

7. 대학별고사 논술전형 문항(문항카드)

1) 자연계열 I

[서울시립대학교 문항정보 1]

<표 VI-1 서울시립대학교 문항정보 1>

1. 일반 정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2022학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I (공과대학)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수해II
	핵심개념 및 용어	함수의 최댓값
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (총 85점)

좌표평면에서 곡선 $y = x - x^2$ 의 네 점 $O(0, 0)$, $A(a, a - a^2)$, $B(b, b - b^2)$, $C(1, 0)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, $0 < b < a < 1$ 이다.)

(a) 점 B 가 곡선에서 두 점 O 와 A 사이를 움직일 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최댓값을 a 에 대한 식으로 나타내어라. (25점)

(b) 두 점 A , B 가 곡선에서 두 점 O 와 C 사이를 움직일 때, 사각형 $ABOC$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (60점)

3. 출제 의도

본 문항은 꼭짓점이 곡선에 있는 다각형의 넓이를 구하고, 다항함수의 미분법을 이용하여 넓이의 최댓값을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수해II - (2)미분 - ③도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	[12수학Ⅱ 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수해II	고성은 외 6명	좋은책 신사고	2018	83-86
	수해II	권오남 외 14명	교학사	2018	88-95
기타					

5. 문항 해설

좌표평면에서 다각형의 넓이를 다항함수로 표현하고, 미분을 이용하여 그 최댓값을 구할 수 있는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
(a)	주어진 삼각형의 조건을 이해하고 삼각형의 넓이를 이차함수로 나타내어 최댓값을 구한다.	25
(b)	주어진 사각형의 조건을 이해하고 사각형의 넓이를 삼차함수로 나타내어 최댓값을 구한다.	60

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

[예시답안]

삼각형 OAB, 삼각형 AOC, 사각형 ABOC의 넓이를 차례로 S_1 , S_2 , S_3 이라 하자.

이때 $S_1 = \frac{ab(a-b)}{2}$, $S_2 = \frac{a-a^2}{2}$, $S_3 = S_1 + S_2$ 이다.

(a) $S_1 = \frac{ab(a-b)}{2} = -\frac{a}{2}\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^3}{8}$ 이므로 S_1 의 최댓값은 $\frac{a^3}{8}$ 이다.

(b) $S_3 = S_1 + S_2$, $S_1 \leq \frac{a^3}{8}$, $S_2 = \frac{a-a^2}{2}$ 이므로 $S_3 \leq \frac{a^3}{8} + \frac{a-a^2}{2} = \frac{a^3 - 4a^2 + 4a}{8}$ 이다.

$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{8}$ 라 하면 $f'(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{8} = \frac{(3x-2)(x-2)}{8}$ 이다.

x	(0)	...	$\frac{2}{3}$...	(1)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{4}{27}$	↘	

그러므로 열린구간 $(0, 1)$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{4}{27}$ 이다. $S_3 \leq \frac{4}{27}$ 이고, $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ 일 때 $S_3 = \frac{4}{27}$ 이

므로, S_3 의 최댓값은 $\frac{4}{27}$ 이다.

[서울시립대학교 문항정보 2]

<표 VI-2 서울시립대학교 문항정보 2>

1. 일반 정보		
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	2022학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I (공과대학)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	조건부확률
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (총 95점)

한 개의 주사위를 6번 던질 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않을 확률을 기약분수로 나타내어라. (45점)

(b) 적어도 한 번은 2 이하의 눈이 나왔을 때, 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않을 확률을 기약분수로 나타내어라. (50점)

3. 출제 의도

본 문항은 독립시행의 확률과 조건부확률을 이해하고, 구체적인 상황에 적용하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	[12확통02-05]조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-07]확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	권오남 외 11명	(주)교학사	2019	62-65 67-70
	확률과 통계	홍성복 외 10명	(주)지학사	2019	63-66 67-71
기타					

5. 문항 해설

독립시행의 확률을 적용하여 주어진 사건이 발생할 확률을 구하고, 서로 종속인 두 사건 중에서 한 사건이 발생했을 때 나머지 한 사건이 발생할 조건부확률을 계산하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
(a)	주어진 사건이 독립시행임을 이해하고, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 계산할 수 있다.	45
(b)	조건부 확률을 계산할 수 있다.	50

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

[예시답안]

(a) 주사위를 한 번 던졌을 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이며, 주사위를 여러 번 던졌을 때, 매번 3의 배수의 눈이 나오는 사건은 서로 독립이다. 3의 배수가 연속해서 나오지 않을 확률은 다음과 같다.

(i) 3의 배수가 한 번도 나오지 않을 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$ 이다.

(ii) 3의 배수가 한 번 나올 확률은 ${}_6C_1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{192}{729}$ 이다.

(iii) 3의 배수가 두 번 나오고, 3의 배수가 연속해서 나오지 않을 확률은 ${}_5C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{160}{729}$ 이다.

(iv) 3의 배수가 세 번 나오고, 3의 배수가 연속해서 나오지 않을 확률은 ${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{729}$ 이다.

(i)~(iv)에 의해서 구하는 확률은 $\frac{64 + 192 + 160 + 32}{729} = \frac{448}{729}$ 이다.

(b) 주사위를 6번 던졌을 때, 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않는 사건을 A , 적어도 한 번은 2 이하의 눈이 나오는 사건을 B 라고 하자. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$ 이므로,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B^C)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(B^C)P(A|B^C)}{P(B)}$$

이다. 또한,

$$P(B^C) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}, \quad P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{665}{729}$$

이다. $P(A|B^C)$ 는 나온 눈의 개수가 모두 3 이상일 때, 3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않을 확률과 같다. 나온 눈의 개수가 모두 3 이상일 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로, (a)와 같은 방법으로

$$P(A|B^C) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_5C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{21}{64}$$

이다. 따라서

$$P(A|B) = \frac{\frac{448}{729} - \frac{64}{729} \times \frac{21}{64}}{\frac{665}{729}} = \frac{427}{665} = \frac{61}{95} \text{이다.}$$

[서울시립대학교 문항정보 3]

<표 VI-3 서울시립대학교 문항정보 3>

1. 일반 정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2022학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I (공과대학)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	정적분
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] (105점)

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |3\sqrt{2} \sin^3 x - \cos x| dx$$

3. 출제 의도

본 문항은 적분 구간을 적절하게 나누어 삼각함수의 정적분을 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2019	143
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	139
기타					

5. 문항 해설

삼각함수의 정적분에 대해 적분 구간을 적절하게 나누고, 삼각함수의 공식을 이용하여 적분값을 계산하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
	적분구간을 적절하게 나눌 수 있다.	35
	정적분 값을 정확하게 계산할 수 있다.	70

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

[예시답안]

$f(x) = 3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x$ 라 하자. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ 일 때, $\sin x \leq 0$, $\cos x \geq 0$ 이므로 $f(x) \leq 0$ 이다. 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 함수 $g(x) = 3\sqrt{2}\sin^3 x$ 는 증가함수이고, 함수 $h(x) = \cos x$ 는 감소함수이다. $f(x) = g(x) - h(x)$ 는 연속인 증가함수이고, $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sqrt{2} > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x) = 0$ 은 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 유일한 해를 갖는다. 이 해를 a 라 하자. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq a$ 이면 $f(x) \leq 0$ 이고 $a \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 이면 $f(x) \geq 0$ 이다. 또한

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2}\sin^3 a &= \cos a, \quad 18\sin^6 a = \cos^2 a = 1 - \sin^2 a, \\ 18\sin^6 a + \sin^2 a - 1 &= (3\sin^2 a - 1)(6\sin^4 a + 2\sin^2 a + 1) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $3\sin^2 a = 1$, $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이고 $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x = \sin x - \cos^2 x \sin x \quad \text{이므로}$$

$$\int (3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x) dx = \int 3\sqrt{2}\sin x dx - \int 3\sqrt{2}\cos^2 x \sin x dx - \int \cos x dx = -3\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\cos^3 x - \sin x + C$$

이다. $F(x) = \sqrt{2}\cos^3 x - 3\sqrt{2}\cos x - \sin x$ 라 하자. 이때 $F'(x) = f(x)$ 이고 $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ 이며,

$$F(a) = \sqrt{2}\cos^3 a - 3\sqrt{2}\cos a - \sin a = \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} - 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{17\sqrt{3}}{9}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x| dx &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^a f(x) dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ &= -F(a) + F\left(-\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(a) \\ &= \frac{34\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

이다.

[서울시립대학교 문항정보 4]

<표 VI-4 서울시립대학교 문항정보 4>

1. 일반 정보		
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	2022학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I (공과대학)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수해
	핵심개념 및 용어	수학적 귀납법
예상 소요 시간	35분	

2. 문항 및 제시문

[문제 4] (115점)

수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의가

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{2}{\sqrt{a_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$4 < a_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

3. 출제 의도

본 문항은 수열의 귀납적 정의를 이해하고, 수열과 관계된 성질을 파악하는 능력과 수학적 귀납법을 이용하여 간단한 명제를 증명하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[수해] - (3)수열 - ㉓ 수학적귀납법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	[12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수해	홍성복 외 10인	지학사	2018	148-159
	수해	배중숙 외 6인	금성출판사	2018	152-161
기타					

5. 문항 해설

귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하는 능력과 이 수열에 대한 간단한 부등식을 수학적 귀납법으로 증명하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
	귀납적으로 정의된 수열의 성질을 이해하여 증명에 필요한 부등식을 유도한다.	70
	수학적 귀납법을 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있다.	45

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

[예시답안]

$a_{n+1} - 4 = \frac{3}{4}(a_n - 4) + \frac{2}{\sqrt{a_n}} - 1$ 이다. 양수 a 에 대하여

$$1 - \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)} = \frac{a-4}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}$$

이므로, $a > 4$ 일 때

$$0 < 1 - \frac{2}{\sqrt{a}} < \frac{a-4}{8}$$

이다. 따라서 $a > 4$ 일 때

$$(a-4)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}(a-4) - \frac{1}{8}(a-4) < \frac{3}{4}(a-4) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{a}}\right) < \frac{3}{4}(a-4)$$

이므로

$$0 < \frac{3}{4}(a-4) + \frac{2}{\sqrt{a}} - 1 < \frac{3}{4}(a-4) \dots\dots ①$$

이다.

모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n - 4 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이 성립함을 보이면 된다. 이를 수학적 귀납법을 이용해서 보이자.

$n = 1$ 일 때, $0 < 5 - 4 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ 이므로 성립한다.

$n = k$ 일 때, 성립한다고 가정하면

$$0 < a_k - 4 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \dots\dots ②$$

이므로 $a_k > 4$ 이다.

①, ②에 의해

$$0 < a_{k+1} - 4 = \frac{3}{4}(a_k - 4) + \frac{2}{\sqrt{a_k}} - 1 < \frac{3}{4}(a_k - 4) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

이다. 따라서 $n = k+1$ 일 때도 성립하므로 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n - 4 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이 성립한다.

2) 자연계열Ⅱ

[서울시립대학교 문항정보 5]

<표 VI-5 서울시립대학교 문항정보 5>

1. 일반 정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2022학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅱ(자연과학대학, 도시과학대학 자연계열)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	중복순열
예상 소요 시간	25분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (85점)

어느 김밥집에서 파는 김밥의 종류는 4가지다. 이 김밥집에서 서울이와 시립이가 다음을 모두 만족시키도록 김밥을 사는 경우의 수를 구하여라. (단, 모든 종류의 김밥은 충분하다.)

- (1) 서울이와 시립이는 각각 김밥 5줄을 산다.
 (2) 서울이가 산 김밥의 종류와 시립이가 산 김밥의 종류는 겹치지 않는다.

3. 출제 의도

본 문항은 실생활 문제를 중복조합을 적용하여 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ② 순열과 조합
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	권오남 외 11명	(주)교학사	2019	19-21
	확률과 통계	홍성복 외 10명	(주)지학사	2019	19-23
기타					

5. 문항 해설

실생활 문제에 중복조합을 적용할 수 있는 경우로 나누는 능력과 이를 이용하여 경우의 수를 구하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 문제를 중복조합을 적용할 수 있는 경우들로 나눈다.	25
	중복조합을 적용하여 경우의 수를 계산할 수 있다.	60

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

[예시답안]

서울이가 산 김밥의 종류의 가짓수에 따라 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) 서울이가 1종류의 김밥을 샀을 때, 김밥의 종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$ 이고, 선택한 1종류의 김밥에서 5줄을 사는 경우의 수는 1이다. 시럽이가 나머지 3종류의 김밥에서 5줄을 사는 경우의 수는 ${}_3H_5$ 이다. 이러한 경우의 수는 ${}_4C_1 \times 1 \times {}_3H_5 = {}_4C_1 \times 1 \times {}_7C_5 = 84$ 이다.

(ii) 서울이가 2종류의 김밥을 샀을 때, 김밥의 종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$ 이고, 선택한 2종류의 김밥에서 5줄의 김밥을 사는 경우의 수는 ${}_2H_3$ 이다. 시럽이가 나머지 2종류의 김밥에서 5줄을 사는 경우의 수는 ${}_2H_5$ 이다. 이러한 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2H_3 \times {}_2H_5 = {}_4C_2 \times {}_4C_3 \times {}_6C_5 = 144$ 이다.

(iii) 서울이가 3종류의 김밥을 샀을 때, 김밥의 종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3$ 이고, 선택한 3종류의 김밥에서 5줄의 김밥을 사는 경우의 수는 ${}_3H_2$ 이다. 시럽이가 나머지 1종류의 김밥에서 5줄을 사는 경우의 수는 1이다. 이러한 경우의 수는 ${}_4C_3 \times {}_3H_2 \times 1 = {}_4C_3 \times {}_4C_2 \times 1 = 24$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 경우의 수는 $84 + 144 + 24 = 252$ 이다.

[서울시립대학교 문항정보 6]

<표 VI-6 서울시립대학교 문항정보 6>

1. 일반 정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2022학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(자연과학대학, 도시과학대학 자연계열)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수해II
	핵심개념 및 용어	사잇값 정리
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (95점)

함수

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 11 & (x \leq -2) \\ \frac{5}{2}x - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 11 & (x > -2) \end{cases}$$

의 역함수의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{5}x - 1$ 의 모든 교점의 y 좌표의 합을 a 라 할 때, a 의 정수 부분을 구하여라.

3. 출제 의도

본 문항은 두 함수의 교점을 구하는 방법에 대한 이해와 사잇값 정리를 이용하여 방정식의 근의 범위를 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[수해II]-(1)함수의 극한과 연속-[2]함수의 연속
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	[12수학 II 01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수해II	박교식 외 19명	동아출판	2018	40-44
	수해II	권오남 외 14명	교학사	2018	40-41
기타					

5. 문항 해설

역함수의 기하학적인 성질을 이해하는 능력과 사잇값의 정리를 이용하여 방정식의 근의 범위를 구하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
	두 함수의 그래프의 교점의 y 좌표는 두 함수의 역함수 그래프의 교점의 x 좌표와 같다는 것을 파악하여 필요한 방정식을 찾는다.	30
	사잇값의 정리를 이용하여 근의 범위를 구한다.	65

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

[예시답안]

함수 $y = \frac{1}{5}x - 1$ 의 역함수는 $y = 5x + 5$ 이다. 그러므로 구하는 교점의 y 좌표는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 5x + 5$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

(i) $x \leq -2$ 일 때

$x^3 - 2x + 11 = 5x + 5$ 를 정리하면 $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ 이다. 그러므로 $x \leq -2$ 일 때의 근은 -3 뿐이다.

(ii) $x > -2$ 일 때

$\frac{5}{2}x - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 11 = 5x + 5$ 를 정리하면 $\frac{5}{2}x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 6 = 0$ 이다.

$h(x) = \frac{5}{2}x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 6$ 이라 하자. $h'(x) = \frac{5}{2} - \frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \geq \frac{5}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{15-4\pi}{6} > 0$ 이므로 $h(x)$ 는 증가함수이다. 따라서 방정식 $h(x) = 0$ 의 근의 개수는 0 또는 1이다. $h(x)$ 는 연속함수이고, $h(3) = -\frac{1}{2} < 0$ 이고 $h(4) = 3 > 0$ 이므로, 사잇값 정리에 의해 주어진 방정식은 열린구간 $(3, 4)$ 에서 오직 1개의 근을 갖는다.

(i), (ii)에 의해 a 의 정수 부분은 0이다.

[서울시립대학교 문항정보 7]

<표 VI-7 서울시립대학교 문항정보 7>

1. 일반 정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2022학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(자연과학대학, 도시과학대학 자연계열)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	수열
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] (105점)

자연수 n 에 대하여 다음을 모두 만족시키는 두 자연수 k, m 의 순서쌍 (k, m) 의 개수를

a_n 이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^p a_n \leq 2022$ 를 만족시키는 자연수 p 의 최댓값을 구하여라.

- (1) $k^2 m^3 = 2^{9n}$
 (2) $m \leq 8^n \leq m^2$

3. 출제 의도

본 문항은 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하고, 수열의 합의 성질을 이용해서 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (3)수열 - ① 등차수열과 등비수열, ② 수열의 합
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	[12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학 I 03-04] Σ 의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	최부림 외 8명	천재교육	2018	124-130 142-145
	수학	박교식 외 19명	동아출판	2018	107-114 126-129
기타					

5. 문항 해설

문제의 조건을 이해하고, 자연수 n 에 따라 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수와 그것의 합을 구하는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
	조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한다.	70
	수열의 합의 성질을 이용하여 p 의 최댓값을 구한다.	35

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

[예시답안]

조건 (1)에 의해서 자연수 k, m 은 적당한 음이 아닌 두 정수 s, t 에 대하여 $k = 2^s, m = 2^t$ 이다. 조건 (1)

로부터 $2s = 9n - 3t$ 이므로, $0 \leq s \leq \frac{9n}{2}$ 이고

$\frac{s}{3}$ 는 음이 아닌 정수이다. ①

조건 (2)에서 $m^3 \leq 2^{9n} \leq m^6$ 이고, 이 부등식에 $m^3 = \frac{2^{9n}}{k^2}$ 와 $k = 2^s$ 를 대입하여 정리하면

$0 \leq s \leq \frac{9n}{4}$ ②

이다. ①과 ②로부터 a_n 은 닫힌구간 $\left[0, \frac{3n}{4}\right]$ 에 속하는 정수의 개수이다. 자연수 q 에 대해서

(i) $n = 4q - 3$ 일 때, $a_n = 3q - 2$,

(ii) $n = 4q - 2$ 일 때, $a_n = 3q - 1$,

(iii) $n = 4q - 1$ 일 때, $a_n = 3q$,

(iv) $n = 4q$ 일 때, $a_n = 3q + 1$ 이다.

따라서 자연수 N 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{4N} a_n = \sum_{q=1}^N (a_{4q-3} + a_{4q-2} + a_{4q-1} + a_{4q}) = \sum_{q=1}^N (12q - 2) = 6N^2 + 4N$$

이다. $N = 18$ 일 때 $\sum_{n=1}^{72} a_n = 6 \times 18^2 + 4 \times 18 = 2016$ 이고, $\sum_{n=1}^{73} a_n = \sum_{n=1}^{72} a_n + a_{73} = 2071$ 이므로 $p = 72$ 이다.

[서울시립대학교 문항정보 8]

<표 VI-8 서울시립대학교 문항정보 8>

1. 일반 정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2022학년도 서울시립대학교 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(자연과학대학, 도시과학대학 자연계열)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 최댓값과 최솟값
예상 소요 시간	35분	

2. 문항 및 제시문

[문제 4] (총 115점)

다음 물음에 답하여라.

- (a) 상수 a 에 대하여 방정식 $x^3 - 6x^2 + a = 0$ 의 한 근이 t 일 때, 나머지 두 근을 t 에 대한 식으로 나타내어라. (25점)
- (b) 좌표평면에서 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, D는 곡선 $y = -x^3 + 6x^2$ 에 있는 제1사분면의 점이고, 두 꼭짓점 B, C는 x 축에 있다. 직사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때, 변 AB의 길이를 구하여라. (90점)

3. 출제 의도

본 문항은 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 최댓값을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[미적분]-(2)미분법-② 여러 가지 미분법, ③도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	81-84, 104-108
	미적분	류희찬 외 9명	천재교과서	2019	103-107, 128-133
기타					

5. 문항 해설

한 근이 주어진 삼차방정식의 나머지 두 근을 구하고, 미분을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는 능력을 확인하는 문제이다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
(a)	한 근이 주어진 삼차방정식의 나머지 두 근을 구한다.	25
(b)	구하고자 하는 넓이를 한 변수에 대한 식으로 정리하고, 미분을 이용하여 값을 구한다.	90

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

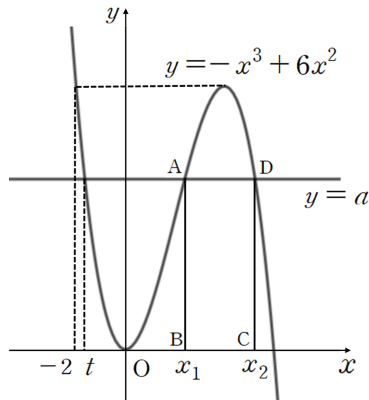
7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

[예시답안]

(a) t 가 방정식 $x^3 - 6x^2 + a = 0$ 의 근이므로 $t^3 - 6t^2 + a = 0$, $a = 6t^2 - t^3$ 이다. 따라서

$$x^3 - 6x^2 + a = x^3 - 6x^2 + 6t^2 - t^3 = (x-t)\{x^2 - (6-t)x + t^2 - 6t\} = 0$$

이므로 나머지 두 근은 $\frac{6-t \pm \sqrt{(6-t)^2 - 4(t^2 - 6t)}}{2} = \frac{6-t \pm \sqrt{-3t^2 + 12t + 36}}{2}$ 이다.



(b) $B(x_1, 0)$, $C(x_2, 0)$, $\overline{AB} = a$ 라 하자. x_1, x_2 는 방정식 $-x^3 + 6x^2 = a$ 의 해이다. 방정식 $-x^3 + 6x^2 = a$ 의 x_1, x_2 가 아닌 다른 해를 t 라 하자. $-2 < t < 0$ 이고 (a)에 의해

$$x_1 = \frac{6-t - \sqrt{-3t^2 + 12t + 36}}{2}, \quad x_2 = \frac{6-t + \sqrt{-3t^2 + 12t + 36}}{2}$$

이므로 직사각형 ABCD의 넓이는 $a(x_2 - x_1) = (-t^3 + 6t^2)\sqrt{-3t^2 + 12t + 36}$ 이다.

$f(x) = (-x^3 + 6x^2)\sqrt{-3x^2 + 12x + 36}$, $g(x) = \ln|f(x)| = 2\ln|x| + \ln|x-6| + \frac{1}{2}\ln|3x^2 - 12x - 36|$ 라 하자.

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-6} + \frac{6x-12}{2(3x^2-12x-36)} = \frac{4(x^2-2x-6)}{x(x-6)(x+2)}$$

이고 방정식 $x^2 - 2x - 6 = 0$ 의 근 중에서 $-2 < x < 0$ 인 것은 $x = 1 - \sqrt{7}$ 이다.

x	(-2)	\dots	$1 - \sqrt{7}$	\dots	(0)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		\nearrow	극대	\searrow	

따라서 $t = 1 - \sqrt{7}$ 에서 직사각형 ABCD는 최대 넓이를 갖고, 이때 변 AB의 길이는 $-(1 - \sqrt{7})^3 + 6(1 - \sqrt{7})^2 = 26 - 2\sqrt{7}$ 이다.