \sin x$에 대한 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

① $\lim_{x \to 0+} k(x) = 0$, $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

② $\lim_{x \to 0+} k'(x) = \frac{4}{\pi} - 1 > 0$, $k'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

③ $k''(x) = 0$을 만족하는 x는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에 오직 한 개 존재한다.

이제 $k(x) < 0$이 되는 x가 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다고 가정하자. 그러면 함수 $k(x)$는 0부터 $\frac{\pi}{2}$ 사이에서 차례로 증가, 감소, 증가하는 구간을 가지므로 $k'(x) = 0$을 만족하는 x가 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재한다. $k'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$이므로 롤의 정리에 의해 $k''(x) = 0$을 만족하는 x가 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재하고, 이것은 ③에 모순이다. 그러므로 $k(x) \ge 0$이 성립한다.

(4) $T_n = \dfrac{\pi^3}{6n^2(n+1)} \dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)}$의 최댓값을 구하기 위해 $\dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)}$의 최대값을 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{n}\right)$에서 구하면 된다. $n\alpha = y$로 놓으면 $0 < y < \pi$이고,

$$\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)} = \frac{n \sin y}{y(\pi - y)}$$

이다. (3)의 결과에 의하여 이것은 $y = \dfrac{\pi}{2}$, 즉 $\alpha = \dfrac{\pi}{2n}$일 때 최대가 된다. 그러므로 T_n의 최댓값은 $\dfrac{2\pi}{3n(n+1)}$이다.

[아주대학교 문항정보 7]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(의학) 대문항 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	합의 법칙, 삼각함수, 주기, 사인함수, 덧셈정리, 자연상수 e, e^x, 치환적분법
예상 소요 시간	120분 중 60분	

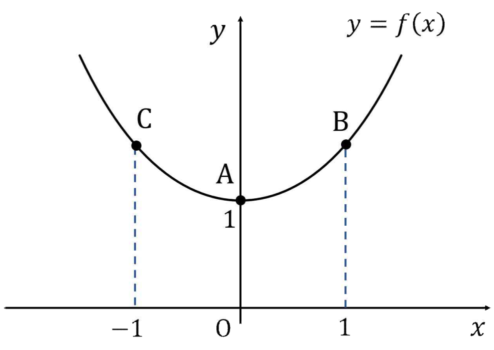
2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 정육면체의 주사위를 차례로 2번 던져 나오는 눈의 수를 순서대로 n, l이라고 하자. 함수 $x = g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(t) = \sin\left(\frac{n}{l}t\right), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(나) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$이다. 제시문 (가)에서 정의된 x에 대하여 점 $\mathrm{Q}(x, f(x))$는 함수 $f(x)$의 그래프 위를 움직인다. 예를 들어 $\dfrac{n}{l} = 1$인 경우, 점 Q는 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(0,1)$에서 출발하여 점 $\mathrm{B}(1, f(1))$, 점 $\mathrm{A}(0,1)$, 점 $\mathrm{C}(-1, f(-1))$를 차례대로 거쳐 점 $\mathrm{A}(0,1)$로 돌아온다.



[문항]
[문제 1-1] (25점) 제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.
(1) $E=\int_0^{2\pi}|g'(t)|^2\,dt$이라 하자. 주어진 n, l에 대하여 E의 값을 n, l을 이용하여 표현하라.

(2) $E \geq \pi$를 만족하는 순서쌍 (n,l)을 모두 구하라.

[문제 1-2] (25점) 제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.
(1) 주어진 n, l에 대하여 점 Q의 총 이동거리를 L이라 하자. L을 n, l을 이용하여 표현하라.

(2) $L \geq e-e^{-1}$을 만족하는 순서쌍 (n,l)을 모두 구하라.

3. 출제 의도

[문제 1-1] 사인함수와 관련된 정적분을 잘 할 수 있는지를 평가하고, 문제에 주어진 조건을 만족하는 경우를 관찰을 통해 정확하게 찾을 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-2] 지수함수와 관련된 정적분의 계산능력을 평가하고, 복잡한 수학을 사용하지 않더라도 곡선 위를 움직이는 점의 이동거리를 상황에 따라 잘 서술할 수 있는지와 제시문을 만족하면서 실제로 일어날 수 있는 상황에 대한 정확한 관찰과 논리적인 설명이 가능한지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	수학 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. 미적분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외 8	미래앤	2021	261
	수학	박교식 외 19	동아	2021	256
	수학	이준열 외 9	천재교육	2021	263
	미적분	김원경 외 14	비상	2021	52,55,61,68,80,127,156
	미적분	황선욱 외 8	미래엔	2021	56,57,60,68,76,87,144,175
	미적분	고성은 외 5	신사고	2021	51,52,55,62,71,81,134,163,164
	미적분	이준열 외 7	천재교육	2021	57,61,66,89,148,179
	미적분	류희찬 외 9	천재교과서	2021	57,63,69,81,105,166,191

5. 문항 해설

본 문항은 수학의 경우의 수에서 합의 법칙, 수학Ⅰ에서 삼각함수의 주기, 그래프, 미적분에서 지수함수, 삼각함수의 덧셈정리, 삼각함수의 미분과 적분, 지수함수의 미분, 적분을 이용하여 곡선의 길이를 구하는 기초적인 내용을 활용하여 문제해결력을 평가하는 수학 내적 연결 융합형 문항이다. 본 문항에서 삼각함수의 미분이나 적분하는 과정과 경우의 수를 융합한 문제를 해결해야 한다. 또한 제시문에서 주어진 조건을 정확하게 이해하고, 경우의 수와 적분을 이용하여 여러 가지 조건에 따라 규칙적으로 변하는 문제 상황을 파악하여 수학적 표현을 만들거나 변환할 수 있어야 하며, 경우를 나누어 조건을 만족하는 상황을 누락, 중복 없이 확인하는 조합적인 사고과정을 요구한다. 이러한 과정을 통해 수학 문제해결력 및 추론 역량을 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	함수 $g(t)$의 미분	2점
	$\lvert g'(t)\rvert^2$ 을 적분가능한 형태로 변형	3점
	E를 정적분으로 구함	5점
[1-1] (2)	$\frac{n}{l}$을 세가지 경우로 나누고, $\frac{n}{l}<1$인 경우 $E<\pi$임을 보임	5점
	$\frac{n}{l} \geq 1$이고, $\frac{n}{l}$이 자연수이거나 기약분수로 표현했을 때 $\frac{a}{2}$ 또는 $\frac{a}{4}$ 꼴인 경우, $E \geq \pi$임을 보임	5점
	$\frac{n}{l} \geq 1$이고, $\frac{n}{l}$을 기약분수로 표현했을 때 $\frac{a}{3}$ 또는 $\frac{a}{5}$꼴인 경우, $E > \pi$을 보이고 답을 확정함	5점
[1-2] (1)	점 Q가 방향 전환하기 전까지의 거리를 기본 이동 거리의 단위로 생각하고 이를 정적분으로 계산함	5점
	점 Q가 기본 이동 거리를 온전히 반복하는 횟수의 경우에 따라 L을 n과 l로 표현함.	5점
	순서쌍 (n, l)에 대하여 점 Q의 실제 가능한 기본 이동 거리 반복하는 횟수를 찾음	2점
	위의 두 정보를 종합하여 답을 씀	3점
[1-2] (2)	$\frac{n}{l}$이 클수록 점 Q의 이동량과 L이 증가함을 관찰	5점
	$\frac{n}{l}=\frac{1}{2}$일 때 $L=e-e^{-1}$을 관찰	3점
	문제의 조건을 만족하는 모든 (n,l)을 기술함	2점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]

(1) $g(t)=\sin\left(\frac{n}{l}t\right)$를 미분하면 $g'(t)=\frac{n}{l}\cos\left(\frac{n}{l}t\right)$를 얻는다. 이것을 제곱하고 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$를 이용하면

$$|g'(t)|^2=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{l}\right)^2\left(1+\cos\left(\frac{2n}{l}t\right)\right)$$

이다. 따라서

$$E=\int_0^{2\pi}|g'(t)|^2\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{l}\right)^2\left\{2\pi+\frac{l}{2n}\sin\left(\frac{2n}{l}2\pi\right)\right\}=\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi+\frac{n}{4l}\sin\left(\frac{4n\pi}{l}\right)$$

이다.

(2) 다음과 같은 세 가지 경우를 고려하면 된다.

1) $\frac{n}{l}<1$인 경우

$\sin\theta\le 1$을 이용하면

$$E=\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi+\frac{n}{4l}\sin\left(\frac{4n\pi}{l}\right)\le\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi+\frac{n}{4l}<\left\{\left(\frac{n}{l}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{n}{l}\right\}\pi$$

를 관찰할 수 있다. 이와 관련하여 함수 $h(t)=t^2+\frac{1}{4}t$를 정의하자. $h(t)$는 모든 $t>0$에 대하여 증가함수이다. $\frac{n}{l}<1$을 만족하는 순서쌍 중에서 $\frac{n}{l}$값이 최대가 되는 경우는 $(n,l)=(5,6)$인 경우이다. $h\left(\frac{5}{6}\right)<1$이므로, $\frac{n}{l}<1$인 모든 순서쌍 (n,l)에 대하여 $E<\pi$이다.

2) $\frac{n}{l}\ge 1$이고, $\frac{n}{l}$이 자연수이거나 기약분수로 표현했을 때 $\frac{a}{2}$ 또는 $\frac{a}{4}$꼴인 경우

$\sin\left(\frac{4n\pi}{l}\right)=0$이기 때문에 부등식

$$E=\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi+\frac{n}{4l}\sin\frac{4n\pi}{l}=\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi\ge\pi$$

이 성립한다.

3) $\frac{n}{l} \geq 1$이고, $\frac{n}{l}$을 기약분수로 표현했을 때 $\frac{a}{3}$ 또는 $\frac{a}{5}$꼴인 경우

이 경우에는 가능한 순서쌍이 다음 세 가지뿐이다.

$$(n,l) = (4,3),(5,3),(6,5)$$

$-1 \leq \sin\theta$를 이용하면, 위의 각 경우에 대해 해당하는 E에 대한 다음 부등식을 관찰할 수 있다.

$(n,l) = (4,3)$: $E = \left(\frac{4}{3}\right)^2\pi + \frac{1}{3}\sin\frac{16\pi}{3} > \frac{16}{9}\pi - \frac{1}{3} = \pi + \frac{7}{9}\pi - \frac{1}{3} > \pi$

$(n,l) = (5,3)$: $E = \left(\frac{5}{3}\right)^2\pi + \frac{5}{12}\sin\frac{20\pi}{3} > \frac{25}{9}\pi - \frac{5}{12} = \pi + \frac{16}{9}\pi - \frac{5}{12} > \pi$

$(n,l) = (6,5)$: $E = \left(\frac{6}{5}\right)^2\pi + \frac{3}{10}\sin\frac{24\pi}{5} > \frac{36}{25}\pi - \frac{3}{10} = \pi + \frac{11}{25}\pi - \frac{3}{10} > \pi$

그러므로 답은 $\frac{n}{l} \geq 1$을 만족하는 모든 순서쌍 (n,l)이다.

[문제 1-2]

(1) $\mathrm{A}(0,\mathrm{f}(0))$부터 점 $(s, f(s))$ 사이의 곡선의 길이를 $G(s)$라 하면, $s \geq 0$ 일때

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^s \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_0^s \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx \\ &= \int_0^s \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \frac{e^s-e^{-s}}{2} \end{aligned}$$

이고, $s \leq 0$이면

$$G(s) = \frac{e^{-s}-e^s}{2}$$

이다. 특히 $\mathrm{A}(0,\mathrm{f}(0))$부터 $\mathrm{B}(1,\mathrm{f}(1))$까지 곡선의 길이와 $\mathrm{A}(0,\mathrm{f}(0))$부터 $\mathrm{C}(-1,\mathrm{f}(-1))$까지 곡선의 길이는 모두 $\frac{e-e^{-1}}{2}$이다.

$0 \leq t \leq 2\pi$일 때, $0 \leq \frac{n}{l}t \leq \frac{2n\pi}{l}$이며 $\frac{n}{l}t$가 0부터 시작하여 $\frac{\pi}{2}$만큼 변할 때 마다 점 Q는 A와 B사이 또는 A와 C사이의 곡선을 지난다. $\dfrac{\frac{n}{l}2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4n}{l}$이기 때

문에, $k \le \dfrac{4n}{l} < k+1$인 정수 k에 대하여, k는 점 Q가 A와 B사이 또는 A와 C사이의 곡선을 온전하게 이동하는 총 회수를 의미한다. k를 4로 나눈 나머지를 a라 하자.

- $a=0$인 경우: Q는 점 A에 있거나 점 A에서 점 B로 가던 중 멈춘다. 따라서

$$L = \frac{e-e^{-1}}{2}k + \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2}.$$

- $a=1$인 경우: Q는 점 B에 있거나 점 B에서 점 A로 가던 중 멈춘다.

$$L = \frac{e-e^{-1}}{2}k + \frac{e-e^{-1}}{2} - \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} = \frac{e-e^{-1}}{2}(k+1) - \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2}$$

.

- $a=2$인 경우: Q는 점 A에 있거나 점 A에서 점 C로 가던 중 멈춘다.

$$L = \frac{e-e^{-1}}{2}k + \frac{e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} = \frac{e-e^{-1}}{2}k - \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2}.$$

- $a=3$인 경우: Q는 점 C에 있거나 점 C에서 A로 가던 중 멈춘다.

$$L = \frac{e-e^{-1}}{2}k + \frac{e-e^{-1}}{2} - \frac{e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} = \frac{e-e^{-1}}{2}(k+1) + \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2}$$

.

한편 n, l은 주사위의 눈의 수이므로 나올 수 있는 k값은 관찰을 통해

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24$$

임을 알 수 있다. 따라서 답은 다음과 같다.

$$L = \begin{cases} \dfrac{e-e^{-1}}{2}k + (-1)^{\frac{k}{2}} \dfrac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} & (k = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24) \\ \dfrac{e-e^{-1}}{2}(k+1) + (-1)^{\frac{k+1}{2}} \dfrac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} & (k = 1, 3, 5) \end{cases}$$

(2) $\dfrac{n}{l}$이 클수록 점 Q의 이동량과 L이 증가한다. $\dfrac{n}{l} = \dfrac{1}{2}$일 때 점 Q는 점 A$(0,1)$에서 출발하여 점 B$(1, f(1))$를 거쳐 점 A$(0,1)$로 되돌아 오면서 이동을 끝낸다.

이때 $L = e - e^{-1}$이다. 따라서,$L \geq e - e^{-1}$을 만족하는 순서쌍 (n,l)은 $2n \geq l$을 만족하는 모든 순서쌍 (n, l)이다.

[아주대학교 문항정보 8]

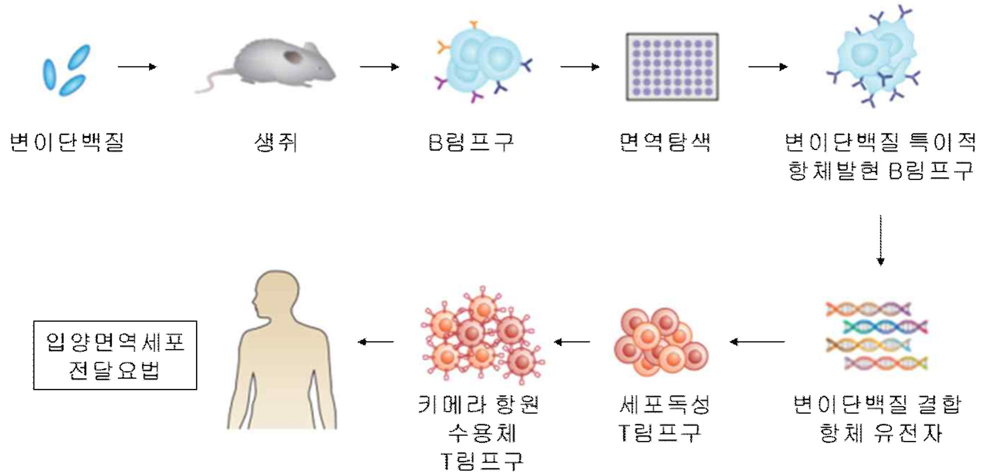
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연(의학) / 대문항 2번	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	생명과학Ⅰ, 생명과학 Ⅱ
	핵심개념 및 용어	인간의 게놈, 특이적 면역반응, 비특이적 면역반응, 중합효소연쇄반응, 유전자의 전사, 유전자의 번역
예상 소요 시간	120분 중 60분	

2. 문항 및 제시문

(가) 암은 기본적으로 게놈(genome)의 불안정성에 의한 질환으로, 암의 발생과 진행의 과정에서 수많은 변이(mutation)가 게놈에 축적된다. 즉 정상세포의 게놈에 변이가 발생/축적되면서, 정상세포가 암세포로 변형된다. 변이된 게놈에서 만들어내는 변형된 단백질들이 암세포의 표면에 노출되면, 우리 몸의 방어 작용은 암세포를 자신과 다른 외부의 침입자로 인식하며 이후 면역세포들이 암세포를 제거할 수 있다. 암의 치료 방법으로 최근 주목받는 면역항암요법(cancer immunotherapy)은 이러한 우리 몸의 방어 작용을 이용하여 암세포를 제거하는 치료법으로, 입양면역세포전달요법(adoptive cell transfer)이 많은 관심을 받고 있다.

입양면역세포전달요법의 개발과정은 우선 변이단백질의 항원결정기[1](epitope)와 결합하는 항체를 찾아내는 것이다. 이를 위하여 변이단백질을 주입한 생쥐에서 변이단백질과 결합하는 항체를 발현하는 B림프구를 탐색한 후 B림프구의 RNA 염기서열 분석을 통하여 변이단백질과 결합하는 항체의 염기서열(sequence) 및 유전자를 확보한다. 다음으로 환자의 세포독성 T림프구를 분리한 후, 유전자 재조합기법을 이용하여 변이단백질과 결합하는 키메라항원수용체[2]가 세포독성 T림프구의 표면에 발현되도록 조작한다. 조작된 세포독성 T림프구를 환자에게 주입하여 환자의 암세포 파괴를 유도한다.



(나) 종양 면역 치료 중의 하나인 종양백신은 종양 특이 항원을 이용하여 T 세포 매개 항-종양 면역반응을 유도한다. 악성 흑색종[3]에서 기원한 MZ2-E와 MZ2-D가 세포독성 T 세포에 의해 인지되어 종양 특이 면역반응을 유발한다는 연구 결과는 종양백신 분야에서 아주 중요한 발견이다. 이 연구는 종양백신으로써 종양항원을 이용할 수 있다는 가능성을 시사한다.

주[1]. 항원결정기(epitope) : 항체가 항원을 식별하게 해 주는 항원의 특정한 부분

주[2]. 키메라항원수용체 : T림프구 수용체 일부와 항체의 항원인식부위가 결합된 복합체, 항원과 결합 시 세포독성 T림프구를 활성화함

주[3]. 흑색종 : 피부암의 일종

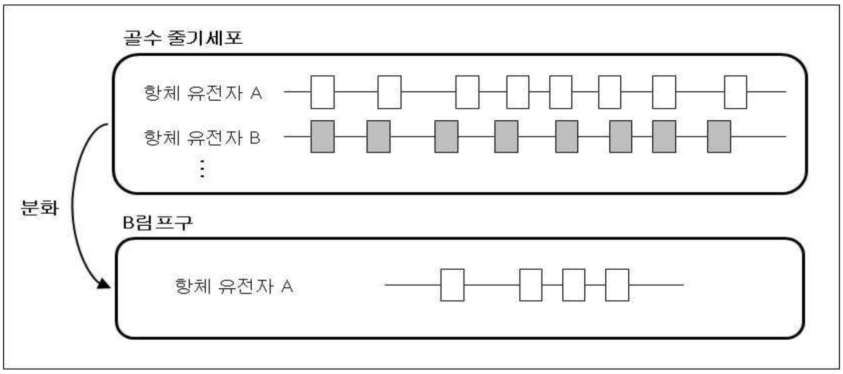
[문제 2-1] (7점) 변이단백질과 결합하는 항체의 유전자 염기서열과 항체 유전자를 확보하였다. DNA 재조합기술을 이용하여 항체 유전자를 조작하기 위하여, 플라스미드의 EcoRI과 BamHI 제한효소 인식부위에 항체 유전자를 삽입하려 한다. 유전자증폭기술(Polymerase Chain Reaction, PCR)을 이용하여 항체 유전자의 5′-끝(시작점)을 EcoRI 인식부위에 3′-끝(끝점)을 BamHI 인식부위에 삽입하고자 한다. 항체 유전자의 염기서열과 EcoRI, BamHI 제한효소의 인식부위 염기서열이 아래와 같을 때 PCR에 사용할 5′-끝 프라이머와 3′-끝 프라이머의 염기서열을 제안하시오. (단 프라이머의 길이는 염기 12개로 제한한다)

항체유전자 염기서열 :
ATGGCGACATTGAAAGATCAACTGATCTATAATTTACTGAAGGAAGAACAGACGCCCCAA
AACAAGATTACTGTCGTCGGAGTCGGCGCGGTGGGAATGGCGTGTGCTATCTCTATTTTG
ATGAAAGATTTAGCAGATGAGCTGGCACTTGTAGATGTTATCGAAGATAAGTTGAAAGGA
GAGATGATGGACCTTCAACATGGCAGTTTATTCCTGAGAACGCCAAAGATAGTCTCTGGC
AAGGATTACAACGTAACAGCGAACAGTAAACTGGTCATAATCACAGCTGGAGCCCGGCA
ACAAGAAGGCGAGTCGTGA
EcoRI 제한효소의 인식부위 염기서열 : GAATTC
BamHI 제한효소의 인식부위 염기서열 : GGATCC

[문제 2-2] (6점) 클로로퀸(chloroquine)은 리소좀(lysosome)의 활성을 억제하는 약제이다. 생쥐에 클로로퀸을 주입한 후 암세포의 변이단백질을 주입하니 항체가 형성되지 않았다. 생쥐에서 항체가 생성되지 못한 원인을 자세히 설명하시오.

[문제 2-3] (5점) 입양면역세포전달요법의 경우 오랜 기간 치료 시 키메라항원수용체 발현 세포독성 T림프구에 의하여 파괴되지 않는 암세포가 발생하여 종종 치료의 어려움을 겪는다. 키메라항원수용체 발현 세포독성 T림프구에 의하여 파괴되지 않는 암세포가 발생하는 원인을 항원-항체 반응의 특이성 관점에서 설명하시오.

[문제 2-4] (7점) 인체는 한정된 수의 유전자로 수많은 항원에 대응하는 서로 다른 항체들을 만들어내어야 한다. 즉 정해진 수의 유전자보다 더 많은 종류의 항체를 만들어야 한다. 이렇게 항체의 다양성을 높이려는 방법의 하나로, 항체 생산 세포는 DNA 재조합 방식을 사용한다. 아래 그림과 같이 골수 줄기세포에는 다수의 엑손들을 보유한 다수의 항체 유전자들이 존재하나, 분화된 B림프구 하나에는 4개의 엑손들만을 보유한 한 개의 항체 유전자만이 존재한다고 가정하자. 골수 줄기세포 항체 유전자들이 각각 20개의 엑손들을 가지고 있다고 가정한다면, 인체가 DNA 재조합 방식만을 이용해서 총 오십만 개 이상의 서로 다른 항체를 만들려면 골수 줄기세포는 최소 몇 개 이상의 항체 유전자들을 가지고 있어야 하는가? 계산과정과 그 이유를 기술하시오. (단 엑손의 순서는 바뀌지 않는다)



[문제 2-5] (5점) 우리 몸의 방어 작용은 비특이적 방어 작용과 특이적 방어 작용으로 나뉜다. 이중 특이적 방어 작용은 진화의 과정 중 비교적 최근에 생겨난 것으로 확인된다. 창고기, 불가사리, 해삼 등은 특이적 방어 작용을 보유하고 있으나, 말미잘, 지렁이, 오징어, 가재 등은 특이적 방어 작용을 보유하고 있지 않다고 알려진다. 이 사실을 바탕으로 특이적 방어 작용은 진화 계통수의 어느 분류군에서 발생하였는지 추론하시오.

[문제 2-6] (5점) 비특이적 방어의 하나인 염증 반응의 과정을 기술하시오.

[문제 2-7] (5점) 흑색종 세포에 독성을 보이는 세포독성 T 세포 클론을 분리 배양하였다. 그리고 세포독성 T 세포에 의해 죽지 않는 변종 흑색종 세포도 분리하였다. 이 세 가지 세포 (흑색종 세포, 변종 흑색종 세포, 흑색종에 대한 세포독성 T 세포)를 이용하여 흑색종 세포에서 발현하며 세포독성 T 세포를 활성화시키는 종양항원을 찾고자 한다. 실험 전략을 간략히 기술하시오.

[문제 2-8] (10점) 아래는 종양 유전자의 엑손이다. 이 종양 유전자로부터 메싸이오닌-아르지닌-트립토판-세린-아르지닌-류신-메싸이오닌의 폴리펩타이드가 합성된다.

5′ CATCAACCTC GACCACCGCA TCCGTTCT 3′
3′ GTAGTTGGAG CTGGTGGCGT AGGCAAGA 5′

(1) (3점) 위의 종양 유전자 엑손으로부터 합성되는 messenger RNA의 염기서열을 기술하시오.

(2) (3점) 위의 종양 유전자에서 13번째 사이토신이 타이민으로 돌연변이 (C13T)가 일어났다. 이 돌연변이 종양 유전자가 합성하는 폴리펩타이드를 기술하고, 이러한 변화가 초래하는 생물학적 의미를 설명하시오.

(3) (4점) 종양에서 27번째 사이토신과 28번째 타이민 사이에 타이민이 추가되었다. 이 돌연변이로 인한 폴리펩타이드의 변화를 기술하고 이 돌연변이가 초래할 수 있는 생물학적 영향을 설명하시오.

3. 출제 의도

생명과학 Ⅰ 과정의 면역학 그리고 생명과학 Ⅱ 과정의 종의 분류, 중합효소연쇄반응, 유전자의 구성과 발현에 관한 내용을 정확히 이해하고 이를 응용할 수 있는가를 알아보고자 하였으며 특히 생명과학 Ⅱ 과정의 유전자에 관한 내용을 실제로 적용하여 문제를 해결할 수 있는가에 출제의 주안점을 두었다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 근거

		영역별 내용
제시문		생명과학 Ⅰ (3) 항상성과 몸의 조절 (p170) [12생과Ⅰ03-07] 백신의 작용 원리를 항원 항체 반응과 관련지어 이해하고, 백신으로 예방하기 힘든 질병을 조사하여 그 이유를 토의할 수 있다. (4) 유전 (p171) [12생과Ⅰ04-01] 염색체, 유전체, DNA, 유전자의 관계를 이해하고, 염색분체의 형성과 분리를 DNA 복제와 세포 분열과 관련지어 설명할 수 있다. [12생과Ⅰ04-04] 염색체 이상과 유전자 이상에 의해 일어나는 유전병의 종류와 특징을 알고, 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
하위문항	2-1	생명과학 Ⅱ (6) 생명공학 기술과 인간생활 (p187) [12생과Ⅱ06-01] DNA 재조합 기술의 원리를 이해하고, 활용 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
	2-2	생명과학 Ⅰ (3) 항상성과 몸의 조절 (p170) [12생과Ⅰ03-06] 다양한 질병의 원인과 우리 몸의 특이적 방어 작용

	과 비특이적 방어 작용을 이해하고, 관련 질환에 대한 예방과 치료 사례를 조사하여 발표할 수 있다. [12생과Ⅰ03-07] 백신의 작용 원리를 항원 항체 반응과 관련지어 이해하고, 백신으로 예방하기 힘든 질병을 조사하여 그 이유를 토의할 수 있다.
2-3	생명과학 Ⅰ (3) 항상성과 몸의 조절 (p170) [12생과Ⅰ03-06] 다양한 질병의 원인과 우리 몸의 특이적 방어 작용과 비특이적 방어 작용을 이해하고, 관련 질환에 대한 예방과 치료 사례를 조사하여 발표할 수 있다. [12생과Ⅰ03-07] 백신의 작용 원리를 항원 항체 반응과 관련지어 이해하고, 백신으로 예방하기 힘든 질병을 조사하여 그 이유를 토의할 수 있다.
2-4	생명과학 Ⅱ (4) 유전자의 발현과 조절 (p184) [12생과Ⅱ04-01] 원핵세포와 진핵세포의 유전체 구성과 유전자 구조를 이해하고 차이를 비교할 수 있다. [12생과Ⅱ04-03] 전사와 번역 과정을 거쳐 유전자가 발현됨을 이해하고, 모형을 이용하여 유전자 발현 과정을 설명할 수 있다.
2-5	생명과학 Ⅱ (5) 생물의 진화와 다양성 (p186) [12생과Ⅱ05-03] 3역 6계의 분류 체계를 이해하고 각 분류군의 차이를 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ05-04] 동물과 식물 분류군의 특징을 문 수준에서 이해하고, 이들 간의 유연관계를 계통수를 이용하여 표현할 수 있다.
2-6	생명과학 Ⅰ (3) 항상성과 몸의 조절 (p170) [12생과Ⅰ03-06] 다양한 질병의 원인과 우리 몸의 특이적 방어 작용과 비특이적 방어 작용을 이해하고, 관련 질환에 대한 예방과 치료 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
2-7	생명과학 Ⅱ (6) 생명공학 기술과 인간생활 (p187) [12생과Ⅱ06-01] DNA 재조합 기술의 원리를 이해하고, 활용 사례를 조사하여 발표할 수 있다. [12생과Ⅱ06-02] 핵치환, 조직 배양, 세포 융합의 원리를 이해하고, 활용 사례를 조사하여 발표할 수 있다. [12생과Ⅱ06-03] 단일클론항체, 유전자 치료, 줄기세포를 난치병 치료에 적용한 사례를 이해하고, 이러한 치료법의 전망에 대해 토의할 수 있다.
2-8	생명과학 Ⅱ (4) 유전자의 발현과 조절 (p184) [12생과Ⅱ04-03] 전사와 번역 과정을 거쳐 유전자가 발현됨을 이해하고, 모형을 이용하여 유전자 발현 과정을 설명할 수 있다. [12생과Ⅱ04-04] 유전 암호를 이해하고, 유전 암호 표를 사용하여 유전 정보를 해독할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	생명과학 I	오현선 외 5인	Mirae N	2020	100-121
	생명과학 I	심규철 외 5인	비상교육	2020	92-105
	생명과학 II	전상학 외 7인	지학사	2020	104-140, 150-182, 192-218
	생명과학 II	이준규 외 5인	천재교육	2020	114-410, 144-184, 188-218
	생명과학 II	권혁빈 외 5인	㈜교학사	2020	99-130, 137-174, 181-206
	생명과학 II	심규철 외 5인	Visang	2020	113-143, 151-188, 195-214

5. 문항 해설

제시문의 내용은 게놈의 축적된 변이로 발생 및 진행하는 종양 질환의 새로운 치료법인 면역항암요법에 대한 전반적인 내용을 설명하였습니다. 그리고 본 종양 면역화학요법의 설명을 이해하기 위해 필수적인 지식인 유전자 증폭기법, 종의 분류, 특이 그리고 비특이적 면역 반응, 유전자의 전사와 번역 등의 내용을 교과과정에서 습득한 지식을 바탕으로 응용하여 적용할 수 있는 가를 알아보기 위한 질문을 기술하였습니다.

6. 채점 기준

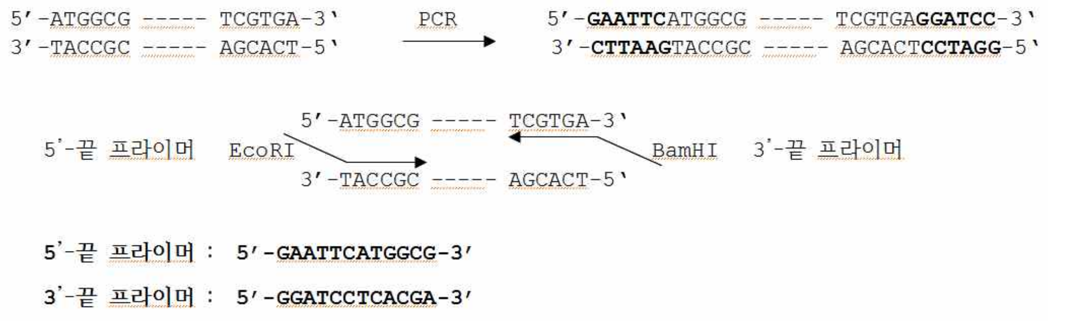
하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	추론 과정 생략 가능 5′-, 3′- 끝 프라이머 염기서열 모두 정확히 기재 시 7점 부여 5′- 끝 프라이머 염기서열만 정확히 기재 시 3점 부여 3′- 끝 프라이머 염기서열만 정확히 기재 시 4점 부여 염기서열이 하나라도 틀리면 틀린 것으로 간주, 5′, 3′ 기재하지 않아도 맞는 것으로 간주	7점

[2-2]	대식세포와 식포 (또는 식세포작용, 또는 식균작용) 언급 1점, 리소좀과 융합 언급 1점, 리소좀 가수분해 효소 언급 1점, 대식세포 표면 항원 제시 언급 1점, 보조 T림프구가 비활성화 언급 1점, B림프구가 형질세포로 분화하는데 실패 언급 1점	6점
[2-3]	암세포의 지속적인 변이 축적 언급 2점, 항원 단백질의 키메라항원수용체와 결합 실패 언급 2점, 키메라항원수용체 발현 세포독성 T림프구에 의한 암세포 파괴 실패 언급 1점	5점
[2-4]	순서에 상관없이 4개 선택 언급 또는 통계의 조합 언급 5점 (${}_{20}C_4$만 기술해도 5점) 계산식과 계산이 정확하면 2점 (계산식 안쓰고 답만 쓰면 0점)	7점
[2-5]	각 동물들이 속한 분류군이 모두 정확하면 2점 (계통수를 그리고 각 동물의 위치 언급해도 2점), 후구동물 정확히 기재하면 3점 (각 동물들이 속한 분류군이 일부만 정확히 기재되어도 후구동물을 정확히 기재하면 4점)	5점
[2-6]	비만세포와 대식세포 그리고 화학신호물질 (또는 히스타민)의 세단어가 동시에 답안에 들어 있으면 2점 화학신호물질에 의한 모세혈관의 확장과 투과성 증가가 답안에 있으면 2점 백혈구의 식균작용 (식세포작용)에 의해 병원체와 세포찌꺼기를 제거가 들어가 있으면 1점	5점
[2-7]	"흑색종세포의 게놈을 분리하고 제한 효소를 이용하여 작은 조각으로 자른다"를 그리거나 기술하면 1점. 게놈 조각을 유전자 운반체에 클로닝하는 과정을 그리거나 기술하면 1점. "게놈 조각 함유 유전자 운반체를 변종흑색종세포에 넣어주고 세포독성 T 세포에 의해 죽는지를 조사한다."을 기술하거나 그림으로 설명하면 2점 세포독성 T 세포에 의해 죽는 변종흑색종세포로부터 넣어준 게놈 조각의 유전자를 분석한다고 기술하면 1점	5점
[2-8] (1)	정답과 똑같이 기술하면 총 3점 AGAACGGAUG CGGUGGUCGA GGUUGAUG: 정답에서 5′ 3′ 숫자를 기술하지 않으면 총 2점 3′ GUAGUUGGAG CUGGUGGCGU AGGCAAGA 5′: 방향을 바꾸어서 기술하면 총 1점 정답에서 염기서열의 오류 (2개이하)가 있으면 총 2점 정답에서 염기서열의 오류 (3개이상)가 있으면 총 0점 띄어쓰기는 정답과 상관없음	3점

[2-8] (2)	UGA 종결코돈이 생성됨을 기술하면 1점 메싸이이오닌-아르지닌의 폴리펩타이드가 생성됨 또는 메타이오닌-아르지닌이 생성됨 1점 제대로된 단백질이 생성되지 않아서 기능이 소실됨 1점	3점
[2-8] (3)	생성되는 폴리펩타이드의 변화가 없음을 기술하면 2점 전사의 속도를 증가시키거나 감소할 수 있지만 유전자 발현의 변화가 없을 가능성도 있다고 기술하면 2점	4점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1]



[문제 2-2]

대식세포는 항원을 식포로 에워싸 [또는 식세포작용(식균작용)으로] 세포 안으로 유입하고, 리소좀과 식포를 융합하여 항원을 분해한 후 항원을 대식세포 표면에 제시한다. 리소좀에는 다양한 가수 분해효소가 들어 있는데, 리소좀의 활성이 억제될 경우 항원을 분해하지 못하여 항원을 대식세포 표면에 제시하지 못한다. 이에 보조 T림프구가 항원을 인식하지 못하여 활성화되지 못하고, 보조 T림프구에 의하여 B림프구가 형질세포로 분화하지 못하기 때문에 항체가 생성되지 못한다.

[문제 2-3]

암세포는 수많은 변이가 축적되는 세포로, 암세포 게놈의 변이가 지속적으로 진행되어 키메라항원수용체와 결합하는 (또는 인식되는) 항원 단백질 항원결정기(epitope)의 아미노산 서열(또는 구조)이 변하면, 항원 단백질이 키메라항원수용체에 의하여 인식되지 못하고, 결국 암세포는 키메라항원수용체 발현 세포독성 T림프구에 의해 파괴되지 못한다.

[문제 2-4]

20개의 엑손에서 4개의 엑손이 순서에 상관없게 선택될 경우의 수는 ${}_{20}C_4$ = 20!/[(20-4)!x4!] = (20x19x18x17)/(4x3x2) = 4,845개. 오십만 개 이상의 항체를 만드는 데 필요한 유전자 수는 500,000/4,845 = 103.19. 그러므로 최소 104개 이상의 유전자가 있어야 한다.

[문제 2-5]

창고기는 척삭동물, 불가사리와 해삼은 극피동물에 속한다. 말미잘은 자포동물, 지렁이는

환형동물, 오징어는 연체동물, 가재는 절지동물에 속한다. 그러므로 특이적 방어 작용은 후구동물에서 발생되었다.

[문제 2-6]
1. 병원체가 점막이나 피부를 침입하면 비만세포와 대식세포에서 화학신호물질 (또는 히스타민)이 분비된다.
2. 화학신호물질에 의해 모세혈관이 확장되어 혈류가 증가하고 혈관의 투과성이 증가한다.
3. 백혈구가 상처 부위로 모여들어 식균작용 (식세포작용)으로 상처 부위의 병원체와 세포 찌꺼기를 제거한다.
4. 상처가 치유된다.

[문제 2-7]
1. 흑색종세포의 게놈을 분리한다.
2. 제한 효소를 반응시켜 흑색종세포의 게놈을 작은 조각으로 자른다.
3. 흑색종 세포의 게놈 조각을 유전자 운반체 (예, 플라즈미드)로 클로닝한다.
4. 흑색종세포 게놈 조각을 함유한 유전자 운반체를 변종 흑색종 세포에 넣어준다.
5. 이 변종흑색종세포와 세포독성 T 세포를 반응시켜 세포독성이 회복되는지 평가한다.
6. 세포독성이 회복된 변종흑색종세포의 흑색종세포 게놈 조각을 분석하여 세포독성 T 세포의 흑색종세포에 대한 독성을 유발하는 유전자를 찾는다.

[문제 2-8] (1)
5′ AGAACGGAUGCGGUGGUCGAGGUUGAUG 3′

[문제 2-8] (2)
돌연변이에 의해 생성되는 mRNA는 다음과 같다.
5′ AGAACGGAUGCGGUGAUCGAGGUUGAUG 3′
UGA 종결코돈이 새로이 생기게 되므로 메싸이오닌-아르지닌으로 된 폴리펩타이드가 생성된다. 그러므로 단백질 합성이 조기 종결되므로 제대로 된 단백질이 생성되지 못하므로 이 유전자의 기능이 소실될 것이다.

[문제 2-8] (3)

27번째 사이토신과 28번째 타이민은 단백질을 합성하는 유전자 부위가 아니므로 생성되는 폴리펩타이드의 변화는 없다. 그러나 유전자의 전사를 조절하는 작동 부위이므로 전사의 속도를 증가시키거나 감소할 수 있으며 한편으로는 유전자 발현의 변화가 없을 가능성도 있다.