부록 3 문항카드 양식 3 (자연1계열 – 수학)

3-1. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 1 (자연대·IT대) / 문제 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>합성함수의 미분법, 치환적분법</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">25분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=f'(g(x))g'(x)$$

[출처 : 미적분 「합성함수의 미분법」]

구간 $[0,\infty)$에서 연속이고 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(i) $g(1)=1$이고 모든 $x\ge 0$에 대하여 $g(2x)=3g(x)$이다.

(ii) 모든 $x\ge 0$에 대하여 $f(g(x))=x$이다.

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) $f'(3)\times g'(1)$의 값을 구하시오.

(2) $\int_1^2 g(x)\,dx = A$일 때 $\int_0^1 g(x)\,dx$의 값을 A에 대한 식으로 나타내시오.

3. 출제 의도

합성함수의 미분법 및 치환적분법을 활용하여 주어진 함수의 미분계수와 정적분의 값을 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>미적분 - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법
미적분 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td><table><tr><th colspan="2">과목명: 미적분</th></tr><tr><td>성취기준 1</td><td>[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</td></tr><tr><td>성취기준 2</td><td>[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr></table></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2018	81
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2018	143

5. 문항 해설

합성함수의 미분법을 활용하여 제시된 조건을 만족하는 두 함수의 미분계수 사이의 관계를 올바르게 유도하며, 치환적분법을 활용하여 함수 서로 다른 구간에서 함수 $g(x)$의 정적분 값 사이의 관계를 올바르게 유도하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건으로부터 두 미분계수의 곱을 계산할 수 있다.	10
(2)	치환적분법을 이용하여 주어진 정적분의 값과 다른 정적분의 값의 관계를 찾을 수 있다.	15

7. 예시 답안

(1) 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(2x)=3g(x)$이므로 $x=1$일 때

$$g(2)=3g(1)=3$$

합성함수의 미분법의 결과 $f'(g(x))g'(x)=1$로부터 $f'(3)$의 값을 구하면

$$f'(g(2))g'(2)=f'(3)g'(2)=1,\quad f'(3)=\frac{1}{g'(2)}$$

$g(x)=\frac{1}{3}g(2x)$의 양변을 x에 대하여 미분하여, $g'(1)$의 값을 구하면

$$g'(x)=\frac{2}{3}g'(2x),\qquad g'(1)=\frac{2}{3}g'(2)$$

따라서

$$f'(3)\times g'(1)=\frac{1}{g'(2)}\times\frac{2}{3}g'(2)=\frac{2}{3}$$

이다.

(2) $B=\int_0^1 g(x)\,dx$라고 하자. $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{3}g(2x)\,dx$에서 $2x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$,

$x=1$일 때 $t=2$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$$
\begin{aligned}
B &= \int_0^2 \frac{1}{3} g(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{6} \int_0^2 g(t)\, dt \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 g(t)\, dt + \frac{1}{6} \int_1^2 g(t)\, dt \\
&= \frac{1}{6} B + \frac{1}{6} A
\end{aligned}
$$

따라서 구하는 정적분의 값은

$$\int_0^1 g(x)\, dx = B = \frac{1}{5} A$$

이다.

3-2. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 1 (자연대·IT대) / 문제 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>함수의 연속, 지수함수와 로그함수의 미분, 정적분의 활용</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">25분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

② 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

③ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

[출처 : 수학II 「함수의 연속」]

삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(i) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

(ii) 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$의 교점은 두 개이며, 두 교점의 x좌표 중 더 큰 값은 2이다.

(iii) 함수 $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}\left(\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}-1\right) & (x\neq 2) \\ 16 & (x=2) \end{cases}$ 는 연속함수이다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

3. 출제 의도

삼차함수의 특징, 함수의 연속성과 극한, 미분계수의 정의를 이용하여 구하는 함수에 대한 정보를 바르게 도출하고, 도출된 함수로 정의되는 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 해결하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>수학 II - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
수학 II - (2) 미분 - 1 미분계수
수학 II - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
미적분 - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td><table>
<tr><td colspan="2">과목명: 수학 II</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학 II 01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">과목명: 미적분</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	이준열 외 9명	천재교육	2018	29
	수학 II	김원경 외 14명	비상교육	2018	125
	미적분	권오남 외 14명	교학사	2019	60
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	60

5. 문항 해설

교점의 정보와, 주어진 함수와 관련된 다른 함수의 연속성, 미분계수의 정의를 이용하여 두 곡선의 차이를 정의하는 함수를 바르게 도출하고, 이로부터 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 조건으로부터 두 함수의 차를 나타내는 삼차함수의 모양을 찾고 정적분의 값을 계산할 수 있다.	25

7. 예시 답안

$p(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 함수 $p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. 방정식 $p(x)=0$의 두 해 중 작은 값을 a라고 하면

$$p(x)=(x-a)(x-2)^2 \quad \text{또는} \quad p(x)=(x-a)^2(x-2)$$

$p(2)=0$임을 이용하면

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}-1\right)=\lim_{x\to 2}\frac{e^{f(x)-g(x)}-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{e^{p(x)}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{e^{p(x)}-e^{p(2)}}{x-2}$$

위의 극한값은 $e^{p(x)}$의 $x=2$에서의 미분계수이므로 $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=p'(2)e^{p(2)}=p'(2)$이다. 함수 $h(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=p'(2)=16$이다.

만약 $p(x)=(x-a)(x-2)^2$이면

$$p'(x)=(x-2)^2+2(x-a)(x-2), \quad p'(2)=0\neq 16$$

이므로 $p(x)=(x-a)^2(x-2)$가 되어야 한다. 이때

$$p'(x) = 2(x-a)(x-2) + (x-a)^2, \quad p'(2) = (2-a)^2 = 16$$

이므로 $a=-2$ 또는 $a=6$이어야 한다. 그런데 $a<2$이므로

$$p(x) = (x+2)^2(x-2)$$

이다.

구간 $[-2,2]$에서 $p(x) \le 0$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|dx &= \int_{-2}^{2}[-p(x)]dx = -\int_{-2}^{2}(x+2)^2(x-2)dx \\ &= -\int_{-2}^{2}(x^3+2x^2-4x-8)dx \\ &= -\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 8x\right]_{-2}^{2} \\ &= -\left(4+\frac{16}{3}-8-16\right) + \left(4-\frac{16}{3}-8+16\right) \\ &= \frac{64}{3}\end{aligned}$$

이다.

3-3. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

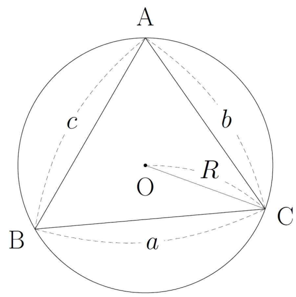
유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 1 (자연대·IT대) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ
	핵심개념 및 용어	이차방정식의 근과 계수의 관계, 사인법칙과 코사인법칙
예상 소요 시간	20분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



[출처 : 수학I 「사인법칙과 코사인법칙」]

반지름의 길이가 $\frac{7\sqrt{2}}{4}$인 원에 삼각형 ABC가 내접한다. 삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{6}$이고 $\cos A=\frac{5}{7}$이다.

이때 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 모두 구하시오.

3. 출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형에 대한 정보를 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식 수학 I - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
관련 성취기준	과목명: 수학 성취기준 [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. 과목명: 수학 I 성취기준 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	60
	수학	고성은 외 6명	좋은책 신사고	2018	51
	수학 I	배종숙 외 6명	금성출판사	2018	97
	수학 I	박교식 외 19명	동아출판	2018	86

5. 문항 해설

사인법칙을 이용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구하고, 삼각형의 넓이의 조건과 코사인법칙을 이용하여 나머지 두 변의 합과 곱을 유도한 뒤, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이를 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	사인법칙과 코사인법칙, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 세 변의 길이의 값을 구할 수 있다.	20

7. 예시 답안

$\cos A = \frac{5}{7}$, $0 < A < \pi$이므로

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2R,\ \text{즉}\ a = 2R\sin A = 2\times\frac{7\sqrt{2}}{4}\times\frac{2\sqrt{6}}{7} = 2\sqrt{3}$$

삼각형 ABC의 넓이는 $\sqrt{6}$이므로

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{6}}{7}bc,\ \text{즉}\ bc = 7$$

코사인법칙에 의하여

$$12 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= (b+c)^2 - 2bc(1+\cos A)$$

이므로

$$(b+c)^2 = 12 + 2bc(1+\cos A) = 12 + 14\left(1+\frac{5}{7}\right) = 36, \quad b+c = 6$$

위로부터 $bc = 7$, $b+c = 6$이다. 두 수 b, c를 근으로 갖는 이차방정식

$$x^2 - (b+c)x + bc = x^2 - 6x + 7 = 0$$

의 해는 $x = 3 \pm \sqrt{2}$이다.
따라서 삼각형의 세 변의 길이는 $2\sqrt{3}$, $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$이다.

3-4. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 1 (자연대·IT대) / 문제 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수의 그래프, 등비수열, 미분계수, 여러 가지 함수의 적분
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

① $r \neq 1$일 때 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r = 1$일 때 $S_n = na$

[출처 : 수학I 「등비수열」]

모든 자연수 n에 대하여 $x_n = 3\pi\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$이다. 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(i) 닫힌구간 $[x_n, x_{n+1}]$에서 실수 a_n, 양수 b_n에 대하여 $f(x) = a_n \sin(b_n x)$이다.

(ii) $f(x_n) = f(x_{n+1}) = 0$이고, 열린구간 (x_n, x_{n+1})에서 방정식 $f(x) = 0$은 서로 다른 2개의 해를 갖는다.

(iii) $f'(x_1) = \dfrac{1}{2}$

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) b_{10}을 구하시오.

(2) 정적분 $\int_{x_1}^{x_{10}} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

삼각함수의 주기성과 미분계수의 정의로부터 주어진 함수의 정보를 도출하여 주어진 정적분을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="2">수학 Ⅰ - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수
수학 Ⅱ - (2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수
미적분 - (1) 수열의 극한 - $\boxed{2}$ 급수
미적분 - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
미적분 - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법</td></tr>
<tr><td rowspan="8">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 수학 Ⅰ</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12수학 Ⅰ 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수 그래프를 그릴 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">과목명: 수학 Ⅱ</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>[12수학 Ⅱ 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">과목명: 미적분</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	박교식 외 19명	동아출판	2018	72
	수학 I	배종숙 외 6명	금성출판사	2018	97
	수학 II	김원경 외 14명	비상교육	2018	125
	수학 II	권오남 외 14명	교학사	2018	68
	미적분	권오남 외 14명	교학사	2019	37
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	75, 137

5. 문항 해설

x절편의 개수와 삼각함수의 주기성, 미분계수의 정의를 이용하여 각각의 구간에서 함수를 올바르게 정의하고 정적분을 정확히 계산하여 전체 구간에서의 정적분을 등비급수의 합을 이용하여 올바르게 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	사인함수의 주기의 성질과 문제의 조건으로부터 수열의 제10항을 찾아 낼 수 있다.	9
(2)	미분계수의 정의로부터 주어진 함수의 모양을 찾아내고 각 구간의 정적분의 합을 등비급수로 나타내어 구하는 정적분의 값을 계산할 수 있다.	21

7. 예시 답안

(1) 구간 $[x_n, x_{n+1}]$에서 $f(x) = a_n \sin(b_n x)$이므로 조건 (ii)에 의하여

$$f(x_n) = f(x_n + \frac{\pi}{b_n}) = f(x_n + \frac{2\pi}{b_n}) = f(x_n + \frac{3\pi}{b_n}) = 0$$

따라서 $x_{n+1} = x_n + \dfrac{3\pi}{b_n}$이고

$$x_{n+1}-x_n=3\pi(1-\frac{1}{2^n})-3\pi(1-\frac{1}{2^{n-1}})=\frac{3\pi}{2^n},\ b_n=2^n$$

그러므로 $b_{10}=2^{10}=1024$이다.

(2) $b_nx_n=2^n\times3\pi(1-\frac{1}{2^{n-1}})=3\pi(2^n-2)$, $b_nx_{n+1}=b_nx_n+3\pi=3\pi(2^n-1)$이므로,

모든 $n\geq1$에 대하여

$$\cos(b_nx_n)=1,\ \cos(b_nx_{n+1})=-1$$

함수 $f(x)$는 미분가능하고, $n\geq2$일 때 구간 $[x_{n-1},x_n]$에서 $f(x)=a_{n-1}\sin(2^{n-1}x)$, 구간 $[x_n,x_{n+1}]$에서 $f(x)=a_n\sin(2^nx)$이다. 실수 전체에서 미분가능한 두 함수 $g(x)=a_{n-1}\sin(2^{n-1}x), h(x)=a_n\sin(2^nx)$에 대하여

$$\begin{aligned}f'(x_n)&=\lim_{x\to x_n-}\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}=\lim_{x\to x_n-}\frac{g(x)-g(x_n)}{x-x_n}\\&=g'(x_n)=2^{n-1}a_{n-1}\cos(2^{n-1}x_n)\\&=-2^{n-1}a_{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x_n)&=\lim_{x\to x_n+}\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}=\lim_{x\to x_n+}\frac{h(x)-h(x_n)}{x-x_n}\\&=h'(x_n)=2^na_n\cos(2^nx_n)\\&=2^na_n\end{aligned}$$

이로부터 $n\geq2$일 때

$$-2^{n-1}a_{n-1}=f'(x_n)=2^na_n,\ a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}$$

또한, $f'(x_1)=2a_1\cos(0)=2a_1=\frac{1}{2}$이므로 $a_1=\frac{1}{4}$이다. 그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이고, $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$이다.

구간 $[x_n,\ x_{n+1}]$에서

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} a_n \sin(2^n x)\,dx$$
$$= \frac{a_n}{2^n}\left[-\cos(2^n x)\right]_{x_n}^{x_{n+1}}$$
$$= \frac{a_n}{2^n}(-\cos(2^n x_{n+1}) + \cos(2^n x_n))$$
$$= \frac{a_n}{2^{n-1}} = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

따라서

$$\int_{x_1}^{x_{10}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{9}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^9\right)}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^9\right)$$

이다.

부록 4 문항카드 양식 3 (자연2계열 – 수학)

4-1. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 2 (공대) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	합성함수의 도함수, 정적분
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

> 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=t$로 놓으면
>
> $$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$
>
> [출처 : 미적분 「치환적분법」]

함수 $f(x)$가 구간 $[1,\infty)$에서 $f(x)=x\ln x$로 정의되어 있다. 구간 $[0,\infty)$에서 연속이고 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능한 함수 $g(x)$는 모든 $x\geq 0$에 대하여

$$g(x)\geq 1,\ \ f(g(x))=x^2$$

을 만족시킨다. 이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\sqrt{e},e)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 정적분 $\int_0^{\sqrt{e}} 2x\{g(x)\}^2\,dx$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

합성함수의 미분법 및 치환적분법을 적용해 접선의 방정식 및 정적분의 값을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>미적분 - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
미적분 - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법
미적분 - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
미적분 - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td><table>
<tr><th colspan="2">과목명: 미적분</th><th>관련</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 4</td><td>[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	76, 127
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2019	77, 127

5. 문항 해설

로그함수와 합성함수의 성질을 이용하여 정의된 함수 $g(x)$의 도함수의 정보 및 접선의 방정식을 구하고, 치환적분법을 이용하여 주어진 정적분의 값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	합성함수의 조건으로부터 미분계수를 구하고, 접선의 방정식을 찾는다.	7.5
(2)	함수 g의 정적분을 함수 f와의 합성의 조건, 부분적분법과 치환적분법을 적용하여 구한다.	17.5

7. 예시 답안

(1) 합성함수의 미분법에 의하여 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) = 2x$이므로

$$f'(g(\sqrt{e}))g'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}$$

$g(\sqrt{e}) = e$이고 $f'(x) = 1 + \ln x$이므로

$$g'(\sqrt{e}) = \frac{2\sqrt{e}}{f'(e)} = \frac{2\sqrt{e}}{1+\ln e} = \sqrt{e}$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(\sqrt{e}, e)$에서의 접선의 방정식은

$$y = \sqrt{e}(x - \sqrt{e}) + e = \sqrt{e}\,x$$

이다.

(2) $g(x) = t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx} = g'(x)$이다. $g(0) = \alpha$로 놓으면 $f(\alpha) = \alpha\ln\alpha = 0$이고 $\alpha \ge 1$이므로 $g(0) = 1$이다. 또한 $g(\sqrt{e}) = e$이고 $2x = f'(g(x))g'(x)$이므로 치환적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{e}} 2x\{g(x)\}^2\,dx &= \int_0^{\sqrt{e}} f'(g(x))g'(x)\{g(x)\}^2\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{e}} \{g(x)\}^2 f'(g(x)) \times g'(x)\,dx \\ &= \int_1^e t^2 f'(t)\,dt = \int_1^e (t^2 \ln t + t^2)\,dt \\ &= \int_1^e t^2 \ln t\,dt + \int_1^e t^2\,dt\end{aligned}$$

부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_1^e t^2 \ln t\,dt &= \left[\frac{1}{3}t^3 \ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}t^3 \frac{1}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{3}e^3 - \left[\frac{1}{9}t^3\right]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) \\ &= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\end{aligned}$$

또한

$$\int_1^e t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$$

이므로 구하는 정적분의 값은

$$\int_0^{\sqrt{e}} 2x\{g(x)\}^2\,dx = \frac{5}{9}e^3 - \frac{2}{9}$$

이다.

4-2. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

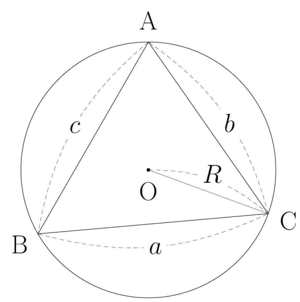
유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 2 (공대) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II
	핵심개념 및 용어	사인법칙, 미분계수, 접선의 기울기
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



[출처 : 수학I 「사인법칙과 코사인법칙」]

함수 $f(x)$가 구간 $[-1,1]$에서 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & (-1 \le x \le 0) \\ \sqrt{1-x^2} & (0 < x \le 1) \end{cases}$$

곡선 $y=f(x)$ 위에 오각형 ABCDE의 모든 꼭짓점이 놓여 있다. 점 A의 좌표는 $(1,0)$, 점 E의 좌표는 $(-1,0)$이고 두 점 B, C의 x좌표는 모두 양수이며 $\angle ABC = 150^\circ$이다. 이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 삼각형 ACE의 넓이를 구하시오.
(2) 오각형 ABCDE의 넓이가 최대가 되도록 하는 꼭짓점 B, C, D의 좌표를 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 조건으로부터 내접하는 삼각형을 구성하고 사인법칙을 활용할 수 있는 능력, 접선의 기울기를 활용하여 넓이가 최대가 되는 점을 구할 수 있는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 I - (2) 삼각함수 - [1] 삼각함수 수학 II - (2) 미분 - [3] 도함수의 활용
관련 성취기준	과목명: 수학 I / 관련 성취기준 1: [12수학I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 과목명: 수학 II / 관련 성취기준 1: [12수학II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	65
	수학 I	박교식 외 19인	동아출판	2018	61
	수학 II	김원경 외 14인	비상	2018	71
	수학 II	홍성복 외 10인	지학사	2018	74

5. 문항 해설

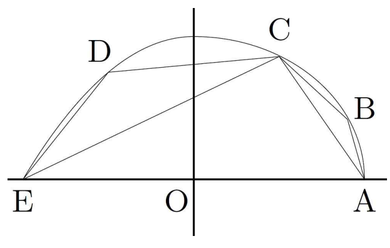
사인법칙을 이용하여 한 점의 위치를 구하고, 접선의 기울기를 이용하여 주어진 오각형을 이루는 삼각형의 넓이가 최대가 되는 점을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	사인법칙을 적용하여 점 C의 좌표를 구하고, 삼각형 ACE의 넓이를 구한다.	7.5
(2)	오각형 ABCDE의 넓이가 최대가 되게 하는 점의 좌표를 구한다.	17.5

7. 예시 답안

(1) 오각형 ABCDE에 두 대각선 AC, CE를 그어 오각형 ABCDE를 세 개의 삼각형 ABC, ACE, CDE로 나누자.



점 A,B,C가 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(x>0)$ 위에 놓여 있으므로 삼각형 ABC는 중심이 O(0,0), 반지름이 1인 원에 내접한다. 그러므로 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 150^\circ}=2,\ \overline{\mathrm{AC}}=1$$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}=1$이므로, 삼각형 OAC는 세 변의 길이가 모두 1인 정삼각형이다.

따라서 $\mathrm{C}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$이고 삼각형 ACE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.

(2) 문항 (1)에 의하여 삼각형 ACE는 고정되어 있으므로 두 삼각형 ABC, CDE의 넓이가 각각 가장 큰 값을 가질 때 오각형 ABCDE의 넓이는 최대가 된다.

삼각형 ABC의 넓이는 두 점 A, C를 지나는 직선과 점 B 사이의 거리가 최대일 때 가장 큰 값을 갖는다. 호 AC 위의 점 B에서 현 AC까지의 거리는 선분 OB가 현 AC를 수직이등분할 때 최대가 된다.

$$\mathrm{C}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(\cos 60^\circ,\sin 60^\circ)$$

이므로 B의 좌표는

$$\mathrm{B}=(\cos 30^\circ,\ \sin 30^\circ)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

또한, 삼각형 CDE의 넓이가 최대가 되기 위해서는 두 점 C,E를 지나는 직선과 점 D 사이의 거리가 최대가 되어야 한다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}+1}=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{(1-x^2)-1}{x}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$$

이므로, $f(x)$는 구간 $(-1,1)$에서 미분가능하고

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & (-1<x\le 0)\\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & (0<x<1)\end{cases}$$

따라서, 점 D에서의 접선과 두 점 C,E를 지나는 직선이 평행할 때 삼각형 CDE의 넓이는 최대가 된다.

두 점 C, E를 지나는 직선의 기울기가 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로, 점 D의 x좌표는

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$을 만족하는 값이다. $f'(x)>0$이기 위해서는 $x<0$이어야 하므로

$$f'(x) = -2x = \frac{1}{\sqrt{3},} \quad x = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

따라서 점 D의 좌표는 $(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{11}{12})$이다.

이로부터 오각형 ABCDE의 넓이가 최대가 되도록 하는 꼭짓점 B, C, D의 좌표는

$$B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}),\ C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),\ D(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{11}{12})$$

이다.

4-3. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 2 (공대) / 문제 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>원에서의 접선, 삼각함수, 최댓값</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">20분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서
① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
[출처 : 수학II 「함수의 극대와 극소」]

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$에서의 접선을 ℓ이라고 하고, 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$에서 직선 ℓ에 내린 수선의 발을 H라고 하자. (단, $0<\theta<\pi$)

이때 다음 문항에 답하시오.

(1) 점 H의 좌표를 θ를 이용하여 나타내시오.

(2) 삼각형 APH의 넓이의 최댓값을 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 상황을 이해하고, 원 위의 접선의 성질과 직교하는 직선의 특징을 이용하여 주어진

조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 함수로 표현하고 그 최솟값을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (2) 기하 - 3 원의 방정식 수학II - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 미적분 - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
관련 성취기준	(아래 표)

과목명: 수학		관련
성취기준 1	[10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.	

과목명: 수학 II		관련
성취기준 1	[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	

과목명: 미적분		관련
성취기준 1	[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외 6인	금성교과서	2018	139
	수학	홍성복 외 10인	지학사	2018	140
	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2018	71
	수학 II	홍성복 외 10인	지학사	2018	74
	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	49
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2019	51

5. 문항 해설

주어진 원 위의 점에서의 접선과, 그 접선과 수직이고 특정한 점을 지나는 직선의 교점을 구해 삼각형을 만들고, 삼각형의 넓이를 함수로 표현하여 그 함수의 최댓값을 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	삼각형 AHP의 넓이를 H의 좌표를 이용하여 계산하고, 그 최댓값을 구한다.	20

7. 예시 답안

(1) 원 위의 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$에서의 접선의 방정식은

$$\ell : (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1, \qquad \left(y = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

이고, 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$을 지나고 직선 ℓ에 수직인 직선 ℓ'의 방정식은

$$\ell' : (\cos\theta)y - (\sin\theta)(x+1) = 0$$

이다. 두 직선 ℓ, ℓ'의 교점의 x좌표를 구하면

$$(\sin^2\theta)(x+1) = -(\cos^2\theta)x + \cos\theta, \quad x = \cos\theta - \sin^2\theta$$

이다. 교점의 y좌표는

$$\cos\theta(\cos\theta - \sin^2\theta) + (\sin\theta)y = 1, \quad y = \sin\theta(1 + \cos\theta)$$

그러므로 점 A에서 직선 ℓ에 내린 수선의 발은

$$\mathrm{H}(\cos\theta - \sin^2\theta, \sin\theta(1 + \cos\theta))$$

이다.

(2) 삼각형 APH는 $\angle AHP = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\overline{HA} = \sqrt{(\cos\theta - \sin^2\theta + 1)^2 + (\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)^2} = 1 + \cos\theta,$$

$$\overline{HP} = \sqrt{(\cos\theta - \sin^2\theta - \cos\theta)^2 + (\sin\theta + \sin\theta\cos\theta - \sin\theta)^2} = \sin\theta$$

이므로 삼각형 APH의 넓이를 θ의 함수 $f(\theta)$로 나타내면

$$f(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

함수 $f(\theta)$의 도함수는

$$f'(\theta) = -\frac{1}{2}\sin\theta\sin\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\cos\theta = \cos^2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}$$

$$= (\cos\theta - \frac{1}{2})(\cos\theta + 1)$$

이므로 함수 $f(\theta)$의 증감표는 다음과 같다.

θ	$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$
$f'(\theta)$	$+$	0	$-$
$f(\theta)$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$

구간 $(0, \frac{\pi}{3})$에서 $f'(\theta) > 0$이고 구간 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$에서 $f'(\theta) < 0$이므로, 함수 $f(\theta)$는 구간 $(0, \frac{\pi}{3})$에서 증가하고, 구간 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$에서 감소한다. 따라서 삼각형 APH의 넓이 $f(\theta)$는 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 최댓값

$$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

을 갖는다.

4-4. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 2 (공대) / 문제 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 정적분, 미분계수, 치환적분
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

[출처 : 미적분 「넓이」]

$a+r>2$인 두 양수 a, r에 대하여 함수 $f(x)$가 구간 $[0,a+r]$에서 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \left|\cos\frac{\pi t}{2}\right|dt & (0\le x\le 2)\\ \sqrt{r^2-(x-a)^2} & (2<x\le a+r)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 구간 $[0,a+r]$에서 연속이고 구간 $(0,a+r)$에서 미분가능할 때, 다음 문항에 답하시오.

(1) a와 r의 값을 구하시오.

(2) 정적분 $\displaystyle\int_0^{a+r} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 함수의 정의를 이해하고, 연속성과 미분가능성을 이용하여 미지의 상숫값을 결정하고, 제시된 정적분을 올바르게 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 수학 II - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 미적분 - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 미적분 - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용
관련 성취기준	(아래 표 참조)

과목명: 수학 II		관련
성취기준 1	[12수학II01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.	
성취기준 2	[12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.	

과목명: 미적분		관련
성취기준 1	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.	
성취기준 2	[12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경 외 14인	비상	2018	71
	수학 II	홍성복 외 10인	지학사	2018	74
	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	127,150
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2019	127,151

5. 문항 해설

적분으로 정의된 함수를 올바로 파악하고, 이 함수의 연속성과 미분가능성을 이용하여 원의 일부로 정의된 함수의 성질을 파악하고, 이를 이용하여 주어진 함수의 정적분을 올바르게 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	주어진 함수의 성질을 파악하여 a, r를 구한다.	15
(2)	함수를 구간별로 올바르게 나타내고, 정적분을 구한다.	15

7. 예시 답안

(1) 함수 $f(x)$의 정의에 의하여 $x=2$일 때

$$f(2)=\int_0^2\left|\cos\frac{\pi t}{2}\right|dt=\int_0^1\cos\frac{\pi t}{2}dt-\int_1^2\cos\frac{\pi t}{2}dt$$

$$=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right]_0^1-\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right]_1^2=\frac{4}{\pi}$$

그러므로 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이기 위해서는 $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\dfrac{4}{\pi}$가 성립해야 한다.

또한 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$$f'(2)=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

실수 전체에서 정의된 함수 g를 $g(x)=\displaystyle\int_0^x\left|\cos\frac{\pi t}{2}\right|dt$라고 하면, $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하고

$$g'(2)=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

정적분과 미분의 관계에 의하여 $g'(2) = \left|\cos\frac{2\pi}{2}\right| = 1$이므로

$$f'(2) = \lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$$

따라서, $2 < x \le r+a$일 때

$$y = \sqrt{r^2-(x-a)^2}, \quad (x-a)^2+y^2 = r^2, \; y \ge 0$$

으로 표현되는 함수의 그래프는 점 $(2, \frac{4}{\pi})$를 지나고 점 $(2, \frac{4}{\pi})$에서 접선의 기울기가 1인 원의 일부이다. 점 $(2, \frac{4}{\pi})$와 원의 중심 $(a, 0)$ 사이의 거리는 r이고, 이 두 점을 지나는 직선의 기울기가 -1이므로

$$a = 2+\frac{4}{\pi}, \qquad r = \sqrt{(a-2)^2+\frac{16}{\pi^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

이다.

(2) 함수 $f(x)$는 구간 $[0,2]$에서 다음과 같다.

$$f(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi t}{2}dt = \left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right]_0^x = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} \qquad (0 \le x < 1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \cos\frac{\pi t}{2}dt - \int_1^x \cos\frac{\pi t}{2}dt \\ &= \left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right]_1^x = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} \qquad (1 \le x \le 2) \end{aligned}$$

정적분 $\int_0^{a+r} f(x)\,dx$를 구간을 나누어 나타내면

$$\int_0^{a+r} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{a+r} f(x)\,dx$$

각각의 정적분의 값을 구하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx \\ &= \left[-\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2\left(\frac{4}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{4}{\pi}x+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_1^2=\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}$$

이고, 정적분 $\int_2^{a+r} f(x)dx$는 밑변과 높이가 $\frac{r}{\sqrt{2}}$인 직각삼각형의 넓이와, 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $\frac{3\pi}{4}$인 부채꼴의 넓이의 합을 나타낸다. 즉

$$\int_2^{a+r} f(x)dx = \frac{1}{4}r^2+\frac{1}{2}r^2\frac{3\pi}{4}=\frac{4(2+3\pi)}{\pi^2}$$

이다. 따라서

$$\int_0^{a+r} f(x)dx = \frac{4}{\pi}+\frac{4(2+3\pi)}{\pi^2}=\frac{4(2+4\pi)}{\pi^2}$$

이다.