2-5. 문항카드 ⑤ <자연계열 1회차 1, 2, 3번 문항>

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2022학년도 수시모집 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	명제, 조합, 수열의 합, 귀류법, 삼각함수, 미분법, 속도와 속력, 극대와 극소, 최대와 최소, 정적분, 치환적분법, 부분적분법
예상 소요 시간	90분 / 전체 100분	

2. 문항 및 자료

<가>

$n \geq k$인 자연수 n과 k에 대하여 유리수 $\alpha(n,k)$를 $\alpha(n,k)=\dfrac{1}{k}\,{}_{2n-k}\mathrm{C}_{k-1}$이라고 정의하자.

이때 ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$은

서로 다른 n개에서 $r(0 \leq r \leq n)$개를 택하는 조합의 수이다. 단, $0!=1$로 정의한다.

그러면 항등식 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 이용하여 $n \geq 4$일 때

명제 ①['$\alpha(n,4)$는 자연수이다.'] 가 참임을 증명할 수 있다.

또한, $n \geq 3$일 때 명제 '$3 \cdot \alpha(n,n-1)$이 자연수이다.' 가 참임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}\alpha(n,n-1) &= \frac{1}{n-1}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_{n-2}=\frac{1}{n-1}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_3\\ &=\frac{1}{n-1}\frac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)n}{2\cdot1}\\ &=\frac{1}{3}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_2\end{aligned}$$

소수는 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 1보다 큰 자연수이다.
유리수 $\alpha(17,7)$은 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha(17,7) &= \frac{1}{7}\,{}_{27}\mathrm{C}_6\\ &=\frac{27\cdot26\cdot\cdots\cdot22}{7!} \qquad \cdots\cdots (1)\end{aligned}$$

이다. 유리수 $\alpha(17,7)$이 자연수라고 가정하면, (1)의 우변의 분모인 $7!$이 소수 7의 배수이므로, 분자

$$27\cdot26\cdot\cdots\cdot22 \qquad \cdots\cdots (2)$$

는 소수 7의 배수이다.

그런데 (2)는 소수 7의 배수가 아님을 증명할 수 있다. 따라서 모순이다.

그러므로 $\alpha(17,7)$은 자연수가 아니다.

제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 명제 ①이 참임을 증명하시오.

1-2. $n \geq 4$일 때 $5 \cdot \alpha(n, n-2)$와 $\alpha(100, 67)$이 자연수인지 아닌지를 각각 판별하고, 그 이유를 설명하시오. (단, 67은 소수이다.)

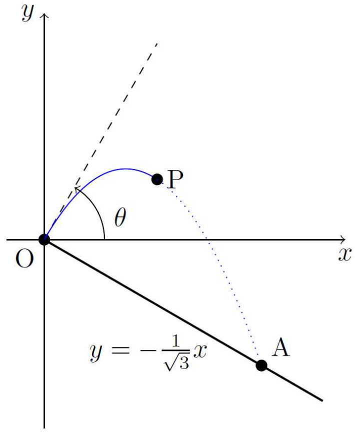
<나>

좌표평면에서 시간에 따라 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$가 $x = f(t)$, $y = g(t)$로 주어질 때, 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(f'(t), g'(t))$이고, 시각 t에서의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$ 이다.

어떤 축구 선수가 내리막길 앞에서 공을 높이 찼을 때 공의 위치를 좌표평면에 나타내 보자. 원점 O에서 제1사분면 방향으로 공을 찼을 때 공을 찬 방향과 x축이 이루는 예각을 θ라 하자. 그리고 내리막길은 제4사분면에 어떤 연속함수의 그래프로 주어진다고 하자. 시각 $t(t \geq 0)$에서의 공의 위치를 $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$라 하면

$$\begin{cases} x = 10t\cos\theta \\ y = 10t\sin\theta - 5t^2 \end{cases}$$

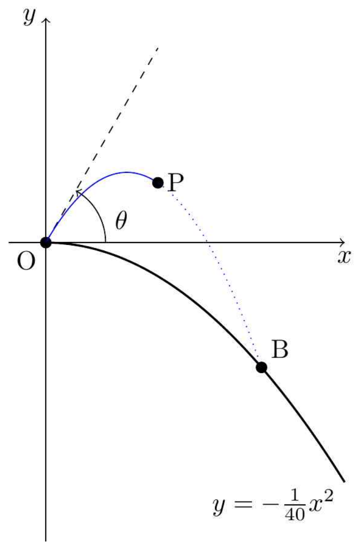
인 관계가 성립한다고 한다.



<그림 1>

<그림 1>에서의 내리막길은 일차함수 $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ $(x \geq 0)$의 그래프를 나타낸다. 원점 O에서 찬 공이 내리막길에 처음 닿은 지점을 점 A라 할 때, 점 A의 x좌표는 $20\left(\sin\theta\cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos^2\theta\right)$이고 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$일 때 최댓값을 가진다.

<그림 2>에서의 내리막길은 이차함수 $y = -\dfrac{1}{40}x^2$ $(x \geq 0)$의 그래프를 나타낸다. 원점 O에서 찬 공이 내리막길에 처음 닿은 지점을 점 B라 하자. 이때 $u = \tan\theta$로 놓으면, 점 B의 x좌표는 u의 함수로 나타낼 수 있고, 이를 이용하여 점 B의 x좌표가 최대가 되도록 하는 각 θ의 값을 구할 수 있다.



<그림 2>

제시문 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. <그림 2>에서 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$일 때, 원점 O에서 찬 공의 속력이 최소일 때의 점 P의 y좌표를 구하시오.

2-2. <그림 2>에서 점 B의 x좌표가 최대가 되도록 하는 각 θ에 대하여 $\tan\theta$를 구하시오.

<다>

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여
미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때
α, β를 포함하는 구간에서 연속이면 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$이다.

예를 들어, 정적분 $\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$를 구해 보자.

이때 $x^2 = t$로 놓으면 $2x\dfrac{dx}{dt} = 1$이고 $x = 0$일 때 $t = 0$, $x = 1$일 때 $t = 1$이므로

$$\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\,e^t\,dt = \left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1) \text{ 이다.}$$

또한, 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$이므로 $f(x)\,g(x)$는 $f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$의 한 부정적분이다.

따라서 $\int_a^b \{f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\}\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b$ 이므로

$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$이다.

예를 들어, 정적분 $\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$를 구해 보자.

이때 $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-x}$로 놓으면 $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx = \Big[-x\,e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{e} \text{이다.}$$

제시문 <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. **정적분 $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$의 값을 A라 할 때, 다음 정적분을 구하시오.**

$$\int_0^1 (x^2+1)\,e^{x^2}\,dx$$

3-2. **$x > 0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.**

$x > 0$인 모든 실수 x에 대하여
㉠ $f(x) > 0$
㉡ $5\int_1^x f(t)\,dt - \int_{2-x}^1 \dfrac{x+t-2}{3-t}\,f(2-t)\,dt = 5\,(x-1)$

이때 $f(63)$을 구하시오.

3. 출제 의도

명제, 조합, 수열의 합, 귀류법, 삼각함수, 미분법, 속도와 속력, 극대와 극소, 최대와 최소, 정적분, 치환적분법, 부분적분법 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 조합의 성질, 수열의 합, 귀류법, 여러 가지 미분법, 미분법의 활용, 여러 가지 적분법을 활용한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 가	교육과정*	[수학] - (3) 수와 연산 - (나) 명제 [수학] - (5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합 [수학I] - (3) 수열 - (나) 수열의 합
	성취기준·성취수준*	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. [12수학I03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문 나	교육과정	[수학I] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [수학II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12수학I02-02]-① 삼각함수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문 다	교육과정	[수학II] - (3) 적분 - (나) 정적분 [미적분] - (2) 미분법 - (가) 여러 가지 함수의 미분 [미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
	성취기준·성취수준	[12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문제 1	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - (나) 명제 [수학] - (5) 확률과 통계 - (나) 순열과 조합 [수학I] - (3) 수열 - (나) 수열의 합
	성취기준·성취수준	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. [12수학I03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제 2	교육과정	[수학I] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [수학II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [미적분] - (2) 미분법 - (가) 여러 가지 함수의 미분 [미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용

문항 및 제시문		관련 성취기준
	성취기준·성취수준	[12수학I02-02]-① 삼각함수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 3	교육과정	[수학I] - (1) 지수함수와 로그함수 - (나) 지수함수와 로그함수 [수학II] - (3) 적분 - (나) 정적분 [미적분] - (2) 미분법 - (가) 여러 가지 함수의 미분 [미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
	성취기준·성취수준	[12수학I01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호[별책 8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2020	193-215, 262-277
	수학	김원경 외	비상교육	2020	178-195, 243-257
	수학I	권오남 외	교학사	2020	46-65, 74-107, 138-151
	수학I	이준열 외	천재교육	2020	40-59, 68-96, 141-155
	수학II	박교식 외	동아출판	2020	73-103, 123-136
	수학II	홍성복 외	지학사	2020	74-105, 124-139
	수학II	권오남 외	교학사	2020	80-108, 130-141
	미적분	김원경 외	비상교육	2020	49-112, 121-142
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	50-131, 138-159
	미적분	박교식 외	동아출판	2020	51-119, 127-150

5. 문항 해설

제시문 <가>에서는 조합으로 정의된 어떤 명제들과 증명을 소개한다. <문제 1-1>에서는 제시문 <가>에 대한 이해를 바탕으로 제시문에서 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-2>에서는 제시문 <가>에 주어진 내용을 이용하여 두 유리수가 자연수인지 아닌지를 판별할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <나>에서는 좌표평면 위를 움직이는 점의 위치와 속력에 대한 문제를 소개한다. <문제 2-1>

에서는 제시문 <나>에 대한 이해를 바탕으로 속력이 최소일 때의 점의 위치에 대한 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. <문제 2-2>에서는 제시문 <나>에서 주어진 함수와 여러 가지 미분법을 이용하여 점의 위치에 대한 최대·최소 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 치환적분법과 부분적분법을 정적분의 계산에 적용하는 방법을 소개한다. <문제 3-1>에서는 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 주어진 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다. <문제 3-2>에서는 치환적분법과 여러 가지 미분법을 이용하여 주어진 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1>, <1-2>

1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-1>, <1-2> 문제해결 과정에서 각각의 $\alpha(n,k)$의 계산을 알맞게 적용한다.
4. <1-1>에서 항등식 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 이용하여 명제 ①이 참임을 증명한다.
5. <1-2>에서 $n \geq 4$일 때 $5\cdot\alpha(n,n-2)$가 자연수임을 논리적으로 보인다.
6. <1-2>에서 $\alpha(100,67)$가 자연수가 아님을 논리적으로 보인다.

▶ 문제 <2-1>, <2-2>

1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <2-1>, <2-2>의 올바른 문제해결 방향을 제시한다.
4. <2-1>에서 점 P의 속력은 $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$일 때 최솟값을 가짐을 보이고, 이때의 점 P의 y좌표를 구한다.
5. <2-2>에서 점 P가 나타내는 곡선과 곡선 $y=-\dfrac{1}{40}x^2$의 원점이 아닌 교점을 구한다.
6. <2-2>에서 공이 점 B에 닿을 때의 x좌표를 $u=\tan\theta$의 함수로 나타내고 이 함수가 최댓값을 갖게 하는 u를 구한다.

▶ 문제 <3-1>, <3-2>

1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <3-1>, <3-2>의 올바른 문제해결 방향을 제시한다.
4. <3-1>에서 정적분 $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{x^2}dx$를 구하고 $\displaystyle\int_0^1(x^2+1)e^{x^2}dx=\int_0^1 x^2e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{x^2}dx$를 이용하여 정적분 $\displaystyle\int_0^1(x^2+1)e^{x^2}dx$를 구한다.

5. <3-2>에서 정적분 $\int_{2-x}^{1} \frac{x+t-2}{3-t} f(2-t)\,dt$를 치환적분법을 이용하여 계산하고 $f(1)=1$을 얻는다.

6. <3-2>에서 여러 가지 미분법과 치환적분법을 이용하여 $f(63)$을 구한다.

■ 각 세부 문제별로 다음의 기준으로 채점한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 정확하게 충족시키고, 3-6의 요건 중 3가지를 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하나 논리 전개 및 계산이 다소 미흡한 경우
6등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 1가지를 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지만, 3-6의 요건을 충족시키지 못한 경우
8등급: 위의 6가지 기준을 대부분 충족시키지 못한 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1

$n \ge 4$일 때

$$\begin{aligned}\alpha(n,4) &= \frac{1}{4}\,{}_{2n-4}\mathrm{C}_3 = \frac{(2n-4)(2n-5)(2n-6)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{(n-2)(2n-5)(n-3)}{3\cdot 2}\\ &= \frac{1}{6}(n-3)(n-2)(2n-5)\\ &= \frac{1}{6}(n-3)\{(n-3)+1\}\{2(n-3)+1\}\\ &= 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-3)^2\end{aligned}$$

이므로 $\alpha(n,4)$는 자연수이다.

■ 1-2

$n \ge 4$일 때

$$\begin{aligned}5\cdot\alpha(n,n-2) &= \frac{5}{n-2}\,{}_{n+2}\mathrm{C}_{n-3} = \frac{5}{n-2}\,{}_{n+2}\mathrm{C}_5\\ &= \frac{5}{n-2}\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{5!}\\ &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!}\\ &= {}_{n+2}\mathrm{C}_4\end{aligned}$$

이다. ${}_{n+2}\mathrm{C}_4$는 자연수이므로 $5\cdot\alpha(n,n-2)$는 자연수이다. 또한

$$\alpha(100,67) = \frac{1}{67}\,{}_{133}\mathrm{C}_{66}$$

$$= \frac{133 \cdot 132 \cdot \cdots \cdot 68}{67!} \qquad \cdots\cdots (1)$$

이다.

유리수 $\alpha(100, 67)$이 자연수라고 가정하면, (1)의 우변의 분모인 67!이 소수 67의 배수이므로, 분자

$$133 \cdot 132 \cdot \cdots \cdot 68 \qquad \cdots\cdots (2)$$

은 소수 67의 배수이다. 그런데 (2)는 소수 67의 배수인 134보다 1씩 작은 연속된 66개의 자연수 $133, 132, \cdots, 68$의 곱이므로 소수 67의 배수가 아니다. 따라서 모순이다. 그러므로 $\alpha(100, 67)$은 자연수가 아니다.

■ 2-1

점 P의 시각 t에서의 위치는 $x = f(t) = 10t\cos\theta$, $y = g(t) = 10t\sin\theta - 5t^2$이다. $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때

$f(t) = 5\sqrt{2}t$, $g(t) = 5\sqrt{2}t - 5t^2$ 이므로 $f'(t) = 5\sqrt{2}$, $g'(t) = 5\sqrt{2} - 10t$이다.

그러면 점 P의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} = \sqrt{50 + 25(\sqrt{2} - 2t)^2}$ 이고, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 점 P의 y좌표는 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$이다.

■ 2-2

점 B는 점 P가 나타내는 곡선과 곡선 $y = -\frac{1}{40}x^2$의 원점이 아닌 교점이다. 그러면

$10t\sin\theta - 5t^2 = -\frac{1}{40}(10t\cos\theta)^2$이고, $t\{(2 - \cos^2\theta)t - 4\sin\theta\} = 0 \Rightarrow t = 0$ 또는 $t = \frac{4\sin\theta}{2 - \cos^2\theta}$이다.

따라서 공이 점 B에 닿은 시각은 $t = \frac{4\sin\theta}{2 - \cos^2\theta}$이고,

이때 점 B의 x좌표는 $p(\theta) = 10\left(\frac{4\sin\theta}{2 - \cos^2\theta}\right)\cos\theta = \frac{40\sin\theta\cos\theta}{2 - \cos^2\theta}$이다.

위 식의 분모와 분자를 $\cos^2\theta$로 나누면 $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$로부터 $p(\theta) = \frac{40\tan\theta}{2\sec^2\theta - 1} = \frac{40\tan\theta}{2\tan^2\theta + 1}$

이다. 이제 $u = \tan\theta$로 놓으면 $\frac{40\tan\theta}{2\tan^2\theta + 1} = \frac{40u}{2u^2 + 1}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ u > 0\right)$이다.

$p(\theta)$가 최대가 되게 하는 u의 값을 구하기 위해 $h(u) = \frac{40u}{2u^2 + 1}$로 놓자.

$h'(u) = \frac{40(-2u^2 + 1)}{(2u^2 + 1)^2}$이므로, 구간 $(0, \infty)$에서

$0 < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $h'(u) > 0$이므로 $h(u)$는 증가,

$u = \frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $h'(u) = 0$,

$u > \frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $h'(u) < 0$이므로 $h(u)$는 감소한다.

따라서 $\tan\theta = u = \frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $p(\theta)$는 최댓값을 갖는다.

<다른 풀이>

점 B는 점 P가 나타내는 곡선과 곡선 $y=-\dfrac{1}{40}x^2$의 원점이 아닌 교점이다.

그러면 $10t\sin\theta-5t^2=-\dfrac{1}{40}(10t\cos\theta)^2$이고,

$t\{(2-\cos^2\theta)t-4\sin\theta\}=0 \Rightarrow t=0$ 또는 $t=\dfrac{4\sin\theta}{2-\cos^2\theta}$ 이다.

따라서 공이 점 B에 닿은 시각은 $t=\dfrac{4\sin\theta}{2-\cos^2\theta}$ 이고,

이때 점 B의 x좌표는 $p(\theta)=10\left(\dfrac{4\sin\theta}{2-\cos^2\theta}\right)\cos\theta=\dfrac{40\sin\theta\cos\theta}{2-\cos^2\theta}$ 이다.

몫의 미분법, $(\sin\theta\cos\theta)'=\cos^2\theta-\sin^2\theta$, $(2-\cos^2\theta)'=2\cos\theta\sin\theta$, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$를 이용하면

$$
\begin{aligned}
p'(\theta)&=40\,\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(2-\cos^2\theta)-\cos\theta\sin\theta\cdot(2\cos\theta\sin\theta)}{(2-\cos^2\theta)^2}\\
&=40\,\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(2-\cos^2\theta)-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(2-\cos^2\theta)^2}\\
&=40\,\frac{(1-2\sin^2\theta)(1+\sin^2\theta)-2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin^2\theta)^2}\\
&=40\,\frac{1-3\sin^2\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}\\
&=40\,\frac{(1-\sqrt{3}\sin\theta)(1+\sqrt{3}\sin\theta)}{(1+\sin^2\theta)^2}
\end{aligned}
$$
이다.

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $0<\sin\theta<1$, $(1+\sin^2\theta)^2>0$, $1+\sqrt{3}\sin\theta>0$이므로,

$0<\sin\theta<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 을 만족하는 θ의 구간에서, $p'(\theta)>0$이므로 $p(\theta)$는 증가,

$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 을 만족하는 θ에 대하여 $p'(\theta)=0$,

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\sin\theta<1$을 만족하는 θ의 구간에서, $p'(\theta)<0$이므로 $p(\theta)$는 감소한다.

따라서 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 일 때 $p(\theta)$는 최댓값을 갖는다.

한편 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로, 삼각함수의 정의에 의하여 $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

■ 3-1

$I=\displaystyle\int_0^1(x^2+1)e^{x^2}dx$로 놓으면 $I=\displaystyle\int_0^1 x^2e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{x^2}dx$이다.

정적분 $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{x^2}dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=xe^{x^2}$으로 놓으면 $f'(x)=1$이고,

제시문의 예로부터 $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$이다.

따라서 $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} x e^{x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - \frac{A}{2}$ 이고

$$I = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - \frac{A}{2} + A = \frac{e}{2} + \frac{A}{2} \text{이다.}$$

■ 3-2

정적분 $\int_{2-x}^1 \frac{x+t-2}{3-t} f(2-t)\,dt$에서 $2-t=u$로 놓으면 $-\frac{dt}{du}=1$이고

$t=2-x$일 때 $u=x$, $t=1$일 때 $u=1$이므로

$$\int_{2-x}^1 \frac{x+t-2}{3-t} f(2-t)\,dt = -\int_x^1 \frac{x-u}{u+1} f(u)\,du$$

$$= x\int_1^x \frac{1}{u+1} f(u)\,du - \int_1^x \frac{u}{u+1} f(u)\,du \text{ 이다.}$$

따라서 ㉡에서 주어진 등식은 다음과 같다.

$$5\int_1^x f(t)\,dt - x\int_1^x \frac{1}{u+1} f(u)\,du + \int_1^x \frac{u}{u+1} f(u)\,du = 5(x-1)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$5f(x) - \int_1^x \frac{1}{u+1} f(u)\,du - \frac{x}{x+1} f(x) + \frac{x}{x+1} f(x) = 5$$

$$5f(x) - \int_1^x \frac{1}{u+1} f(u)\,du = 5 \text{이다.}$$

위 식에서 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$이다.

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $5f'(x) - \frac{1}{x+1} f(x) = 0$, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{5(x+1)}$이고,

양변을 x에 대하여 적분하면, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고 $f(1)=1$이므로

$$\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \int_1^x \frac{1}{5(t+1)}\,dt$$

$$\ln f(x) - \ln f(1) = \frac{1}{5}\ln(x+1) - \frac{1}{5}\ln 2 = \frac{1}{5}\ln\frac{x+1}{2} \text{이다.}$$

따라서 $f(x) = e^{\frac{1}{5}\ln\frac{x+1}{2}} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$ 이고 $f(63) = \left(\frac{63+1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} = 2$ 이다.