

[문항카드3] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항1

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(A형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	이계도함수, 함수의 그래프
예상 소요 시간	36분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수  $t$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 를  $f(x) = te^{-x^2} (x > 0)$ 이라 정의하자.

곡선  $y=f(x)$  위의 점 중 원점  $O$ 와 가장 가까운 점을  $P$ , 변곡점을  $Q$ 라 할 때

다음 물음에 각각 답하시오. (단,  $t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

(1-1) 점  $Q$ 의  $x$ 좌표를 구하시오. (70점)

(1-2) 원점  $O$ 와 점  $P$  사이의 거리를  $t$ 에 대한 식으로 나타내시오. (80점)

(1-3)  $\angle OPS = \frac{\pi}{2}$ 를 만족하는  $x$ 축 위의 점  $S(r,0)$ 에 대하여  $r$ 가 최소일 때,

점  $P$ 의  $x$ 좌표를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

변곡점을 이해하고 함수의 최솟값을 계산 할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열A-문제1	교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준· 성취수준	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	97~111
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	111~124
기타					

5. 문항 해설

도함수를 이용하여 함수의 최솟값을 계산하고 이계도함수를 이용하여 변곡점을 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>f''(x) = t(4x^2 - 2)e^{-x^2}</math>을 구하고 <math>f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0</math>을 보이면 (+40점).</li> <li>■ <math>0 &lt; x &lt; \frac{\sqrt{2}}{2}</math>, <math>f''(x) &lt; 0</math>을 보이면(+10점)</li> <li>■ <math>x &gt; \frac{\sqrt{2}}{2}</math>, <math>f''(x) &gt; 0</math>을 보이면(+10점)</li> <li>■ 답 <math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math>를 구하면 (+10점).</li> </ul>	70
(1-2)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>D'(x) = 2x(1 - 2t^2e^{-2x^2}) = 0</math>의 근 <math>\alpha = \sqrt{\frac{\ln(2t^2)}{2}}</math>을 구하면(+40점).</li> <li>■ <math>0 &lt; x &lt; \alpha</math>일 때 <math>D'(x) &lt; 0</math>을 보이면 (+10점)</li> <li>■ <math>x &gt; \alpha</math>일 때 <math>D'(x) &gt; 0</math>을 보이면(+10점)</li> <li>■ 답 <math>\sqrt{\frac{\ln(2t^2) + 1}{2}}</math>을 구하면(+20점)</li> </ul>	80
(1-3)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>r = \alpha + \frac{1}{2\alpha}</math>을 구하면(+40점)</li> <li>■ <math>r</math>는 <math>\alpha = \frac{1}{2\alpha}</math>일 때 최소임을 언급하면 (+10점)</li> <li>■ <math>t = \sqrt{\frac{e}{2}}</math>를 구하면 (+10점)</li> <li>■ <math>\sqrt{\frac{e}{2}} &gt; \frac{\sqrt{2}}{2}</math>를 언급하면 (+10점)</li> <li>■ P의 x좌표가 <math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math>임을 보이면(+10점)</li> </ul>	80

## 7. 예시 답안

(1-1)  $f'(x) = t(-2xe^{-x^2})$  이다.  $f''(x) = t(4x^2 - 2)e^{-x^2}$  이므로  $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$  이다.

$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  에서  $f''(x) < 0$ ,  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$  에서  $f''(x) > 0$  이므로 Q의 x좌표는  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  이다.

(1-2) 원점과 곡선 위의 점  $R(x, te^{-x^2})$  사이의 거리를  $d(x)$ 라 하면  $d(x)$ 가 최소이기 위한 필요충분조건은  $D(x) = \{d(x)\}^2 = x^2 + t^2 e^{-2x^2}$  이 최소인 것이다.

$D'(x) = 2x(1 - 2t^2 e^{-2x^2}) = 0$ 을 만족하는 근을  $\alpha$ 라 하면,  $\alpha = \sqrt{\frac{\ln(2t^2)}{2}}$  이다.

$0 < x < \alpha$  이면  $D'(x) < 0$ 이고  $x > \alpha$  이면  $D'(x) > 0$  이므로  $d(x)$ 는  $x = \alpha$ 일 때 최소이다.

따라서 구하는 거리는  $\sqrt{\frac{\ln(2t^2) + 1}{2}}$  이다.

(1-3) 두 점 P와 S를 지나는 직선을  $\ell$ 이라 하자.

직선 OP의 기울기는  $\frac{te^{-\alpha^2}}{\alpha}$  이므로 직선  $\ell$ 의 기울기는  $\frac{-\alpha e^{\alpha^2}}{t}$  이다.

$\ell$ 의 방정식은  $y = \frac{-\alpha e^{\alpha^2}}{t}(x - \alpha) + te^{-\alpha^2}$  이므로 식  $\alpha = \sqrt{\frac{\ln(2t^2)}{2}}$  으로부터  $r = \alpha + \frac{1}{2\alpha}$  이 되고,

$\alpha + \frac{1}{2\alpha} \geq 2\sqrt{\alpha \frac{1}{2\alpha}} = \sqrt{2}$  로부터  $r$ 는  $\alpha = \frac{1}{2\alpha}$  일 때 최소가 된다.

$1 = 2\alpha^2 = \ln(2t^2)$  이므로  $t = \sqrt{\frac{e}{2}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$  이고, 이 때 P의 x좌표는  $\alpha = \sqrt{\frac{\ln(2t^2)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  이다.

## ■ 교사자문단 의견

<b>1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항</b>
<p>1번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.</p> <p>[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.</p> <p>[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.</p> <p>[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과와 지수함수의 미분을 주제로 하였으며 고등학교 교육과정 내에서 출제되었음.</p>
<b>2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항</b>
<p>1번 문항은 지수함수를 미분할 수 있는가와 지수함수의 그래프에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있고 이를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제되었음.</p>
<b>3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항</b>
<p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
<b>4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항</b>
<p>제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.</p>
<b>5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항</b>
<p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 접근할 수 있음을 제시함.</p>
<b>6. 예상 난이도 및 총평</b>
<p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.</p> <p>(1-1) 중, (1-2) 중, (1-3) 상</p> <p>1번 문항은 미적분 교과에서 출제 되었으며 지수함수의 미분, 합성함수의 미분을 할 수 있는가를 묻고 있으며 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제를 해결해야 하는 평가 문항으로 교육과정 범위 내에서 출제되었다고 판단됨.</p> <p>미적분을 공부하면서 도함수, 이계도함수를 이용하여 변곡점과 그래프 개형을 그리는 유사한 접근법을 이용하는 문제를 많이 풀어보았을 것으로 생각됨. 미적분 교과를 성실히 공부한 학생은 쉽게 풀어낼 것으로 생각됨.</p>

[문항카드4] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항2

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(A형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	도함수, 이계도함수, 증가
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수  $x, y$ 에 대하여  $f(x) - f(y) \leq (x - y)g(x)$ 이다.

(2-1) 모든 실수  $x, y$ 에 대하여  $(x - y)g(y) \leq f(x) - f(y)$ 가 성립함을 보이시오. (70점)

(2-2) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) = g(x)$ 임을 보이시오. (80점)

(2-3) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $8f(x) + f(-2x) = 18$ 일 때,  $f(x)$ 를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 도함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열 A-문제2	교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준· 성취수준	<p>수학II (2) 미분 ㉠ 미분계수 [12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>수학II (1) 함수의 극한과 연속 ㉠ 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</p> <p>미적분 (3) 미분법 ㉢ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오남 외	교학사	2019	115~116
	수학II	황선욱 외	미래엔	2019	23, 55
기타					

5. 문항 해설

함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 도함수를 구하고 그 도함수의 성질을 이용하여 주어진 함수를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(y) - f(x) \leq (y-x)g(y)</math>를 쓰면 (+40점)</li> <li>▪ <math>(x-y)g(y) \leq f(x) - f(y)</math>를 쓰면 (+30점)</li> </ul>	70
(2-2)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>(x-y)g(y) \leq f(x) - f(y) \leq (x-y)g(x)</math>를 쓰면 (+20점)</li> <li>▪ <math>g(y) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq g(x)</math>를 쓰면 (+20점)</li> <li>▪ <math>\lim_{y \rightarrow x} g(y) \leq \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq \lim_{y \rightarrow x} g(x)</math>를 쓰면 (+20점)</li> <li>▪ <math>g(x) \leq f'(x) \leq g(x)</math>를 쓰면 (+20점)</li> </ul> <p><b>[별해]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>x &gt; y</math>일 때 <math>\lim_{y \rightarrow x-} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq \lim_{y \rightarrow x-} g(x)</math>를 쓰고 <math>f'(x) \leq g(x)</math>를 얻으면 (+40점)</li> <li>▪ <math>x &lt; y</math>일 때 <math>\lim_{y \rightarrow x+} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \geq \lim_{y \rightarrow x+} g(x)</math>를 쓰고 <math>f'(x) \geq g(x)</math>를 얻으면 (+40점)</li> </ul>	80
(2-3)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f''(x) \geq 0</math>라고 기술하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>f''(x) = 0</math>임을 보이면 (+30점)</li> <li>▪ <math>f'(x) = 0</math>임을 보이면 (+20점)</li> <li>▪ <math>f(x) = 2</math>임을 보이면 (+10점)</li> </ul>	80

## 7. 예시 답안

(2-1) 주어진 식에서  $x$ 와  $y$ 를 교환하면  $f(y) - f(x) \leq (y-x)g(y)$ 이다.

따라서  $(x-y)g(y) \leq f(x) - f(y)$ 이다.

(2-2)  $(x-y)g(y) \leq f(x) - f(y) \leq (x-y)g(x)$ 에서  $x > y$ 이면  $g(y) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq g(x)$ 이다.

$f(x)$ 가 미분가능하고  $\lim_{y \rightarrow x-} g(y) \leq \lim_{y \rightarrow x-} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq \lim_{y \rightarrow x-} g(x)$ 이므로  $g(x) \leq f'(x) \leq g(x)$ 이다.

따라서  $f'(x) = g(x)$ 이다.

[별해]  $x > y$ 이면  $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq g(x)$ 이므로  $\lim_{y \rightarrow x-} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq \lim_{y \rightarrow x-} g(x)$ 이고

$f'(x) \leq g(x)$ 이다.

$x < y$ 이면  $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} \geq g(x)$ 이므로  $\lim_{y \rightarrow x+} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \geq \lim_{y \rightarrow x+} g(x)$ 이고  $f'(x) \geq g(x)$ 이다.

따라서  $f'(x) = g(x)$ 이다.

(2-3) 양변을 미분하면  $4f'(x) - f'(-2x) = 0$ 이다.

(2-2)의 결과에 의해  $f'(x) = g(x)$ 이다.

(2-2)의 풀이에서  $x > y$ 이면  $g(y) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq g(x)$ 이므로  $g(x) \geq g(y)$ 이다.

따라서  $g'(x) \geq 0$ 이 되고  $f''(x) \geq 0$ 이다.

$2f''(x) + f''(-2x) = 0$ 에서  $f''(x) = 0$ 을 얻는다.

$4f'(x) - f'(-2x) = 0$ 에  $x = 0$ 을 대입하면  $4f'(0) - f'(0) = 0$ 이 되어  $f'(0) = 0$ 이다.

즉 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) = 0$ 이다. 따라서  $f(x)$ 는 상수함수이다.

그런데  $8f(0) + f(0) = 18$ 이므로  $f(0) = 2$ 이다. 그러므로 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) = 2$ 이다.

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
<p>2번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.          [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.          [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.          주어진 문항 및 제시문은 수학Ⅱ 교과에서 도함수를 구할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.</p>
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
<p>2번 문항은 주어진 부등식을 응용하여 도함수를 구할 수 있는가와 이계도함수를 구하여 <math>f(x)</math>를 구할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
<p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
<p>제시된 채점 기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점 되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.</p>
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
<p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음.</p>
6. 예상 난이도 및 총평
<p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.          (2-1) 중, (2-2) 중, (2-3) 중          2번 문항은 수학Ⅱ 교과 미분 단원에서 출제되었으며 도함수의 정의를 이용하고 주어진 부등식을 응용하여 두 함수 <math>f(x)</math>와 <math>g(x)</math>사이의 관계를 찾아낼 수 있는가를 묻고 있다. <math>f''(x)=0</math>임을 찾아내는 것이 문제 풀이의 핵심아이디어이며 고등학교 수학 교과과정을 잘 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있을 것으로 생각됨. 개념, 문제해결, 추론 등의 수학교과 역량을 고등학교 교육과정에 제시된 수준을 준수하여 출제하였다고 판단됨.</p>



[문항카드5] 논술 우수자 전형 : 자연계열A-문항3

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(A형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	도함수, 이계도함수, 극대, 극소, 변곡점
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여  $g(x) = f(x)e^x$ 이라 정의할 때, 함수  $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $\int_1^x g(t) dt \geq 0$ 이다.

(나)  $g(x)$ 는  $x=3$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

(3-1)  $f(1)=0$ 임을 보이시오. (80점)

(3-2)  $g(x)$ 를 구하고 도함수와 이계도함수를 이용하여 곡선  $y=g(x)$ 의 개형을 좌표평면에 그리시오. 또한 극대, 극소, 변곡점이 되는  $x$ 의 값을 모두 구하시오. (80점)

(3-3) 실수  $t$ 에 대하여 방정식  $g'(t) = \frac{g(x+1)-g(t)}{x-t}$ 를 만족시키는 서로 다른 실수  $x$ 의 개수를  $h(t)$ 라 정의하자. 구간  $[2, 3]$ 에 속하는  $t$ 중에서  $h(t)=2$ 를 만족시키는  $t$ 의 개수를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

극솟값, 극댓값, 변곡점에 대한 그래프에서의 기하학적인 의미를 이해하고, 이를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

#### 4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열 A-문제3	교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 수학II (2) 미분 [3] 도함수의 활용
	성취기준· 성취수준	[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 [2] 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	권오남 외	교학사	2020	96~99
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	114~121
기타					

#### 5. 문항 해설

조건을 이용하여 함수를 찾고 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프의 개형을 그린 뒤, 접선과 변곡점의 성질을 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>G(x)</math> 가 <math>x=1</math> 에서 극소임을 설명하면 (+40점)</li> <li>■ <math>g(1) = G'(1) = 0</math> 임을 언급하면 (+30점)</li> <li>■ <math>f(1) = 0</math> 임을 언급하면 (+10점)</li> </ul>	80
(3-2)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ 방정식 <math>f(x) = 0</math> 의 실근 <math>x = 3</math> 이 중근임을 보이거나 <math>f'(3) = 0</math> 임을 보이면 (+30점)</li> <li><math>g(x)</math> 는 <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>x = 2</math> 에서 극대 (+5점)</li> <li>■ <math>x = -1</math> 에서 극소 (+5점)</li> <li>■ <math>x = 3</math> 에서 극소 (+5점)</li> <li>■ <math>x = 1</math> 에서 변곡점 (+5점)</li> <li>■ <math>x = -\sqrt{7}</math> 에서 변곡점 (+5점)</li> <li>■ <math>x = \sqrt{7}</math> 에서 변곡점 (+5점)</li> </ul> </li> <li>■ <math>y = g(x)</math> 의 그래프의 개형을 제대로 그리면 (+20점)</li> </ul>	80
(3-3)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ 주어진 방정식이 <math>g'(t)(x-t) + g(t) = g(x+1)</math> (<math>x \neq t</math>)와 같으므로 <math>h(t)</math> 는 곡선 <math>y = g(x)</math> 위의 점 <math>(t, g(t))</math> 에서의 접선이 곡선 <math>y = g(x+1)</math> 과 만나는 점 중 <math>(t, g(t))</math> 가 아닌 점의 개수임을 설명하면 (+20점)</li> <li>[참고] “<math>(t, g(t))</math> 가 아닌 점”이라는 것을 언급하지 않은 경우는 (+10점)만 부여</li> <li>■ 좌표평면에 <math>y = g(x)</math> 와 <math>y = g(x+1)</math> 의 그래프를 동시에 그려서 설명하면 (+10점)</li> <li>■ <math>h(2) = 2</math> 임을 설명하면 (+10점)</li> <li>■ <math>h(3) = 2</math> 임을 설명하면 (+10점)</li> <li>■ 곡선 <math>y = g(x)</math> 위의 점 <math>(\alpha, g(\alpha))</math> 에서의 접선이 곡선 <math>y = g(x+1)</math> 과도 접하게 되는 <math>\alpha</math> 가 변곡점의 <math>x</math> 좌표(<math>= \sqrt{7}</math>)과 3 사이에 존재함을 설명하면 (+10점)</li> <li>[참고] <math>\alpha</math> 가 2와 3 사이에 존재한다고만 설명한 경우 (+0점)</li> <li>■ <math>g(\alpha) &lt; g(\alpha+1)</math> 임을 보여서 <math>h(\alpha) = 2</math> 임을 설명하면 (+10점)</li> <li>■ <math>h(t) = 2</math> 를 만족시키는 <math>t</math> 의 개수가 3 임을 설명하면 (+10점)</li> </ul>	80

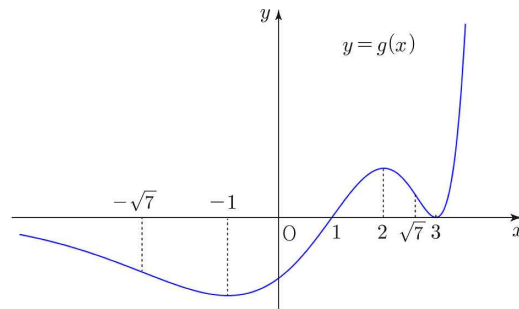
## 7. 예시 답안

(3-1)  $G(x) = \int_1^x g(t) dt$ 라 정의하면  $G(x)$ 는 임의의 실수  $x$ 에 대하여  $G(x) \geq 0$ 이며  $G(1) = 0$ 이다. 따라서  $G(x)$ 는  $x=1$ 에서 극솟값 0을 가진다. 그런데  $G(x)$ 는 미분가능한 함수이므로  $G'(1) = 0$ 이고, 적분과 미분의 관계를 이용하면  $G'(x) = g(x)$ 이므로  $g(1) = G'(1) = 0$ 이다.  $f(x) = g(x)e^{-x}$ 이므로  $f(1) = g(1)e^{-1} = 0$ 이다.

(3-2) (3-1)의 결과와 조건 (나)로부터  $f(1) = f(3) = 0$ 이다. 만일 방정식  $f(x) = 0$ 의 실근  $x=3$ 이 중근이 아니면  $x=3$ 을 경계로 함수  $g(x)$ 의 부호가 바뀌므로  $g(x)$ 는  $x=3$ 에서 극솟값을 가질 수 없다. 따라서 조건 (나)에 의해  $f(x) = (x-1)(x-3)^2$ 이다.

이 때  $g(x) = (x-1)(x-3)^2e^x$ 이고  $g'(x) = (x+1)(x-2)(x-3)e^x$ ,  $g''(x) = (x-1)(x^2-7)e^x$ 이다. 이를 이용하여 증감표를 작성하면  $g(x)$ 는  $x = -1, 3$ 에서 극소,  $x=2$ 에서 극대이며  $x = 1, \pm\sqrt{7}$ 에서 변곡점을 갖는다.

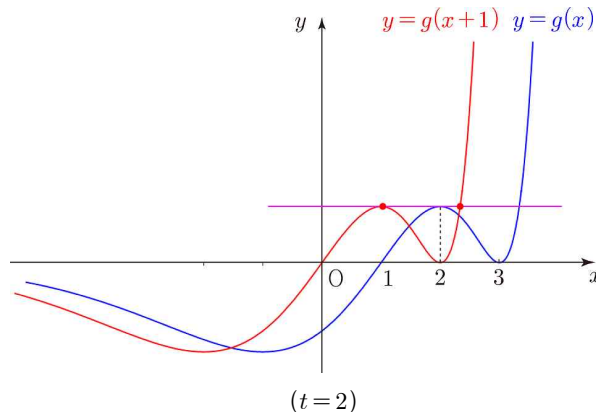
$g(1) = g(3) = 0$ 이고  $x < 1$ 일 때  $g(x) < 0$ 이므로 함수  $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



[별해] (3-1)의 결과와 조건 (나)로부터  $f(1) = f(3) = g(3) = g'(3) = 0$ 이다.

그런데  $g'(x) = \{f'(x) + f(x)\}e^x$ 이므로  $0 = g'(3) = \{f'(3) + f(3)\}e^3 = f'(3)e^3$ 이다. 따라서  $f'(3) = 0$ 이고  $f(x) = (x-1)(x-3)^2$ 이다. 이후의 내용은 위의 풀이와 같다.

(3-3) 방정식  $g'(t) = \frac{g(x+1) - g(t)}{x-t}$ 는  $g'(t)(x-t) + g(t) = g(x+1)$  ( $x \neq t$ )와 같으므로  $h(t)$ 는 곡선  $y = g(x)$  위의 점  $(t, g(t))$ 에서의 접선이 곡선  $y = g(x+1)$ 과 만나는 점 중  $(t, g(t))$ 가 아닌 점의 개수이다. 그래프를 이용하여 구간  $[2, 3]$ 에 속하는  $t$  중에서  $h(t) = 2$ 를 만족시키는  $t$ 를 찾으면 된다. 일단  $t=2$ 일 때 아래 그림과 같이 점  $(2, g(2))$ 에서의 접선이 곡선  $y = g(x+1)$ 과 두 점에서 만나며, 그 두 점의  $x$ 좌표는 2가 아니다. 따라서  $h(2) = 2$ 이다.

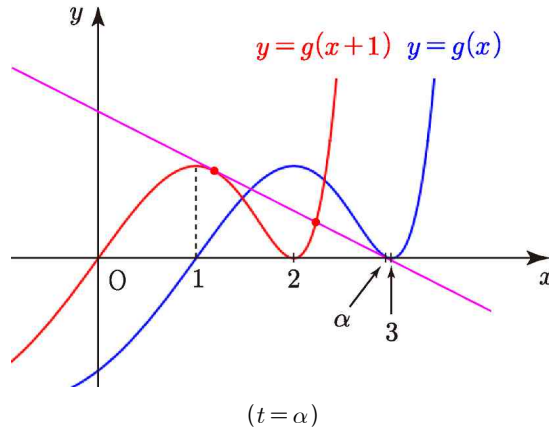


이제  $t > 2$ 인 경우를 생각하기 위해  $t$ 를 조금씩 증가시켜 보면 곡선  $y = g(x)$  위의 점  $(t, g(t))$ 에서의 접선의 기울기는 음수이며 점점 감소하다가 변곡점인  $(\sqrt{7}, g(\sqrt{7}))$ 에서 최소가 된다. 이때까지의 접선은 곡선  $y = g(x+1)$ 과 계속 한 점에서만 만난다. 그 이후에는 기울기가 다시 증가하기 시작하지만 기울기

는 여전히 음수이고 접선은 곡선  $y=g(x+1)$  과 한동안 계속 한 점에서만 만나게 된다. 그렇지만 결국 아래 그림과 같이 곡선  $y=g(x)$  위의 점  $(\alpha, g(\alpha))$ 에서의 접선이 곡선  $y=g(x+1)$  과도 접하게 되는  $\alpha$  가  $\sqrt{7}$  과 3 사이에 유일하게 존재하며, 이 때 접선과 곡선  $y=g(x+1)$  은 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 경우  $\frac{5}{2} < \sqrt{7} < \alpha < 3$  이므로  $(\alpha-3)^2 < (\alpha-2)^2$  이고 다음이 성립한다.

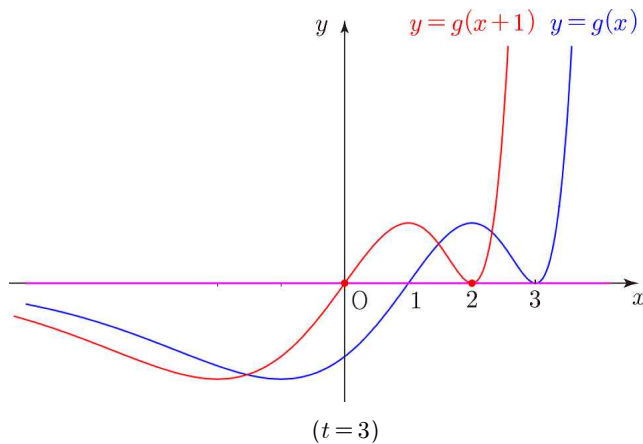
$$g(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-3)^2 e^{\alpha} < \alpha(\alpha-2)^2 e^{\alpha+1} = g(\alpha+1)$$

따라서 아래 그림에서 점  $(\alpha, g(\alpha))$ 에서의 접선과 곡선  $y=g(x+1)$  이 만나는 두 점의  $x$ 좌표는 모두  $\alpha$  보다 작다. 그러므로  $2 < t < \alpha$  일 때  $h(t) \leq 1$  이고,  $h(\alpha) = 2$  이다.



$\alpha < t < 3$  인 경우에는 곡선  $y=g(x)$  위의 점  $(t, g(t))$ 에서의 접선이 곡선  $y=g(x+1)$  과 서로 다른 세 점에서 만나며, 그래프를 통해 위 그림과 비교하여 보면 그 세 점의  $x$ 좌표는 모두  $t$ 보다 작은 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 이 경우  $h(t) = 3$  이다.

$t = 3$  일 때는 아래 그림과 같이 점  $(3, g(3))$ 에서의 접선이 곡선  $y=g(x+1)$  과 두 점에서 만나며 두 점의  $x$ 좌표는 모두 3보다 작다. 그러므로  $h(3) = 2$  이다.



결국  $h(t) = 2$  를 만족시키는  $t \in [2, 3]$  은  $t = 2, \alpha, 3$  일 때뿐이므로  $h(t) = 2$  를 만족시키는  $t$  의 개수는 3 이다.

## ■ 교사자문단 의견

<b>1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항</b>
<p>3번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.</p> <p>[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</p> <p>[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</p> <p>주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과에서 출제되었으며 정적분으로 이루어진 함수의 미분을 이용하여 함수를 구하고 그래프의 개형을 통해 함수 추론을 요구하는 문항으로 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.</p>
<b>2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항</b>
<p>3번 문항은 정적분으로 이루어진 함수의 미분, 이계도함수를 이용한 그래프의 개형, 함수 추론을 할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>
<b>3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항</b>
<p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
<b>4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항</b>
<p>제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.</p>
<b>5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항</b>
<p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 그래프를 통해 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 접근할 수 있음을 제시함.</p>
<b>6. 예상 난이도 및 총평</b>
<p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.</p> <p>(3-1) 중, (3-2) 상, (3-3) 상</p> <p>3번 문항은 미적분 교과에서 출제되었으며 미준과 적분과의 관계를 이용한 정적분으로 이루어진 함수의 미분, 이계도함수를 이용한 그래프 개형, 주어진 조건을 만족시키는 함수 추론을 묻고 있으며 고등학교 수학 교육과정에서 학생들의 문제해결력을 평가하기에 적절한 문항이다. 전체적인 난이도는 상으로 예상되며 미적분 교과를 성실히 공부한 학생이라면 잘 풀어낼 것으로 판단됨. 고등학교 교육과정 수준내에서 출제함.</p>

[문항카드6] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항1

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(B형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	삼각함수, 함수의 극한, 미분계수
예상 소요 시간	35분	

2. 문항 및 제시문

[문제1] 아래 그림에 있는 삼각형 ABC는 시각  $t \geq 0$ 에 따라 크기가 변하며,  
다음 조건을 만족시킨다.

(가) 시각  $t=0$ 에서  $\overline{BC}=1$ 이다.

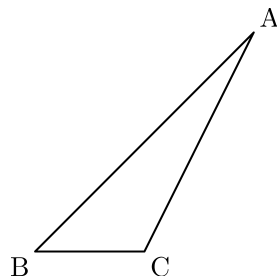
(나) 임의의 시각  $t \geq 0$ 에서  $\angle B = \frac{\pi}{4}$ 이고  $\overline{BC} : \overline{AB} = 1 : 2\sqrt{2}$ 이다.

(다) 임의의 시각  $t > 0$ 에서 삼각형 ABC의 넓이의 순간변화율은  $\frac{4}{3}t+6$ 이다.

(1-1)  $\sin C$ 를 구하시오. (70점)

(1-2) 시각  $t$ 에서 선분 BC의 길이를  $\ell(t)$ 라 할 때,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell(t)}{t}$ 의 값을 구하시오. (80점)

(1-3) 삼각형 ABC의 외심을 Z라 하자. 선분 BC의 길이가 5일 때,  
삼각형 ZBCA의 넓이의 순간변화율을 구하시오. (80점)



3. 출제 의도

삼각함수, 함수의 극한, 미분계수에 관한 개념과 성질을 이해하고 활용할 수 있는지를  
평가한다.

#### 4. 출제 근거

##### 가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열B -문제1	교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 수학 I(2) 삼각함수 ㉠ 삼각함수
	성취기준· 성취수준	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학II (1) 함수의 극한과 연속 ㉠ 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 수학II (2) 미분 ㉠ 미분계수 [12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

##### 나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	권오남 외	교학사	2019	97~104
	수학II	박교식 외	동아출판	2019	11~18, 53~59
기타					

#### 5. 문항 해설

시간에 따라 크기가 변하는 삼각형이 있을 때, 사인법칙, 코사인법칙, 미분계수, 함수의 극한 등을 활용하여, 주어진 문제를 해결한다.



## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>\overline{AC} = \sqrt{5}</math> (+35점)</li> <li>■ <math>\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}</math> (+35점)</li> <li><b>[별해]</b></li> <li>❖ <math>k</math>는 다른 기호 사용 가능</li> <li>■ <math>\overline{AC} = \sqrt{5}k</math> (+35점)</li> <li>■ <math>\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}</math> (+35점)</li> </ul>	70
(1-2)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>S(t) = \{\ell(t)\}^2</math> 또는 <math>S(t) = \frac{2}{3}t^2 + 6t + 1</math> (+20점)</li> <li>■ <math>\ell(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t^2 + 6t + 1}</math> (+30점)</li> <li>■ <math>\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell(t)}{t} = \frac{\sqrt{6}}{3}</math> (+30점)</li> </ul>	80
(1-3)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>T(t) = 2S(t)</math>, <math>T(t) = 2\{\ell(t)\}^2</math> 또는 <math>T(t) = \frac{4}{3}t^2 + 12t + 2</math> (+40점)</li> <li>■ <math>\ell(t) = 5</math>이면 <math>t = 3</math> (+20점)</li> <li>■ <math>T'(3) = 20</math> (+20점)</li> </ul>	80

## 7. 예시 답안

(1-1) 시각  $t=0$ 에서 코사인법칙을 사용하면  $\overline{AC}^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 5$ 이다.

따라서  $\overline{AC} = \sqrt{5}$ 이다. 사인법칙에 의해  $\frac{\sin C}{2\sqrt{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{5}}$  이므로,  $\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

(1-2) 시각  $t$ 에서 삼각형 ABC의 넓이를  $S(t)$ 라고 하면, 조건으로부터  $S'(t) = \frac{4}{3}t + 6$ 이므로

$S(t) = \frac{2}{3}t^2 + 6t + K$  ( $K$ 는 실수)이다. 조건에 의해  $S(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1$ 이므로  $K=1$ 이고

$S(t) = \frac{2}{3}t^2 + 6t + 1$ 이 된다.

한편  $S(t) = \frac{1}{2} \cdot \ell(t) \cdot 2\sqrt{2}\ell(t) \sin \frac{\pi}{4} = \{\ell(t)\}^2$ 이므로,  $\ell(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t^2 + 6t + 1}$ 이고

$\frac{\ell(t)}{t} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{6}{t} + \frac{1}{t^2}}$ 이다. 따라서  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell(t)}{t} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

(1-3) 삼각형 ABC에 대하여 외접원의 반지름을  $R(t)$ 라 하면,  $2R(t) = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{2}\ell(t)}{2/\sqrt{5}}$ 가

성립하므로,  $R(t) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\ell(t)$ 이다. 사각형 ZBCA의 넓이를  $T(t)$ , 삼각형 ABC의 넓이를  $S(t)$ ,

삼각형 AZB의 넓이를  $T_1(t)$ 라 하면,  $T(t) = S(t) + T_1(t)$ 이고 (1-2)번 풀이에서  $S(t) = \{\ell(t)\}^2$ 임을

구했으므로,  $T_1(t)$ 를 구하면 된다.  $T_1(t) = \frac{1}{2}\{R(t)\}^2 \sin(\angle AZB)$ 인데,

$\cos(\angle AZB) = \frac{2\{R(t)\}^2 - 8\{\ell(t)\}^2}{2\{R(t)\}^2} = -\frac{3}{5}$ 이므로  $\sin(\angle AZB) = \frac{4}{5}$ 가 되어,

$T_1(t) = \{\ell(t)\}^2 = S(t)$ 이고,  $T(t) = 2S(t)$ 가 된다.

(1-2)번 풀이의  $\ell(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t^2 + 6t + 1}$ 로부터,  $\ell(t) = 5$ 이면  $t=3$ 이다.

$S'(t) = \frac{4}{3}t + 6$ 이므로,  $S'(3) = 10$ 이 되고, 따라서  $T'(3) = 20$ 이다.

## ■ 교사자문단 의견

<b>1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항</b>
<p>1번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.</p> <p>[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p>[12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</p> <p>[12수학 II 02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.</p> <p>주어진 문항 및 제시문은 수학 I, 미적분 교과에서 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 도형의 길이를 나타낼 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 내에서 출제됨.</p>
<b>2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항</b>
<p>1번 문항은 사인법칙, 코사인법칙, 순간변화율의 개념을 알고 이를 활용하여 문제에 적용할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>
<b>3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항</b>
<p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
<b>4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항</b>
<p>제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.</p>
<b>5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항</b>
<p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음.</p>
<b>6. 예상 난이도 및 총평</b>
<p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.</p> <p>(1-1) 중, (1-2) 중, (1-3) 중</p> <p>1번 문항은 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 나타내고, 미분을 이용하여 순간변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문항으로 전체적인 난이도는 중이라고 판단됨. 고등학교 수학 교과과정에서 비슷한 유형의 문제를 접해 본 학생들은 쉽게 풀어낼 수 있을 것으로 생각되며 수학 개념, 문제해결력을 평가하기에 적절한 문항이라 생각됨. 주어진 문항 및 풀이는 고등학교 교육과정 수준에서 출제되었음.</p>

[문항카드7] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항2

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(B형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	치환적분법, 정적분
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(2x) = 4f(x)$ 이다.

(나)  $\int_1^2 f(x)dx = 6$

(다) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $g(x)$ 에 대하여  $1 \leq x \leq 2$ 에서  $f(x) = g(x)$ 이다.

(2-1)  $\int_1^3 2^x f(2^x)dx$ 를 구하시오. (70점)

(2-2)  $\int_0^1 f(x)dx$ 를 구하시오. (80점)

(2-3)  $g(x)$ 를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

치환적분과 적분의 성질을 이용하여 적분을 계산하고 미분을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

#### 4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열B -문제2	교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준· 성취수준	미적분 (3) 적분법 ㉠ 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학II (3) 적분 ㉡ 정적분 [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오인 외	교학사	2019	156-157
	수학II	황선욱 외	미래엔	2019	126
기타					

#### 5. 문항 해설

치환적분과 적분의 성질을 이용하여 적분을 계산하고 미분을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 함수를 구한다.

## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>u = 2^x</math> 으로 치환하여 <math>\int_1^3 2^x f(2^x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_2^8 f(u) du</math> 를 얻으면 (+20점)</li> <li>▪ <math>\int_2^4 f(x) dx = 48</math> 을 계산하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>\int_2^8 f(x) dx = 432</math> 를 계산하고 답 <math>\int_1^3 2^x f(2^x) dx = \frac{432}{\ln 2}</math> 를 구하면 (+30점)</li> </ul>	70
(2-2)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(2u) 2 du = \int_0^1 8f(u) du = 8 \int_0^1 f(x) dx</math> 를 얻으면 (+40점)</li> <li>▪ 답 <math>\int_0^1 f(x) dx = \frac{6}{7}</math> 을 얻으면 (+40점)</li> </ul> <p><b>[별해]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x) dx = \int_1^2 f(2^{-k}x) 2^{-k} dx = 8^{-k} \int_1^2 f(x) dx = \frac{6}{8^k}</math> 을 얻으면 (+40점)</li> <li>▪ <math>\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{8^k} = \frac{6}{7}</math> 을 얻으면 (+40점)</li> </ul>	80
(2-3)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(2) = 4f(1)</math> 을 얻으면 (+10점)</li> <li>▪ <math>f'(2) = 2f'(1)</math> 을 얻으면 (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>g(x) = x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 6x - \frac{8}{3}</math> 을 얻으면 (+40점)</li> </ul>	80

## 7. 예시 답안

(2-1)  $u = 2^x$ 으로 치환하면  $du = 2^x \ln 2 dx$ 이므로  $\int_1^3 2^x f(2^x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_2^8 f(u) du$ 이다.

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_1^2 f(2y) 2 dy = 8 \int_1^2 f(y) dy = 48 \text{이고}$$

$$\int_4^8 f(x) dx = \int_2^4 f(2y) 2 dy = 8 \int_2^4 f(y) dy = 384 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \int_2^8 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx = 432 \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } \int_1^3 2^x f(2^x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_2^8 f(u) du = \frac{432}{\ln 2} \text{이다.}$$

(2-2)  $\int_0^2 f(x) dx$ 에서  $u = \frac{x}{2}$ 로 치환하면

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(2u) 2 du = \int_0^1 8f(u) du = 8 \int_0^1 f(x) dx \text{이다.}$$

$$8 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 6 + \int_0^1 f(x) dx \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{6}{7} \text{이다.}$$

[별해]  $\int_1^2 f(x) dx = 6$ 이므로  $\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x) dx = \int_1^2 f(2^{-k}x) 2^{-k} dx = 8^{-k} \int_1^2 f(x) dx = \frac{6}{8^k}$ 이다.

$$\text{따라서 } \int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{8^k} = \frac{6}{7} \text{이다.}$$

(2-3)  $f(2x) = 4f(x)$ 에서  $2f'(2x) = 4f'(x)$ 이다.

따라서  $f(2) = 4f(1)$ 이고  $f'(2) = 2f'(1)$ 이다.

$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하자.  $g'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이다.

$g(2) = 4g(1)$ ,  $g'(2) = 2g'(1)$ 이므로  $2b + 3c = 4$ ,  $b = 6$ 이다. 따라서  $c = -\frac{8}{3}$ 이다.

$$\int_1^2 \left( x^3 + ax^2 + 6x - \frac{8}{3} \right) dx = 6 \text{에서 } a = -\frac{7}{4} \text{이다. 그러므로 } g(x) = x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 6x - \frac{8}{3} \text{이다.}$$

■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
<p>2번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.</p> <p>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</p> <p>[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>주어진 문항 및 제시문은 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있는가를 평가하는 문항으로 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.</p>
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
<p>2번 문항은 미적분 교과와 여러 가지 함수의 정적분 값을 구할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
<p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
<p>제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.</p>
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
<p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 접근할 수 있음을 제시함.</p>
6. 예상 난이도 및 총평
<p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.</p> <p>(2-1) 중, (2-2) 상, (2-3) 중</p> <p>2번 문항은 미적분 교과와 적분 단원에서 출제되었으며 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있는가를 묻고 있다. (2-1)은 합성함수의 적분(치환적분)의 개념을 공부했다면 쉽게 풀어낼 수 있는 문제이며 (2-2)은 제시문에 주어진 조건을 활용하여 정적분의 값을 구해내야 하는데 학생들의 창의력과 문제해결력을 평가하기에 좋은 문항이라 생각됨. 미적분 교과를 성실히 공부하였다면 잘 풀어낼 것으로 판단되며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>



[문항카드8] 논술 우수자 전형 : 자연계열B-문항3

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(B형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	대칭, 최대, 최소, 역함수의 미분법
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간  $(-1, 1)$ 에서 이계도함수가 존재하는 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $0 < x < \pi$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(\cos x) = e^x$ 이다.

(나)  $f(1) = \frac{1}{2}$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 함수  $g(x)$ 를  $g(x) = f(\cos x)$ 라 정의하자. 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1)  $0 \leq x \leq \pi$ 일 때  $g(x)$ 를 구하시오. (80점)

(3-2)  $\pi \leq x \leq 2\pi$ 일 때 함수  $g(x)$ 를 구하고,  $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 곡선  $y = g(x)$ 의 그래프의 개형을 그리시오. 또한 이 곡선이  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표와 변곡점의  $x$ 좌표를 모두 구하고 함수  $g(x)$ 의 최솟값을  $m$ , 최댓값을  $M$ 이라 할 때 상수  $m$ 과  $M$ 을 각각 구하시오. (80점)

(3-3) (3-2)에서 구한 상수  $m$ 과  $M$ 에 대하여 열린구간  $(m, M)$ 을  $I$ 라 하자. 실수  $t \in I$ 에 대하여 직선  $y = t$ 가 곡선  $y = g(x)$ 와 만나서 생기는 두 점 사이의 거리를  $h(t)$ 라 정의하자. 미분가능한 함수  $h(t)$ 에 대하여  $h(k) = \pi$ 일 때 상수  $k$ 와  $h'(k)$ 의 값을 각각 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

주어진 조건을 만족시키는 그래프의 개형을 파악한 뒤 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

#### 4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열B -문제3	교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 수학II (2) 미분 ③ 도함수의 활용
	성취기준· 성취수준	[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	황선욱 외	미래엔	2020	82~88
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	97~101
기타					

#### 5. 문항 해설

대칭성을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 그래프의 개형을 그린 뒤 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>g'(x) = -e^x \sin x</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>■ 부분적분을 이용하여 <math>g(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) + C</math> 임을 보이면 (+50점)</li> <li>■ <math>C=0</math>임을 보여서 <math>g(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x)</math>를 구하면 (+10점)</li> </ul>	80
(3-2)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ 곡선 <math>y=g(x)</math>는 직선 <math>x=\pi</math>에 대칭임을 언급하면 (+10점)</li> <li>■ <math>\pi \leq x \leq 2\pi</math>일 때 <math>g(x) = \frac{1}{2}e^{2\pi-x}(\cos x + \sin x)</math>임을 구하면 (+20점)</li> <li>■ <math>x</math>축과 만나는 점의 <math>x</math>좌표: <math>\frac{\pi}{4}</math> (+5점), <math>\frac{7\pi}{4}</math> (+5점)</li> <li>■ <math>0 \leq x \leq \pi</math>일 때 (또는 <math>\pi \leq x \leq 2\pi</math>일 때)의 <math>g''(x)</math>를 제대로 구하고 변곡점의 <math>x</math>좌표를 구한 경우: <math>\frac{3\pi}{4}</math> (+5점), <math>\frac{5\pi}{4}</math> (+5점)</li> <li>■ <math>m = -\frac{e^\pi}{2}</math> (+5점), <math>M = \frac{1}{2}</math> (+5점)</li> <li>■ 곡선 <math>y=g(x)</math>의 그래프의 개형을 제대로 그리면 (+20점)</li> </ul>	80
(3-3)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>k = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}</math>을 구하면 (+20점)</li> <li>■ <math>g\left(\pi - \frac{1}{2}h(t)\right) = t</math>임을 설명하면 (+20점)</li> <li>■ <math>h'(t) = -\frac{2}{g'\left(\pi - \frac{1}{2}h(t)\right)}</math>임을 설명하면 (+20점)</li> <li>■ <math>h'(k) = 2e^{-\frac{\pi}{2}}</math>을 구하면 (+20점)</li> </ul> <p><b>[별해]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>h(t) = 2\{\pi - g^{-1}(t)\}</math>를 설명하면 (+20점)</li> <li>■ <math>k = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}</math>을 구하면 (+20점)</li> <li>■ <math>h'(t) = -\frac{2}{g'(g^{-1}(t))}</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>■ <math>h'(k) = 2e^{-\frac{\pi}{2}}</math>을 구하면 (+20점)</li> </ul>	80

## 7. 예시 답안

(3-1) 조건 (가)에서  $0 < x < \pi$  일 때  $f'(\cos x) = e^x$ 이므로 다음을 얻는다.

$$g'(x) = f'(\cos x)(-\sin x) = -e^x \sin x$$

양변을 적분하면  $f(\cos x) = g(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) + C$ 이다.

그런데 함수  $g(x)$ 는 구간  $[0, \pi]$ 에서 연속이므로 이 식은  $0 \leq x \leq \pi$ 에서도 성립한다.

이 식의 양변에  $x=0$ 을 대입하면  $f(1) = g(0) = \frac{1}{2} + C$ 인데 조건 (나)를 이용하면  $C=0$ 이다.

따라서 다음을 얻는다.

$$g(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

(3-2)  $\pi \leq x \leq 2\pi$ 일 때  $0 \leq 2\pi - x \leq \pi$ 이고  $g(2\pi - x) = f(\cos(2\pi - x)) = f(\cos x) = g(x)$ 이므로 곡선  $y = g(x)$ 는 직선  $x = \pi$ 에 대칭이다. 그러므로 (3-1)에서 구한  $0 \leq x \leq \pi$ 일 때의  $g(x)$ 의 식에  $x$  대신  $2\pi - x$ 를 대입하면 다음을 얻는다.

$$g(x) = g(2\pi - x) = \frac{1}{2}e^{2\pi - x}\{\cos(2\pi - x) - \sin(2\pi - x)\} = \frac{1}{2}e^{2\pi - x}(\cos x + \sin x) \quad (\pi \leq x \leq 2\pi)$$

그래프를 그리기 위해 우선  $0 < x < \pi$ 일 때를 생각하면,  $g'(x) = -e^x \sin x < 0$ 이므로  $g(x)$ 는 감소한다.

또한  $g''(x) = -e^x(\cos x + \sin x)$ 이므로  $g''(x) = 0$ 일 때를 생각하면  $\cos x + \sin x = 0$ ,

즉  $\tan x = -1$ 이므로  $x = \frac{3\pi}{4}$ 이다. 따라서  $x = \frac{3\pi}{4}$ 일 때 변곡점이 되고,  $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ 일 때

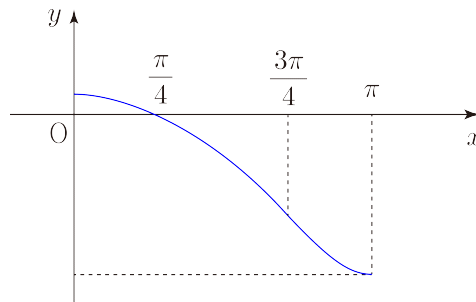
$g''(x) < 0$ 이므로 위로 볼록하고,  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ 일 때  $g''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하다.

이제  $0 \leq x \leq \pi$ 일 때 이 곡선이  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표를 구하기 위해

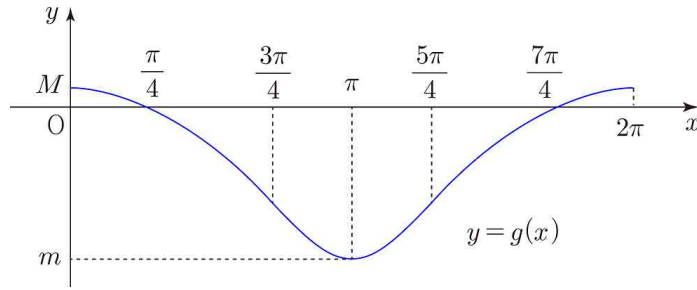
$$g(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) = 0 \text{ 을 풀면 } \cos x - \sin x = 0 \text{ 에서 } \tan x = 1 \text{이다.}$$

$0 \leq x \leq \pi$ 이므로  $x = \frac{\pi}{4}$ 이다. 즉, 구간  $[0, \pi]$ 에서  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표는  $\frac{\pi}{4}$  뿐이다.

따라서 구간  $[0, \pi]$ 에서 곡선  $y = g(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



$g'(\pi) = 0$ 이고, 그래프의 대칭성을 생각하면 구간  $[0, 2\pi]$ 에서 곡선  $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 이 곡선이  $x$  축과 만나는 점의  $x$  좌표는  $\frac{\pi}{4}$ 와  $\frac{7\pi}{4}$ 이고 변곡점의  $x$  좌표는  $\frac{3\pi}{4}$ 와  $\frac{5\pi}{4}$ 이다.

또한  $m = g(\pi) = -\frac{e^\pi}{2}$ ,  $M = g(0) = g(2\pi) = \frac{1}{2}$ 이다.

(3-3)  $h(k) = \pi$ 일 때 직선  $y = k$ 가 곡선  $y = g(x)$ 와 만나서 생기는 두 점의  $x$  좌표는

각각  $\frac{\pi}{2}$ 와  $\frac{3\pi}{2}$ 이다. 이 때  $k = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ 이다.

곡선  $y = g(x)$ 의 그래프의 대칭성을 이용하면  $g\left(\pi - \frac{1}{2}h(t)\right) = t$ 이고,

이 식의 양변을 미분하면  $-\frac{1}{2}g'\left(\pi - \frac{1}{2}h(t)\right)h'(t) = 1$ 이므로  $h'(t) = -\frac{2}{g'\left(\pi - \frac{1}{2}h(t)\right)}$ 이다.

이 식에  $t = k$ ,  $h(k) = \pi$ 를 대입하면 다음을 얻는다.

$$h'(k) = -\frac{2}{g'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{2}{-e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}} = 2e^{-\frac{\pi}{2}}$$

**[별해]** 함수  $g(x)$ 는 구간  $[0, \pi]$ 에서 감소함수이므로 역함수를 갖는다.

그러므로 구간  $(m, M)$ 에 속하는 실수  $t$ 에 대하여 직선  $y = t$ 가 곡선  $y = g(x)$ 와

$0 < x < \pi$ 에서 만나서 생기는 점의  $x$  좌표는  $g^{-1}(t)$ 로 나타낼 수 있다.

곡선  $y = g(x)$ 의 대칭성을 이용하면  $h(t) = 2\{\pi - g^{-1}(t)\}$ 이다.

따라서  $h(k) = \pi$ 일 때  $h(k) = 2\{\pi - g^{-1}(k)\} = \pi$ 로부터  $g^{-1}(k) = \frac{\pi}{2}$ 이고  $k = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ 이다.

역함수의 미분법을 사용하여  $h(t) = 2\{\pi - g^{-1}(t)\}$ 의 도함수를 구하면

$$h'(t) = -2\{g^{-1}(t)\}' = -\frac{2}{g'(g^{-1}(t))}$$

이다. 위의 식에  $t = k$ ,  $g^{-1}(t) = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면 다음을 얻는다.

$$h'(k) = \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}} = 2e^{-\frac{\pi}{2}}$$

## ■ 교사자문단 의견

<b>1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항</b>
<p>3번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.</p> <p>[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.</p> <p>[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</p> <p>[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.</p> <p>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</p> <p>주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과에서 출제되었으며 미분과 부정적분을 이용하여 주어진 함수를 구하고 함수추론을 할 수 있는가를 묻는 문항으로 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.</p>
<b>2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항</b>
<p>3번 문항은 지수함수와 삼각함수의 곱으로 이루어진 함수를 미분과 정적분을 할 수 있는가를 묻고 있으며 대칭성을 이용하여 함수추론을 하고 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프 개형을 그릴 수 있는가를 평가하는 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>
<b>3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항</b>
<p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
<b>4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항</b>
<p>제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음. 변별력을 평가하기에 적절함.</p>
<b>5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항</b>
<p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 그래프를 통해 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 풀이가 가능함을 제시함.</p>
<b>6. 예상 난이도 및 총평</b>
<p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.</p> <p>(3-1) 중, (3-2) 상, (3-3) 상</p> <p>3번 문항 전체적인 난이도는 상으로 판단됨. 지수함수와 삼각함수의 곱으로 이루어진 형태의 함수를 부정적분 할 수 있는가를 평가하고, 삼각함수의 주기성을 이용하여 함수의 대칭성을 파악할 수 있는가가 문제풀이의 핵심 아이디어이다. 미적분 교과에서 비슷한 문항을 접해보았을 것으로 생각되며 고등학교 수학 교육과정을 잘 공부한 학생이라면 잘 풀어낼 수 있을 것으로 판단됨. 기본 개념, 창의력, 문제해결력 등을 변별할 수 있는 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>

[문항카드9] 논술 우수자 전형 : 자연계열C-문항1

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(C형) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심 개념 및 용어	치환적분법, 부분적분법, 역함수의 미분법
예상 소요 시간	36분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x) = 2e^x - e^{-x}$ 에 대하여  
다음 물음에 각각 답하시오.

(1-1) 함수  $f(x)$ 의 역함수  $f^{-1}(x)$ 가 존재함을 보이시오. (70점)

(1-2) 함수  $F(x) = \int_0^x t f^{-1}(t) dt$ 는  $x=1$ 에서 극솟값을 가짐을 보이시오. (80점)

(1-3)  $F(1)$ 의 값을 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

부분적분법과 치환적분법을 이용하여 문제를 풀 수 있는지를 평가한다.

#### 4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열C -문제1	교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준· 성취수준	미적분 (3)적분법 ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 (2)미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외	지학사	2019	144~149
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	89~90, 132-139
기타					

#### 5. 문항 해설

부분적분법과 치환적분법 및 적분과 미분의 관계식을 이용하여 함수의 극솟값을 계산한다.



## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>f'(x) = 2e^x + e^{-x} &gt; 0</math>을 보이면 (+40점)</li> <li>■ "<math>y=f(x)</math>는 일대일대응(또는 일대일함수 또는 증가함수)이므로 역함수 <math>f^{-1}(x)</math>가 존재한다"를 서술하면 (+30점)</li> </ul> <p><b>[별해]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ 역함수 <math>y = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{4}</math>을 구하면 (70점)</li> </ul>	70
(1-2)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>f^{-1}(1) = 0</math>을 보이면 (+20점)</li> <li>■ <math>F'(1) = f^{-1}(1) = 0</math>을 보이면 (+20점)</li> <li>■ <math>F''(x) = f^{-1}(x) + \frac{x}{f'(f^{-1}(x))}</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>■ <math>F''(1) = f^{-1}(1) + \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{3} &gt; 0</math>을 보이면 (+20점)</li> </ul> <p><b>[별해]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>f^{-1}(1) = 0</math>을 보이면 (+20점)</li> <li>■ <math>F'(1) = f^{-1}(1) = 0</math>을 보이면 (+20점)</li> <li>■ <math>0 &lt; x &lt; 1</math>이면 <math>F'(x) = xf^{-1}(x) &lt; 0</math>을 보이면 (+20점)</li> <li>■ <math>x &gt; 1</math>이면 <math>F'(x) = xf^{-1}(x) &gt; 0</math>을 보이면 (+20점)</li> </ul>	80
(1-3)	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>\int_0^1 xf^{-1}(x)dx = \left[ \frac{1}{2}x^2f^{-1}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\{f^{-1}(x)\}'dx</math>  <math>= - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} dx</math>              를 보이면 (+20점)</li> <li>■ <math>-\int_{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{2}(2e^t - e^{-t})^2 dt</math>를 보이면 (+30점)</li> <li>■ 답 <math>\ln 2 - \frac{3}{4}</math>을 구하면 (+30점)</li> </ul> <p><b>[별해]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>\int_0^1 xf^{-1}(x)dx \equiv \int_{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}}^0 f(t)tf'(t)dt = \int_{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}}^0 t(2e^t - e^{-t})(2e^t + e^{-t})dt</math>              를 구하면 (+30점)</li> <li>■ 답 <math>\ln 2 - \frac{3}{4}</math>을 구하면 (+50점)</li> </ul>	80

## 7. 예시 답안

(1-1)  $f'(x) = 2e^x + e^{-x} > 0$  이므로  $f(x)$ 는 증가함수이다. 따라서  $y = f(x)$ 는 일대일대응이다. 그러므로 역함수  $f^{-1}(x)$ 가 존재한다.

[별해] 역함수  $y = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{4}$  을 직접 구한다.

(1-2)  $f^{-1}(1) = a$ 라 하면  $1 = f(a) = 2e^a - e^{-a}$ 이다.

$e^a = A$ 라 놓으면  $0 = 2A^2 - A - 1 = (A-1)(2A+1)$ 로부터  $1 = A = e^a$ 이고  $a = 0$ 이다.

$F'(x) = xf^{-1}(x)$ 로부터  $F'(1) = f^{-1}(1) = 0$ 이다.

$F''(x) = f^{-1}(x) + x\{f^{-1}(x)\}' = f^{-1}(x) + \frac{x}{f'(f^{-1}(x))}$  이므로

$F''(1) = f^{-1}(1) + \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{3} > 0$  이다. 따라서  $F(x)$ 는  $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

[별해]  $f(0) = 1$ 로부터,  $f^{-1}(1) = 0$ 이다.  $F'(x) = xf^{-1}(x)$ 로부터  $F'(1) = f^{-1}(1) = 0$ 이다.

$f^{-1}(x)$ 는 증가함수이고  $f^{-1}(1) = 0$ 이므로,  $x < 1$ 이면  $f^{-1}(x) < 0$ 이고,  $x > 1$ 이면  $f^{-1}(x) > 0$ 이다.

따라서  $0 < x < 1$ 이면  $F'(x) = xf^{-1}(x) < 0$ ,  $x > 1$ 이면  $F'(x) = xf^{-1}(x) > 0$ 이므로

$F(x)$ 는  $x=1$ 에서 극솟값을 가진다.

(1-3)  $f^{-1}(0) = a$ 라 하면  $0 = f(a) = 2e^a - e^{-a}$ 이다.  $e^a = A$ 라 놓으면  $0 = 2A^2 - 1$ 로부터

$\frac{1}{\sqrt{2}} = A = e^a$ 이고  $a = \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$  이다.

$$\int_0^1 xf^{-1}(x)dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 f^{-1}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \{f^{-1}(x)\}' dx = - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} dx$$

( $t = f^{-1}(x)$ 로 치환,  $x = f(t)$ ,  $dx = f'(t)dt$ )

$$= - \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(1)} \frac{1}{2} \{f(t)\}^2 \frac{1}{f'(t)} f'(t) dt = - \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(1)} \frac{1}{2} (2e^t - e^{-t})^2 dt = - \int_{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{2} (2e^t - e^{-t})^2 dt = \ln 2 - \frac{3}{4}$$

[별해]  $f^{-1}(0) = a$ 라 하면  $0 = f(a) = 2e^a - e^{-a}$ 이다.  $e^a = A$ 라 놓으면  $0 = 2A^2 - 1$ 로부터

$\frac{1}{\sqrt{2}} = A = e^a$ 이고  $a = \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$  이다.

$t = f^{-1}(x)$ 로 치환하면  $x = f(t)$ ,  $dx = f'(t)dt$ 이므로

$$\int_0^1 xf^{-1}(x)dx = \int_{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}}^0 f(t)t f'(t)dt = \int_{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}}^0 t(2e^t - e^{-t})(2e^t + e^{-t})dt = \ln 2 - \frac{3}{4}$$

## ■ 교사자문단 의견

<p><b>1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항</b></p> <p>1번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.          [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.          [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.          [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.          [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.          주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과에서 출제되었으며 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.</p>
<p><b>2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항</b></p> <p>1번 문항은 지수함수를 미분하고 정적분을 구할 수 있는가를 평가하는 문항으로 미분과 적분 전반적인 개념을 알고 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>
<p><b>3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항</b></p> <p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
<p><b>4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항</b></p> <p>제시된 채점기준은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 배점되었음. 또한 학생들의 변별력을 평가하기에 적절하게 부분점수 배점 되었음.</p>
<p><b>5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항</b></p> <p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정 내에서 수학언어와 기호를 사용하였으며 학생들의 풀이를 이해하기 쉽게 잘 제시되었음. 여러 별해(다른풀이)를 제시하여 학생들이 다양한 방법으로 접근할 수 있음을 제시함.</p>
<p><b>6. 예상 난이도 및 총평</b></p> <p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.          (1-1) 하, (1-2) 중, (1-3) 중          (1-1) 문항은 미분을 이용하여 역함수가 존재할 조건을 구할 수 있는가를 평가하며 (1-2)와 (1-3)에서는 여러 가지 함수를 미분하고 정적분 값을 구할 수 있는지를 평가한다. 문항 전반적인 난이도는 중으로 판단되며 학생들이 미적분 교과를 잘 공부한 학생이면 쉽게 풀어낼 수 있을 것으로 생각됨. 기본 개념과 문제해결력을 평가하기에 적절한 문항을 평가되며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>

[문항카드10] 논술 우수자 전형 : 자연계열C-문항2

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계열(C형) / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심 개념 및 용어	삼각함수, 함수의 극한, 정적분
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제2] 시각  $t > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 를 모든 실수  $x$ 에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = t(x-t)(x-t-1)$$

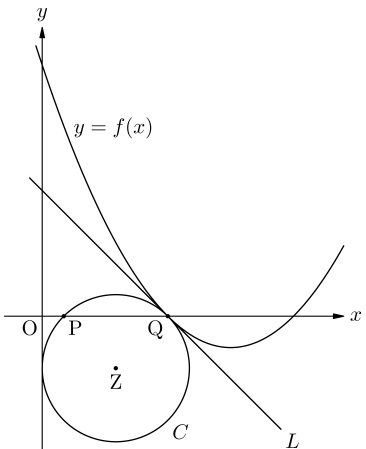
점  $Q(t, 0)$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 에 접하는 직선을  $L$ 이라 하자.

중심  $Z$ 가 제4사분면에 있는 원  $C$ 는  $y$ 축에 접하며 점  $Q$ 에서 직선  $L$ 에도 접한다.

(2-1) 시각  $t$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $L$  및  $y$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를  $t$ 에 대한 식으로 나타내시오. (70점)

(2-2) 시각  $t$ 에서 원  $C$ 의 중심  $Z$ 의 좌표를  $(a(t), b(t))$ 라 할 때,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)}$ 을 구하시오.  
(80점)

(2-3) 시각  $t$ 에서 원  $C$ 가  $x$ 축과 만나는 점 중에서  $Q$ 가 아닌 점을  $P$ 라 하고,  
 $\angle PZQ$ 를  $\theta$ 라 하자. 시각  $t_1, t_2$  ( $0 < t_1 < t_2$ )에서  $\sin \theta$ 의 값이 같고,  $t_1 + t_2 = 14$ 일 때  
 $t_1$ 의 값을 구하시오. (80점)



### 3. 출제 의도

삼각함수의 덧셈정리, 함수의 극한, 정적분, 원과 직선의 위치 관계 등을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

### 4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열C -문제2	교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
	성취기준· 성취수준	수학II (1) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	황선욱 외	동아출판	2019	11~18
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	65~70, 168~171
기타					

### 5. 문항 해설

접선의 방정식, 정적분, 원과 직선의 위치관계, 삼각함수 덧셈정리, 미분계수 등을 활용하여, 도형의 넓이, 함수의 극한 등을 구한다.

## 6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f'(x) = t(2x - 2t - 1)</math> (+10점)</li> <li>▪ <math>y = -t(x - t)</math> (+20점)</li> <li>▪ 도형의 넓이 <math>= \frac{t^4}{3}</math> (+40점)</li> </ul>	70
(2-2)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>a(t) = t\sqrt{t^2 + 1}(\sqrt{t^2 + 1} - t)</math> 또는 <math>b(t) = -t(\sqrt{t^2 + 1} - t)</math> 를 구하면 (+40점)</li> <li>▪ <math>\frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}(\sqrt{t^2 + 1} + t)}</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)} = \frac{1}{2}</math> (+20점)</li> </ul>	80
(2-3)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\sin\theta = \frac{2t}{t^2 + 1}</math> (+40점)</li> <li>▪ <math>t_1 t_2 = 1</math> (+30점)</li> <li>▪ <math>t_1 = 7 - 4\sqrt{3}</math> (+10점)</li> </ul>	80

## 7. 예시 답안

(2-1)  $f'(x) = t(2x - 2t - 1)$ 이므로,  $f'(t) = -t$ 이다. 따라서 직선  $L$ 의 방정식은  $y = -t(x - t)$ 이고, 구하는 도형의 넓이는  $\int_0^t \{t(x-t)(x-t-1) + t(x-t)\} dx = \frac{t^4}{3}$ 이다.

(2-2)  $f'(t) = -t$ 이므로, 점  $Q$ 에서 직선  $L$ 에 수직인 직선의 방정식은  $y = \frac{1}{t}(x - t)$ ,

즉  $x = ty + t$ 이다.

원  $C$ 가 점  $Q(t, 0)$ 을 지나고, 중심이 이 직선 상에 있으므로, 다음 두 식이 성립한다.

$$(t-a)^2 + b^2 = a^2, \quad a = t(b+1)$$

이 식을 풀면,  $b(t) = -t(\sqrt{t^2+1}-t)$ ,  $a(t) = t\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}-t) = -\sqrt{t^2+1}b(t)$ 이다.

$$\frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+t)} \text{ 이 되므로, } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\{b(t)\}^2}{a(t)} = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

(2-3) 시각  $t$ 에서  $H = (a, 0)$ 이라 하면

$$\angle PZH = \frac{\theta}{2} \text{ 이다. } \overline{ZP} = a, \quad \overline{ZH} = -b \text{ 이므로, } \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \text{ 이다.}$$

$$0 < \theta < \pi \text{ 이므로 } \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서, 시각 } t \text{에서 } \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2t}{t^2+1} \text{ 이다.}$$

시각  $t_1, t_2$  ( $0 < t_1 < t_2$ )에서  $\sin \theta$ 의 값이 동일하므로,  $\frac{2t_1}{t_1^2+1} = \frac{2t_2}{t_2^2+1}$ 가 성립하고,

이 식으로부터  $t_1 t_2 = 1$ 이 나온다.

그런데  $t_1 + t_2 = 14$ 이므로,  $t_1, t_2$ 는  $t^2 - 14t + 1 = 0$ 의 해가 되어,  $t_1 = 7 - 4\sqrt{3}$ 이다.

## ■ 교사자문단 의견

1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항
<p>2번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.</p> <p>[12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</p> <p>[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.</p> <p>[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</p> <p>주어진 문항 및 제시문은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고 함수의 극한 값을 구할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.</p>
2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항
<p>2번 문항은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가와 주어진 조건을 만족하는 식을 구하고 극한값을 구할 수 있는가를 평가하는 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p> <p>、</p>
3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항
<p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항
<p>제시된 채점 기준은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학 언어와 수학 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 점수 배점이 되었음. 각 문항별로 학생들의 수학 수준을 평가하기 적절하게 부분점수 배점하여 변별력이 있음.</p>
5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항
<p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학 언어와 수학 기호를 사용하여 나타내었으며 학생들이 이해하기 쉽게 풀이를 제시하였음.</p>
6. 예상 난이도 및 총평
<p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.</p> <p>(2-1) 중, (2-2) 상, (2-3) 중</p> <p>2번 문항은 미적분 교과에서 곡선으로 둘러싸인 넓이를 구할 수 있는가를 평가하며 수학Ⅱ 교과에서 함수의 극한, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 제시된 문항을 해결할 수 있는가를 평가한다. 전체적인 문항 난이도는 중으로 판단되며 수학Ⅱ와 미적분 교과를 공부하면서 비슷한 유형의 문제를 풀어본 학생들은 잘 풀어낼 수 있을 것으로 생각됨. 개념을 잘 알고 있는지와 복잡한 연산을 간단히 정리할 수 있는가를 평가하기에 적절한 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>



[문항카드11] 논술 우수자 전형 : 자연계열C-문항3

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 전형	
해당 대학의 계열(과목)/ 문항 번호	자연계(C형) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	접선의 방정식, 미분계수, 적분과 미분의 관계, 곡선의 길이
예상 소요 시간	40분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3]  $x \geq 0$ 에서 연속인 함수  $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $x > 0$ 에서  $f(x)$ 는 두 번 미분가능하고  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ 이다.  
 (나) 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(a, f(a))$ 에서의 접선이 점  $A(0, -\sqrt{2})$ 를 지난다. (단,  $a > 0$ )

곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=-\sqrt{2}$  및 두 직선  $x=0$ ,  $x=2a$ 로 둘러싸인 도형을  $S$ 라 하자.  
 도형  $S$ 에서 점  $A$ 와 점  $(x, f(x))$  ( $0 \leq x \leq 2a$ )를 잇는 가장 짧은 경로의 길이를  $\ell(x)$ 라 하자.

(3-1)  $x=a$ 에서  $\ell(x)$ 가 미분가능함을 보이시오. (80점)

(3-2)  $\ell(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{5}{3}$ 일 때 접점  $(a, f(a))$ 를 구하시오. (80점)

(3-3) (3-2)의  $\ell(x)$ 에 대하여  $f(x)$  ( $0 \leq x \leq 2a$ )를 구하시오. (80점)

3. 출제 의도

곡선의 길이와 미분과 적분의 관계 등을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

#### 4. 출제 근거

##### 가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
자연계열 C-문제3	교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정 수학Ⅱ (2) 미분 ① 미분계수 [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. 미적분 (2) 미분법 미분 ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	수학Ⅱ (2) 미분 ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

##### 나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	97, 163~164
	수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2020	53~59, 73, 130
기타					

#### 5. 문항 해설

문제의 조건에 부합하는 길이 함수를 찾고, 길이 함수의 미분계수를 구하여 주어진 함수를 찾는다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	$\ell(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + (f(x) + \sqrt{2})^2} & (0 \leq x \leq a) \\ \sqrt{a^2 + (f(a) + \sqrt{2})^2} + \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt & (a < x \leq 2a) \end{cases}$ <p>를 구하면 (+40점)</p> <p>■ <math>-af'(a) + f(a) = -\sqrt{2}</math> 또는 이와 동등한 관계를 얻으면 (+20점)</p> <p>■ 좌우의 미분계수를 나누어 생각하여 각각 <math>\sqrt{1 + \{f'(a)\}^2}</math> 임을 얻어 <math>x=a</math>에서 미분가능함을 보이면 (+20점)</p>	80
(3-2)	<p>■ <math>\ell(a) = a\ell'(a)</math>를 얻으면 (+50점)</p> <p>■ <math>a=1</math> (+20점)</p> <p>■ <math>f(1) = \sqrt{2}</math> 또는 접점 <math>(1, \sqrt{2})</math>를 쓰면 (+10점)</p> <p><b>[별해]</b></p> <p>■ <math>f'(a) = (1+a)\sqrt{a^2+2a-1}</math> 을 얻으면 (+30점)</p> <p>■ <math>\{\ell(a)\}^2 = a^2 + \{a(1+a)\sqrt{a^2+2a-1}\}^2</math> (+10점)</p> <p>■ <math>\{\ell(a)\}^2 = \left(\frac{a^3}{3} + a^2 + \frac{5}{3}\right)^2</math> (+10점)</p> <p>■ <math>a=1</math> (+20점)</p> <p>■ <math>f(1) = \sqrt{2}</math> 또는 접점 <math>(1, \sqrt{2})</math>를 쓰면 (+10점)</p>	80
(3-3)	<p>다음과 같이 <math>1 \leq x \leq 2</math>인 경우 50점, <math>0 \leq x \leq 1</math>인 경우 30점으로 채점하여 합산한다.</p> <p>(<math>1 \leq x \leq 2</math>인 경우)</p> <p>■ <math>f'(x) = (1+x)\sqrt{x^2+2x-1}</math> 을 얻으면 (+10점)</p> <p>■ <math>f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x-1)^{3/2} + C</math> 를 얻으면 (+30점)</p> <p>■ <math>C = \frac{\sqrt{2}}{3}</math> 를 얻으면 (+10점)</p> <p>(<math>0 \leq x \leq 1</math>인 경우)</p> <p>■ <math>\ell(x) = \sqrt{x^2 + \{f(x) + \sqrt{2}\}^2} = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{5}{3}</math> 를 얻으면 (+20점)</p> <p>■ <math>f(x) = \left\{ \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{5}{3} \right)^2 - x^2 \right\}^{1/2} - \sqrt{2}</math> 를 얻으면 (+10점)</p>	80

## 7. 예시 답안

(3-1)  $y=f(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하므로 문제의 조건에 부합하는 가장 짧은 경로는  $0 \leq x \leq a$ 일 때는 A와  $(x, f(x))$ 를 잇는 선분이며,  $a < x \leq 2a$ 일 때는 A와  $(a, f(a))$ 를 선분으로 연결한 후 곡선  $y=f(x)$ 를 따라 이동해야 한다. 따라서  $\ell(x)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\ell(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + \{f(x) + \sqrt{2}\}^2} & (0 \leq x \leq a) \\ \sqrt{a^2 + \{f(a) + \sqrt{2}\}^2} + \int_a^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt & (a < x \leq 2a) \end{cases}$$

점  $(a, f(a))$ 에서  $y=f(x)$ 에 접하는 접선의 방정식은  $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 이므로 접선이 A를 지나기 위해서는  $-af'(a)+f(a)=-\sqrt{2}$ 이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ell(a+h) - \ell(a)}{h} = \sqrt{1 + \{f'(a)\}^2} \text{ 이고}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\ell(a+h) - \ell(a)}{h} = \frac{1}{2} \frac{2a + 2\{f(a) + \sqrt{2}\}f'(a)}{\sqrt{a^2 + \{f(a) + \sqrt{2}\}^2}} = \frac{a + a\{f'(a)\}^2}{\sqrt{a^2 + a^2\{f'(a)\}^2}} = \sqrt{1 + \{f'(a)\}^2} \text{ 이므로}$$

$\ell(x)$ 는  $x=a$ 에서 미분가능하고  $\ell'(a) = \sqrt{1 + \{f'(a)\}^2}$ 이다.

$$(3-2) \ell(a) = \sqrt{a^2 + \{f(a) + \sqrt{2}\}^2} = \sqrt{a^2 + \{af'(a)\}^2} = a\sqrt{1 + \{f'(a)\}^2} = a\ell'(a) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{a^3}{3} + a^2 + \frac{5}{3} = \ell(a) = a\ell'(a) = a(a^2 + 2a) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{3}(2a^3 + 3a^2 - 5) = \frac{1}{3}(a-1)(2a^2 + 5a + 5) = 0 \text{를 얻고,}$$

$a=1$ 이다.

$$\text{그런데 } \ell(1) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 3 = \sqrt{1 + \{f(1) + \sqrt{2}\}^2} \text{ 이므로}$$

$f(1) = \sqrt{2}$ 이고 접점은  $(1, \sqrt{2})$ 이다.

[별해] 다음과 같이 보다 직접적인 계산으로  $a=1$ 을 얻을 수도 있다:

$$\ell'(a) = \sqrt{1 + \{f'(a)\}^2} = a^2 + 2a \text{ 이므로}$$

$$\{f'(a)\}^2 = (a^2 + 2a)^2 - 1 = (a+1)^2(a^2 + 2a - 1) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f'(a) = (1+a)\sqrt{a^2 + 2a - 1} \text{ 이고,}$$

$$\{\ell(a)\}^2 = a^2 + \{f(a) + \sqrt{2}\}^2 = a^2 + \{af'(a)\}^2 = a^2 + \{a(1+a)\sqrt{a^2 + 2a - 1}\}^2 \text{ 이다.}$$

$$\text{또한 주어진 } \ell(a) = \frac{a^3}{3} + a^2 + \frac{5}{3} \text{ 으로부터 } \{\ell(a)\}^2 = \left(\frac{a^3}{3} + a^2 + \frac{5}{3}\right)^2 \text{ 을 얻는다.}$$

$$\text{따라서 } a^2 + \{a(1+a)\sqrt{a^2 + 2a - 1}\}^2 = \left(\frac{a^3}{3} + a^2 + \frac{5}{3}\right)^2 \text{ 이다.}$$

$$h(a) = a^2 + \{a(1+a)\sqrt{a^2 + 2a - 1}\}^2 - \left(\frac{a^3}{3} + a^2 + \frac{5}{3}\right)^2 \text{ 이라 하면}$$

$$h(a) = \frac{1}{9}(a-1)(8a^5 + 38a^4 + 65a^3 + 55a^2 + 25a + 25) \text{ 이고, } a > 0 \text{ 이므로 } h(a) = 0 \text{ 인 } a \text{ 는}$$

$a=1$  뿐이다.

$$\text{그런데 } \ell(1) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 3 = \sqrt{1 + \{f(1) + \sqrt{2}\}^2} \text{ 이므로}$$

$f(1) = \sqrt{2}$ 이고 접점은  $(1, \sqrt{2})$ 이다.

(3-3) ( $1 \leq x \leq 2$ 인 경우)

$$\ell'(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = x^2 + 2x \text{이므로}$$

$\{f'(x)\}^2 = (x^2 + 2x)^2 - 1 = (x+1)^2(x^2 + 2x - 1)$ 이다. 그런데  $f'(x) > 0$ 이므로

$$f'(x) = (1+x) \sqrt{x^2 + 2x - 1} \text{이다.}$$

$f'(x)$ 를 적분하여  $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)^{3/2} + C$ 를 얻는다.

그런데  $f(1) = \sqrt{2}$ 이므로  $C = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이다.

( $0 \leq x \leq 1$ 인 경우)

$$\ell(x) = \sqrt{x^2 + \{f(x) + \sqrt{2}\}^2} = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{5}{3} \text{이다. 따라서}$$

$$\{f(x) + \sqrt{2}\}^2 = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{5}{3}\right)^2 - x^2 \text{인데 } f(x) > 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \left\{ \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{5}{3}\right)^2 - x^2 \right\}^{1/2} - \sqrt{2} \text{이다.}$$

정리하면  $f(x)$ 는 다음과 같고 문제의 조건을 모두 만족시킨다.

$$f(x) = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{5}{3}\right)^2 - x^2 \right\}^{1/2} - \sqrt{2} & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)^{3/2} + \frac{\sqrt{2}}{3} & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

## ■ 교사자문단 의견

<b>1. 교육과정 내 문항 및 제시문 검토사항</b>
<p>3번 문항 및 제시문에 사용된 교육과정 출제근거는 다음과 같다.</p> <p>[12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.</p> <p>[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</p> <p>주어진 문항 및 제시문은 미적분 교과에서 출제되었으며 곡선의 길이를 구할 수 있는가와 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가를 평가하는 문항으로 고등학교 교육과정 내에서 출제 되었음.</p>
<b>2. 교육과정 내 출제 의도 검토사항</b>
<p>3번 문항은 곡선의 길이를 구할 수 있는가와 주어진 조건을 만족하는 함수를 정의할 수 있는가를 묻고 있으며 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제 되었음.</p>
<b>3. 교육과정 내 문항 해설 검토사항</b>
<p>주어진 문항 해설은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학언어와 수학기호를 사용하였음.</p>
<b>4. 교육과정 내 채점 기준 검토사항</b>
<p>제시된 채점 기준은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학 언어와 수학 기호를 사용하였으며 각 문항별 난이도에 맞게 점수 배점이 되었음. 각 문항별로 학생들의 수학 수준을 평가하기 적절하게 부분점수 배점하여 변별력이 있음.</p>
<b>5. 교육과정 내 예시 답안 검토사항</b>
<p>제시된 모범답안은 고등학교 교육과정에서 사용하는 수학 언어와 수학 기호를 사용하여 나타내었으며 학생들이 이해하기 쉽게 풀이를 제시하였음. 별해(다른풀이)를 제시하여 풀이의 이해를 높임.</p>
<b>6. 예상 난이도 및 총평</b>
<p>각 문항별 예상난이도는 다음과 같다.</p> <p>(3-1) 상, (3-2) 상, (3-3) 상</p> <p>제시문에서 가장 짧은 곡선이 변곡점 이전에는 직선의 거리가 되며, 변곡점 이후에는 변곡점까지 직선이고 그 이후 곡선의 길이를 따라가야 함을 찾아낼 수 있는 것이 문제풀이의 핵심 아이디어이다. (3-1) 문항이 어렵기에 전체적인 난이도는 상으로 판단되며 (3-1) 문항을 해결한다면 연결문제인 (3-2), (3-3) 풀이를 잘 해낼 것으로 생각됨. 학생들의 문제해결력과 창의력을 평가하기에 적절한 문항으로 고등학교 교육과정 수준 내에서 출제되었음.</p>