라. 문항카드4

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 공통문항 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심 개념 및 용어	미정계수법, 항등식, 판별식
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【공통문항 1】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

> 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 다음 식이 성립한다.
>
> $$f(x) = g(x)\,Q(x) + R(x)$$
>
> 이때 $R(x)$는 상수이거나 $R(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 낮다.

다항식 $f(x)$를 $x^2 - x + 1$로 나누었을 때의 나머지는 $(k+1)x - k + 1$이고, $x^2 + x + 1$로 나누었을 때의 나머지는 $(-k+1)x - k + 1$일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, k는 0이 아닌 실수)

[1-1] 다항식 $f(x)$를 $x^3 + 1$로 나누었을 때의 나머지를 $x^2 + ax - 1$이라 할 때, 실수 a, k의 값을 각각 구하시오. (10점)

[1-2] 다항식 $f(x)$를 $x^4 + x^2 + 1$로 나누었을 때의 나머지를 $g(x)$라 할 때, k의 값에 관계없이 함수 $y = g(x)$의 그래프와 항상 접하는 직선의 방정식을 구하시오. (25점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 주어진 조건을 통해 다항식 $f(x)$를 나눗셈정리를 이용하여 다항식으로 나누었을 때의 나머지를 구하고 이 나머지의 특징을 찾을 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 다항식 $f(x)$를 다항식으로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문항이다.

[1-2] 다항식 $f(x)$를 다항식으로 나누었을 때의 나머지 $g(x)$를 구하고 함수 $y = g(x)$의 접선을 구하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{1}$ 다항식의 연산 [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (나) 나머지정리 [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다, (상) 다항식의 사칙연산에 대한 성질을 이용하여 연산을 하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
[1-1]	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{2}$ 나머지정리 [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (나) 나머지정리 [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. (상) 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있고 그 과정을 설명할 수 있다.
[1-2]	적용교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{2}$ 나머지정리 [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-10]이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해한다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (1) 문자와 식 - (나) 나머지정리 [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. (상) 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있고 그 과정을 설명할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수 [10수학01-10]이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해한다. (상) 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판	2018	16-18, 59-63
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	18-24, 64-67
	수학	김원경 외	비상교육	2018	16-26, 59-62

5. 문항 해설

본 문항은 다항식 $f(x)$를 다항식으로 나누었을 때의 나머지가 주어졌을 때, 새로운 다항식으로 나누었을 때의 나머지를 항등식과 미정계수법을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하고, 나머지가 상수 k를 포함하는 이차식일 때, k의 값에 관계없이 항상 접하는 직선을 판별식을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f(x)$ 와 x^2+ax-1 를 x^2-x+1 로 나누었을 때 나머지가 같다는 것을 안다.	3
	x^2+ax-1 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지를 식으로 표현할 수 있다.	3
	a 와 k 를 구할 수 있다.	4
[1-2]	$f(x)$ 와 $g(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때 나머지가 같다는 것과 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누었을 때 나머지가 같다는 것을 안다.	3
	$g(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지를 식으로 표현할 수 있다.	3
	$g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누었을 때의 나머지를 식으로 표현할 수 있다.	3
	$g(x)$ 를 구할 수 있다.	8
	k 의 값에 관계없이 $g(x)$ 의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	8

7. 예시 답안

[1-1]

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 이므로

$f(x)$ 와 x^2+ax-1 을 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지가 서로 같다.

$x^2+ax-1=(x^2-x+1)+(a+1)x-2$ 이므로

$a+1=k+1$, $-2=-k+1$

이고 연립해서 풀면

$k=3$, $a=3$ 이다.

[1-1 별해]

w 을 $x^2-x+1=0$ 의 근이라 할 때, $w^2=w-1$ 이다.

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 이므로

$(k+1)w-k+1=f(w)=w^2+aw-1=(a+1)w-2$ 이다.

w 가 허수이므로

$a+1=k+1$, $-2=-k+1$

이고 연립해 풀면

$k=3$, $a=3$ 이다.

[1-2]

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라 두자.

$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

이므로

$f(x)$ 와 $g(x)$ 를 x^2-x+1, x^2+x+1 로 각각 나누었을 때의 나머지가 서로 같다.

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^2-x+1)(ax+a+b)+(b+c)x-a-b+d \\ &= (x^2+x+1)(ax-a+b)+(-b+c)x+a-b+d \end{aligned}$$

이므로 $b+c=k+1$, $-b+c=-k+1$, $-a-b+d=-k+1$, $a-b+d=-k+1$ 이다.

연립해서 풀면 $a=0$, $b=k$, $c=1$, $d=1$ 이 되어 $g(x)=kx^2+x+1$ 이다.

접선의 방정식을 $y=Ax+B$ 라 두면 접점의 x 좌표는 $kx^2+x+1=Ax+B$

즉, $kx^2+(1-A)x+1-B=0$ 를 만족한다.

이때, 판별식은 $(1-A)^2-4k(1-B)=0$ 이다. 따라서 $A=1$, $B=1$ 일 때, k 의 값에 관계없이 항상 접한다.

그러므로 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y=x+1$ 이다.

[별해 ($g(x)$ 구하는 다른 방법)]

$g(x)$ 구하는 다른 방법

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라 두자.

w 을 $x^2-x+1=0$ 의 근 w' 을 $x^2+x+1=0$ 의 근이라 할 때

$w^2=w-1$, $(w')^2=-w'-1$ 이다.

한편, w 는 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$의 근이고, w' 는 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$ 의 근이므로

$w^3=-1$, $(w')^3=1$ 이다.

$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ 이므로

$(k+1)w-k+1=f(w)=g(w)=aw^3+bw^2+cw+d=(b+c)w-a-b+d$

$(-k+1)w'-k+1=f(w')=g(w')=a(w')^3+b(w')^2+cw'+d=(-b+c)w'+a-b+d$

이고, w , w' 이 허수이므로

$b+c=k+1$, $-b+c=-k+1$, $-a-b+d=-k+1$, $a-b+d=-k+1$ 이다.

연립해서 풀면 $a=0$, $b=k$, $c=1$, $d=1$ 이 되어 $g(x)=kx^2+x+1$ 이다.

마. 문항카드5

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 공통문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ
	핵심 개념 및 용어	도형의 평행이동, 정적분, 두 곡선 사이의 넓이
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【공통문항 2】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 방정식 $f(x,y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

$$f(x-a,\, y-b)=0$$

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

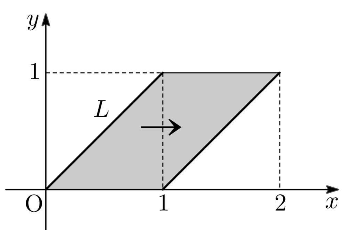
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

양수 a에 대하여 함수 $y=-\dfrac{1}{a}x^2+a\ (-a\le x\le a)$의 그래프가 나타내는 곡선을 C라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[2-1] 곡선 C를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{a}$만큼 평행이동한 곡선을 C'라 하자. a의 값에 따른 두 곡선 C와 C'의 교점의 좌표를 구하시오. (10점)

[2-2] 곡선 C를 x축의 양의 방향으로 평행하게 $\dfrac{1}{a}$만큼 움직이는 동안 이 곡선이 지나간 영역의 넓이를 구하시오. (25점)

(참고)
$y=x\ (0\le x\le 1)$의 그래프가 나타내는 도형 L을 x축의 양의 방향으로 평행하게 1만큼 움직이는 동안 이 도형 L이 지나간 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.



3. 출제 의도

본 문항에서는 제한된 범위에서 정의된 이차함수의 그래프를 나타내고, 도형의 평행이동에 따른 두 곡선의 위치관계를 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한 곡선의 위치관계에 따른 두 그래프 사이의 영역의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 제한된 범위에서 나타낸 그래프의 곡선과 이 도형을 주어진 조건에 의해 평행이동한 곡선에 대하여 두 곡선의 위치관계를 파악하여 교점을 찾을 수 있는지를 판단하는 문항이다.

[2-2] a의 범위에 따라 곡선이 지나간 영역의 모양을 파악하고, 두 곡선의 위치관계에 따른 두 그래프 사이의 영역의 넓이를 구할 수 있는지를 판단하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td colspan="2">적용교육과정</td><td>교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”</td></tr>
<tr><td colspan="2">문항 및 제시문</td><td>학습내용 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문 (가)</td><td>적용교육과정</td><td>[수학] - (2) 기하 - ④ 도형의 이동
[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·평가기준</td><td>[수학] - (2) 기하 - (라) 도형의 이동
[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.
(상) 평행이동한 도형의 방정식을 구하고 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문 (나)</td><td>적용교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용
[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·평가기준</td><td>[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (다) 정적분의 활용
[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
(상) 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">[2-1]</td><td>적용교육과정</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수
[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
[수학] - (2) 기하 - ④ 도형의 이동
[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·평가기준</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수
[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
(상) 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.
[수학] - (2) 기하 - (라) 도형의 이동
[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.
(상) 평행이동한 도형의 방정식을 구하고 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">[2-2]</td><td>적용교육과정</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수
[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
[수학] - (2) 기하 - ④ 도형의 이동
[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.
[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용
[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·평가기준</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수
[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
(상) 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.
[수학] - (2) 기하 - (라) 도형의 이동
[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.
(상) 평행이동한 도형의 방정식을 구하고 그 과정을 설명할 수 있다.
[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (다) 정적분의 활용
[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
(상) 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2018	75-78, 153-155
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2018	64-67, 146-148
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	136-137
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	144-146

5. 문항 해설

본 문항은 닫힌구간에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프를 평행 이동한 그래프를 구하고, a의 범위에 따른 두 그래프의 교점을 구할 수 있는지를 평가하고, 두 그래프 사이의 영역의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	곡선 C'의 방정식이 $y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a\ \left(-a+\frac{1}{a}\le x\le a+\frac{1}{a}\right)$임을 구할 수 있다.	2
	$0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 교점이 없음을 나타낼 수 있다.	3
	$a\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 교점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2a},a-\frac{1}{4a^3}\right)$임을 구할 수 있다.	5
[2-2]	곡선이 지나간 영역의 넓이를 a의 범위에 따라 두 가지 경우로 나눌 수 있다.	5
	$0<a\le\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 두 곡선의 위치관계를 파악하고, 곡선이 지나간 영역의 넓이 S를 $S=\int_{-a}^{0}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx+\left(a\times\frac{1}{a}\right)+\int_{\frac{1}{a}}^{a+\frac{1}{a}}\left\{-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a\right\}dx$로 나타낼 수 있다.	7
	$0<a\le\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $S=1+\frac{4}{3}a^2$를 구할 수 있다.	3
	$a>\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 두 곡선의 위치관계를 파악하고, 곡선이 지나간 영역의 넓이 S를 $S=1+\frac{4}{3}a^2-\int_{-a+\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2a}}\left\{-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a\right\}dx-\int_{\frac{1}{2a}}^{a}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx$로 나타낼 수 있다.	7
	$a>\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $S=2-\frac{1}{12a^4}$를 구할 수 있다.	3

7. 예시 답안

[2-1]

곡선 C'는 제시문 (가)에 의하여

$$y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a \quad \left(-a+\frac{1}{a}\le x\le a+\frac{1}{a}\right)$$

의 그래프이다.

곡선 C와 C'의 교점은 a의 범위에 따라 다음과 같이 두 가지로 나뉜다.

(i) $\frac{1}{a}>2a$일 때, 즉, $0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 교점은 없다.

(ii) $\frac{1}{a}\le 2a$일 때, 즉, $a\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때,

곡선 C와 C'의 교점의 x좌표를 구하면

$$-\frac{1}{a}x^2+a=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a \text{에서 } x=\frac{1}{2a}$$

이다.

따라서 교점은 $\left(\frac{1}{2a}, a-\frac{1}{4a^3}\right)$이다.

[2-2]

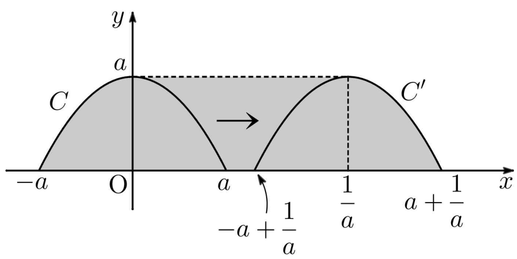
곡선 C가 지나간 영역의 넓이 S는 a의 범위에 따라 다음과 같이 두 가지로 나뉜다.

i) $\frac{1}{a}\ge 2a$일 때, 즉, $0<a\le\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때,

[2-1]에 의하여

곡선 C와 C'의 교점은 $0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 없거나 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$이므로

곡선 C가 지나간 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 영역의 넓이 S는 닫힌구간 $[-a,0]$에서 $y=-\frac{1}{a}x^2+a$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이,

닫힌구간 $\left[0,\frac{1}{a}\right]$에서 $y=a$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와

닫힌구간 $\left[\frac{1}{a},a+\frac{1}{a}\right]$에서 곡선 $y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합이다.

따라서 제시문 (나)에 의하여

$$S=\int_{-a}^{0}\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx+\left(a\times\frac{1}{a}\right)+\int_{\frac{1}{a}}^{a+\frac{1}{a}}\left\{-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+a\right\}dx$$

$$=1+2\int_0^a\left(-\frac{1}{a}x^2+a\right)dx$$

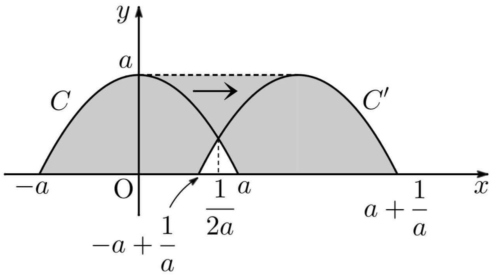
$$=1+2\left(-\frac{a^3}{3a}+a^2\right)=1+\frac{4}{3}a^2$$

이다.

ⅱ) $\dfrac{1}{a} < 2a$일 때, 즉, $a > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$일 때,

[2-1]에 의하여, 곡선 C와 C'의 교점은 $\left(\dfrac{1}{2a}, a - \dfrac{1}{4a^3}\right)$이므로

곡선 C가 지나간 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.



이 영역의 넓이 S는 ⅰ)에서 구한 넓이에서

닫힌구간 $\left[-a+\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{2a}\right]$에서 $y = -\dfrac{1}{a}\left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2 + a$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와

닫힌구간 $\left[\dfrac{1}{2a}, a\right]$에서 $y = -\dfrac{1}{a}x^2 + a$ x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 값이다.

따라서

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{4}{3}a^2 - \int_{-a+\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2a}} \left\{-\frac{1}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + a\right\} dx - \int_{\frac{1}{2a}}^{a} \left(-\frac{1}{a}x^2 + a\right) dx \\ &= 1 + \frac{4}{3}a^2 - 2\int_{\frac{1}{2a}}^{a} \left(-\frac{1}{a}x^2 + a\right) dx \\ &= 1 + \frac{4}{3}a^2 - 2\left[-\frac{1}{3a}x^3 + ax\right]_{\frac{1}{2a}}^{a} \\ &= 1 + \frac{4}{3}a^2 - 2\left(-\frac{a^2}{3} + a^2 + \frac{1}{24a^4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{12a^4} \end{aligned}$$

이다.

바. 문항카드6

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 선택문항 유형1(미적분)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	지수함수와 로그함수의 극한, 지수함수와 로그함수의 미분, 합성함수의 미분법, 사잇값의 정리, 함수의 증가와 감소, 함수의 극대와 극소
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【선택문항 유형1(미적분)】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에서

① $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(다) 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 이 구간에 속하는 c에 대하여 $f'(c) = 0$이고 $x = c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = c$에서 극소이고 극솟값은 $f(c)$이다.

열린구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, α는 실수)

[미적분-1] 열린구간 $(0, \infty)$에서 $f'(x) = f(x)g(x)$인 함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} g(x)$의 값을 구하시오. (5점)

[미적분-2] $\alpha \leq 0$일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가함을 보이고, $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 감소함을 보이시오. (10점)

[미적분-3] $\alpha = \dfrac{1}{3}$일 때, 열린구간 $\left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$에서 함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 개수가 1임을 보이시오. (단, $\ln 2 = 0.7$로 계산한다.) (15점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 로그함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 증가와 감소를 파악하고 그래프의 개형을 그릴 수 있는지와 극값의 존재성을 설명할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[미적분-1] 로그함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분하고 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[미적분-2] 도함수의 부호를 이용하여 함수의 그래프의 증가와 감소를 설명할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[미적분-3] 사잇값 정리를 이용하여 도함수의 부호가 변하는 상태를 파악하고 극소가 유일하게 존재한다는 것을 설명할 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문(가)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분- ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분- (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (중) 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있다.
제시문(나)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 연속함수에 관한 최대.최소 정리와 사잇값 정리를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
제시문(다)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분- ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분- (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (중) 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있다.
[미적분-1]	적용교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[미적분] - (2) 미분법 - (가) 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. (중) 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. (상) 지수함수와 로그함수를 포함하는 함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. (상) 여러 가지 합성함수를 미분할 수 있다.
[미적분-2]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분- ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분- (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (중) 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용

		[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (중) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 증가, 감소, 오목, 볼록을 조사하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다
[미적분-3]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분- ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준· 평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 연속함수에 관한 최대.최소 정리와 사잇값 정리를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분- (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (중) 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (중) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 증가, 감소, 오목, 볼록을 조사하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	배종숙 외	금성출판사	2018	43, 85-90
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2018	40, 88-95
	미적분	김원경 외	비상	2019	55-57, 79-84
	미적분	고성은 외	신사고	2019	49-57, 80-83

5. 문항 해설

본 문항은 로그함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 그래프의 개형을 그리고 극값의 존재성을 설명할 수 있는지를 평가한다. 양변에 자연로그를 취하여 합성함수의 미분법으로 미분하고, α의 값의 범위에 따른 $f(x)$의 그래프의 증가와 감소를 설명할 수 있어야 한다. 또한 $\alpha=\frac{1}{3}$일 때 $f'(x)$의 부호가 $g(x)$의 부호에 의해 결정되므로 사잇값 정리와 $g(x)$의 증가, 감소, 극한값을 바탕으로 $g(x)$ 부호가 음에서 양으로 변하는 순간이 하나밖에 없음을 설명할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	$\ln f(x)=(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 로 변형하여 합성함수 미분법, 곱의 미분법, 몫의 미분법을 적용할 수 있다.	3
	조건에 맞는 함수 $g(x)$ 를 정하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.	2
[미적분-2]	함수 $f'(x)$ 의 부호를 확인할 때 함수 $g(x)$ 의 부호만 확인하면 된다는 사실을 알고, $g'(x)$ 를 구할 수 있다.	2
	$\alpha\le 0$ 일 때 $f'(x)$의 부호를 확인하고 $f(x)$가 증가함을 설명할 수 있다.	4
	$\alpha\ge\frac{1}{2}$ 일 때 $f'(x)$의 부호를 확인하고 $f(x)$가 감소함을 설명할 수 있다.	4
[미적분-3]	$\alpha=\frac{1}{3}$ 일 때 극댓값 $g(1)>0$임을 설명할 수 있다.	3

	$x>1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않음을 판단할 수 있다.	3
	사잇값 정리를 이용하여 열린구간 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 에서 $g(c)=0$ 인 c 가 존재함을 설명할 수 있다.	3
	함수 $g(x)$ 의 증가, 감소, 극한값을 바탕으로 열린구간 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 에서 $g(x)=0$ 을 만족시키는 $x=c$ 뿐 임을 확인 할 수 있다.	4
	함수 $f(x)$ 가 $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ 의 $x=c$ 에서만 극솟값을 가짐을 설명할 수 있다.	2

7. 예시 답안

[미적분-1]

$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ 의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln f(x)=(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

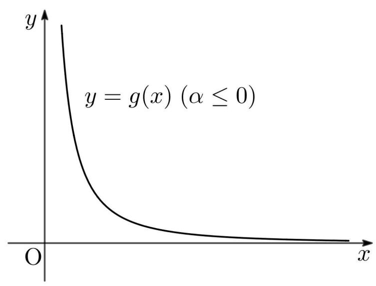
위 식의 양변을 x 에 대해 미분하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}$ 이다.

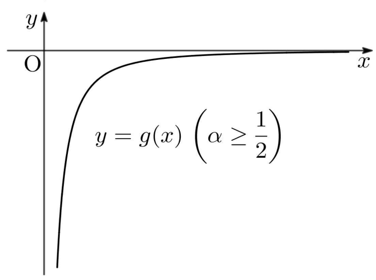
$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}$ 라 하면 $f'(x)=f(x)g(x)$ 이고 $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ 이다.

[미적분-2]

$f'(x)=f(x)g(x)$ 이고 $x>0$ 에서 $f(x)>0$ 이므로 $g(x)$ 의 부호를 확인하면 된다.

$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}$ 에서 $g'(x)=\frac{(2\alpha-1)x+\alpha}{(x^2+x)^2}$





(ⅰ) $\alpha\le 0$ 인 경우

$x>0$ 에서 $g'(x)<0$ 이므로 $x>0$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.

이때 $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ 이므로 $x>0$ 에서 $g(x)>0$ 이고 $f'(x)>0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0,\infty)$ 에서 증가한다.

(ⅱ) $\alpha\ge\frac{1}{2}$ 인 경우

$x>0$ 에서 $g'(x)>0$ 이므로 $x>0$ 에서 $g(x)$ 는 증가한다.

이때 $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ 이므로 $x>0$ 에서 $g(x)<0$ 이고 $f'(x)<0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0,\infty)$ 에서 감소한다.

[미적분-3]

$\alpha=\frac{1}{3}$ 일 때, $g'(x)=\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{(x^2+x)^2}=0$ 에서 $g'(1)=0$ 이고

$x<1$ 에서 $g'(x)>0$, $x>1$ 에서 $g'(x)<0$ 이다.

또, 함수 $g(x)$ 의 극댓값 $g(1)=\ln 2-\frac{2}{3}>0$ 이다.

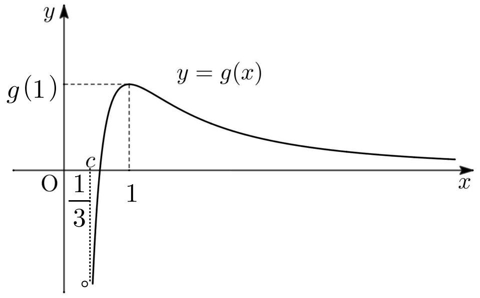
$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ 이고 $x>1$ 에서 $g(x)$ 는 감소하므로 $x>1$ 에서 $g(x)>0$이 항상 성립한다.

따라서, 열린구간 $(1,\infty)$ 에서 $f'(x)>0$ 이고 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 열린구간 $(1,\infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 존재하지 않는다.

한편, $g\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 4 - \frac{3}{2} < 0$ 이고 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 에서 연속이므로 제시문 (나)에 의해 열린구간 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 에서 $g(c) = 0$ 인 c 가 적어도 하나 존재한다.

이때, 열린구간 $(0, 1)$ 에서 $g'(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

그러므로, 열린구간 $\left(\frac{1}{3}, c\right)$ 에서 $g(x) < 0$ 이고 열린구간 $(c, 1)$ 에서 $g(x) > 0$이다.



즉, $f'(c) = 0 \left(\frac{1}{3} < c < 1\right)$이고 $x = c$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 유일한 극솟값 $f(c)$ 를 갖는다.

사. 문항카드7

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(논술전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열(수학) / 선택문항 유형2(기하)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 기하
	핵심 개념 및 용어	쌍곡선의 방정식, 쌍곡선의 점근선, 코사인 법칙, 외분점
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【선택문항 유형2(기하)】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$에서의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

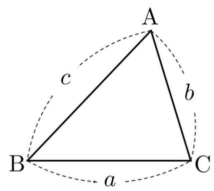
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

(나) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

(다) 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c일 때 다음이 성립한다.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

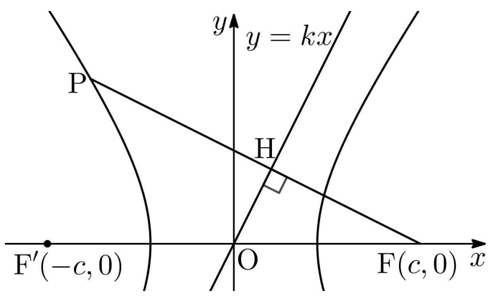


(라) 선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여

$$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 외분한다고 하며, 점 Q를 선분 AB의 외분점이라 한다.

두 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)\ (c>0)$인 쌍곡선의 한 점근선이 직선 $y=kx\ (k>1)$이다.
점 F에서 직선 $y=kx$에 내린 수선의 발을 H라 하고 직선 FH가 쌍곡선과 제2사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 다음 물음에 답하시오.



[기하-1] $k=2$일 때, 점 H는 선분 PF의 중점이다.

선분 FH가 쌍곡선과 만나는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{4}{3}$일 때, c의 값을 구하시오. (15점)

[기하-2] 점 P는 선분 FH를 $k:1$로 외분하는 점임을 보이시오. (15점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 쌍곡선 위의 한 점과 한 초점을 이은 선분이 점근선과 수직일 때, 점근선의 기울기가 주어진 경우 쌍곡선의 초점의 좌표를 구하고, 점근선의 기울기가 k인 경우 항상 일정한 비가 성립함을 코사인 법칙을 이용하여 추론할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[기하-1] 쌍곡선의 점근선의 기울기와 쌍곡선의 정의를 이용하여 초점의 좌표를 구하는 문항이다.

[기하-2] 쌍곡선 위의 한 점과 한 초점을 이은 선분이 점근선과 수직일 때, 항상 일정한 비가 성립함을 코사인법칙을 이용하여 추론할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - $\boxed{1}$ 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (1) 이차곡선 - (가) 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. (중) 쌍곡선의 방정식을 구하고, 쌍곡선의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표와 주축의 길이, 점근선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - $\boxed{1}$ 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (1) 이차곡선 - (가) 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. (하) 쌍곡선의 뜻과 초점, 꼭짓점, 중심, 주축, 점근선의 뜻을 말할 수 있다.
제시문 (다)	적용교육과정	[수학 I] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학 I] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (라)	적용교육과정	[수학] - (2) 기하 - $\boxed{1}$ 평면좌표 [10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학] - (2) 기하 - (가) 평면좌표 [10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. (하) 수직선에서 선분의 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
[기하-1]	적용교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - $\boxed{1}$ 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (1) 이차곡선 - (가) 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. (중) 쌍곡선의 방정식을 구하고, 쌍곡선의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표와 주축의 길이, 점근선의 방정식을 구할 수 있다.
[기하-2]	적용교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - $\boxed{1}$ 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·	[기하] - (1) 이차곡선 - (가) 이차곡선

	평가기준	[12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. (상) 쌍곡선의 방정식과 관련된 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하	황선욱 외	미래엔	2020	42-47
	기하	홍성복 외	지학사	2021	23-28
	기하	권오남 외	교학사	2020	29-32
	수학 I	김원경 외	비상교육	2020	99-101
	수학 I	박교식 외	동아출판	2019	89-90
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2020	111-112
	수학	류희찬 외	천재교과서	2019	115-117

5. 문항 해설

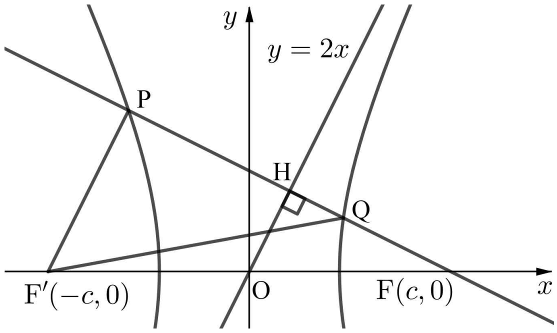
본 문항은 쌍곡선의 정의와 쌍곡선의 점근선이 갖는 대수적인 관계를 이용하여 주어진 관계를 만족하는 쌍곡선의 초점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가하고, 일반적인 쌍곡선이 가지고 있는 비례관계를 코사인법칙을 이용하여 추론할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	쌍곡선의 방정식과 점근선의 방정식의 관계를 이용하여 c를 a로 나타낸 관계식을 서술한다.	5
	두 삼각형 HOF와 $\mathrm{PF'F}$의 닮음비가 $1:2$임을 이용하여 $\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{OH}}=2a$임을 서술한다.	5
	쌍곡선의 정의를 이용하여 직각삼각형 $\mathrm{PF'Q}$의 세 변의 길이를 한 문자로 나타내고 c의 값을 구한다.	5
[기하-2]	쌍곡선의 방정식과 점근선의 방정식의 관계를 이용하여 c를 a와 k로 나타낸 관계식을 서술한다.	3
	삼각형 HOF에서 $\angle\mathrm{PFF'}=\alpha$에 대한 $\cos\alpha=\dfrac{ak}{c}$임을 서술한다.	4
	쌍곡선의 정의와 코사인법칙을 이용하여 삼각형 $\mathrm{PFF'}$에서 $\cos\alpha$의 값을 표현한다.	4
	$\cos\alpha$의 값을 비교하여 점 P가 선분 FH를 $k:1$로 외분하는 점임을 서술한다.	4

7. 예시 답안

[기하-1]



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0\,,\,b>0)$ 이라 두면

한 점근선의 방정식이 $y=2x$ 이므로 $\dfrac{b}{a}=2$ 즉, $b=2a$

쌍곡선의 정의에 의해서 $c^2=a^2+b^2=5a^2$ … ⅰ)

삼각형 HOF 에서 $\overline{\mathrm{HO}}=t$ 라 두면 $\tan(\angle\mathrm{HOF})=2$ 이므로 $\overline{\mathrm{HF}}=2t$이고,

피타고라스정리에 의해서 $c^2=t^2+(2t)^2=5t^2$

ⅰ)에 의해서 $t=a$ 즉 $\overline{\mathrm{HO}}=a\,,\,\overline{\mathrm{HF}}=2a$

삼각형 HOF 와 삼각형 $\mathrm{PF'F}$ 는 닮음이고 닮음비가 $1:2$ 이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이다.

따라서 쌍곡선의 정의에 의해서

$\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}$ 즉, $\overline{\mathrm{QF'}}=\dfrac{4}{3}+4a-2a=\dfrac{4}{3}+2a$

삼각형 $\mathrm{PF'Q}$ 는 직각삼각형이므로

$$\left(\frac{4}{3}+2a\right)^2=(2a)^2+\left(4a-\frac{4}{3}\right)^2$$

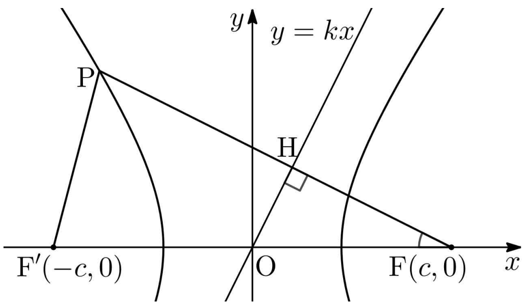
$a^2=a$

따라서 $a=1\,(a>0)$

그러므로 ⅰ)에 의해서 $c^2=5a^2=5$가 되어

$c=\sqrt{5}$ 이다.

[기하-2]



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0\,,\,b>0)$ 이라 두면

한 점근선의 방정식이 $y=kx$ 이므로 $k=\dfrac{b}{a}$ 즉, $b=ak$

쌍곡선의 정의에 의해서 $c^2=a^2+b^2=a^2(1+k^2)$ … ⅱ)

원점을 O, $\angle \mathrm{PFF}'$ 을 α 라 하자.

삼각형 HOF 에서 $\overline{\mathrm{HO}}=t$ 라 두면 $\tan(\angle \mathrm{HOF})=k$ 이므로 $\overline{\mathrm{HF}}=tk$이고,

피타고라스정리에 의해서 $c^2=t^2+t^2k^2=t^2(1+k^2)$

ⅱ)에 의해서 $t=a$ 즉 $\overline{\mathrm{HO}}=a$, $\overline{\mathrm{HF}}=ak$이고

$$\cos\alpha=\frac{ak}{c} \qquad \cdots \text{ⅲ)}$$

삼각형 PFF' 에서 $\overline{\mathrm{PF}}=p$ 이면 $\overline{\mathrm{PF}'}=p-2a$이고

$$\cos\alpha=\frac{4c^2+p^2-(p-2a)^2}{2\times 2c\times p} \qquad \cdots \text{ⅳ)}$$

ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서

$$\frac{ak}{c}=\frac{4c^2+p^2-(p-2a)^2}{2\times 2c\times p}$$

$$kp=a(1+k^2)+p-a,\ (k-1)p=ak^2$$

따라서 $p=\dfrac{ak^2}{k-1}$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PH}}&=\frac{ak^2}{k-1}:\frac{ak^2}{k-1}-ak\\&=ak^2:ak\\&=k:1\end{aligned}$$

이므로 점 P 는 선분 FH 를 $k:1$ 로 외분하는 점이다.

아. 문항카드8

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술(지역인재전형)</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호</td><td colspan="2">의・약학계열(수학) / 공통문항 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>미정계수법, 최대최소정리, 정적분</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">30분 / 전체 100분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【공통문항 1】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(나) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 $a,\, b,\, c$를 포함하는 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(다) 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 이 구간의 모든 x에 대하여 $f(x) \le g(x)$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

[1-1] 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 2인 다항함수 $P(x)$를 모두 찾으시오. (20점)

Ⅰ. $P(x)$의 모든 계수가 정수이다.

Ⅱ. $x>0$에서 $\log P(x) - \log P\left(\frac{1}{x}\right) = 3\log x$이다.

Ⅲ. $P\left(\frac{1}{2}\right) < 3$

[1-2] 함수 $Q(x) = ax^2 + b$ ($a,\, b$는 실수)와 닫힌구간 $[0,\, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 부등식 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \ge \frac{1}{10^a} - \frac{1}{10^{2a}}$이 성립함을 보이시오. (15점)

Ⅰ. $x>0$에서 $\log Q(x) - \log Q\left(\frac{1}{x}\right) = 2\log x$이다.

Ⅱ. $0 \le x \le 1$에서 $f\left(10^{-Q(x)}\right) = 1$이고 $f(x) \ge 0$이다.

3. 출제 의도

본 문항에서는 로그와 다항함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 찾고, 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 포함한 부등식이 성립함을 보일 수 있는지를 평가하고자 한다.

[1-1] 로그의 성질과 다항함수의 최솟값을 알아보는 과정을 통해 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 찾을 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[1-2] 주어진 조건을 만족시키는 함수의 형태를 구하고 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 포함한 부등식이 성립함을 보일 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문(가)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 연속함수에 관한 최대·최소 정리와 사잇값정리를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
제시문(나)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. (상) 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
제시문(다)	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. (상) 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
[1-1]	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - $\boxed{1}$ 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{2}$ 나머지정리 [10수학01-01] 항등식의 성질을 이해한다. [수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - (가) 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. (중) 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - (나) 나머지정리 [10수학01-01] 항등식의 성질을 이해한다. (상) 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있고 그 과정을 설명할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - (바) 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. (상) 이차부등식과 이차함수의 관계를 적용하여 이차부등식과 연립이차부등식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
[1-2]	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - $\boxed{1}$ 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - (가) 지수와 로그 [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. (중) 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있다. [수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. (상) 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외	동아출판	2018	17-18, 83-86
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	22-24, 91-94
	수학	김원경 외	비상교육	2018	24-26, 82-86
	수학 I	고성은 외	좋은책 신사고	2018	28-31
	수학 I	이준열 외	천재교육	2018	27-31
	수학 I	홍성복 외	지학사	2018	27-32
	수학 II	황선욱 외	미래엔	2018	37-38, 124-126
	수학 II	배종숙 외	㈜금성출판사	2018	42-43, 126-127
	수학 II	김원경 외	비상교육	2018	37, 116-118

5. 문항 해설

본 문항은 로그의 성질을 이용하여 다항함수의 차수와 계수에 대한 관계식을 구하고, 다항함수의 최솟값을 찾아보는 과정을 통해 로그의 진수조건을 만족시키는 다항함수를 찾을 수 있는지를 평가한다. 또한 특정한 범위에서 주어진 조건을 만족하는 함수를 구하고, 정적분의 성질을 통해 정적분을 포함하는 부등식이 성립함을 보일 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$P(x)=2x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$로 두고 $x^n \cdot \dfrac{2x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{2+a_{n-1}x+\cdots+a_0x^n}=x^3$ 를 확인할 수 있다.	5
	차수 n의 범위를 구할 수 있다.	6
	$n=2$인 경우, 주어진 조건을 만족시키는 다항함수 $P(x)$를 모두 구할 수 있다.	3
	$n=3$인 경우, 주어진 조건을 만족시키는 다항함수 $P(x)$를 모두 구할 수 있다.	6
[1-2]	$Q(x)=ax^2+a$를 구할 수 있다.	3
	$Q(x)$의 범위를 알 수 있다.(최댓값, 최솟값)	2
	$10^{-2a} \le y \le 10^{-a}$일 때, $f(y)=1$임을 확인할 수 있다.	6
	적분을 포함한 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	4

7. 예시 답안

[1-1]

$P(x)=2x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{0}$라 하자.

양수 x에 대하여, $\log P(x)$와 $\log P\left(\frac{1}{x}\right)$가 진수조건을 만족해야 하므로 $P(x)>0$이어야 한다.

$\log P(x)-\log P\left(\frac{1}{x}\right)=3\log x$

이므로

$$\log\left(\frac{P(x)}{P\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=\log\left(x^{n}\cdot\frac{2x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{0}}{2+a_{n-1}x+\cdots+a_{0}x^{n}}\right)=\log x^{3}$$

이고

$$x^{n}\cdot\frac{2x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{0}}{2+a_{n-1}x+\cdots+a_{0}x^{n}}=x^{3}$$

이다. 따라서

$2x^{2n}+a_{n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_{0}x^{n}=a_{0}x^{n+3}+\cdots+a_{n-1}x^{4}+2x^{3}$

이고

$3\le 2n\le n+3$

이다. 위 조건을 만족시키는 정수 n은 2와 3이다.

(i) $n=2$인 경우

양수 x에 대하여

$2x^{2}+a_{1}x+a_{0}=a_{0}x^{3}+a_{1}x^{2}+2x$

이므로 $a_{0}=0$이고 $a_{1}=2$이다. 따라서 $P(x)=2x^{2}+2x$이고, 이 다항함수 $P(x)$는 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

(ii) $n=3$인 경우

양수 x에 대하여

$2x^{3}+a_{2}x^{2}+a_{1}x+a_{0}=a_{0}x^{3}+a_{1}x^{2}+a_{2}x+2$

이므로 $a_{0}=2$이고 $a_{2}=a_{1}$이다. 즉,

$P(x)=2x^{3}+a_{1}x^{2}+a_{1}x+2$

이다. 이때,

$P(1)=4+2a_{1}>0,\quad P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}+\frac{3a_{1}}{4}<3$

을 만족시키는 정수 a_{1}은 -1과 0뿐이므로 $P(x)=2x^{3}-x^{2}-x+2$이거나 $P(x)=2x^{3}+2$이다

이 두 다항함수 모두 양수 x에 대하여 양의 값을 가진다.

(i)과 (ii)에 의해 주어진 조건을 모두 만족시키는 최고차항의 계수가 2인 다항함수 $P(x)$는 다음과 같다.

$2x^{2}+2x,\quad 2x^{3}-x^{2}-x+2,\quad 2x^{3}+2$

[별해 ($n=3$인 경우)]

양수 x에 대하여

$2x^{3}+a_{2}x^{2}+a_{1}x+a_{0}=a_{0}x^{3}+a_{1}x^{2}+a_{2}x+2$

이므로 $a_{0}=2$이고 $a_{2}=a_{1}$이다. 즉,

$P(x)=2x^{3}+a_{1}x^{2}+a_{1}x+2$

이다. 한편, $P(x)>0$이므로

$$P(x)=2(x+1)\left(x^2+\frac{a_1-2}{2}x+1\right)=2(x+1)\left(\left(x+\frac{a_1-2}{4}\right)^2+1-\left(\frac{a_1-2}{4}\right)^2\right)>0$$

이고, 따라서 다음의 두 조건 (ㄱ), (ㄴ) 중 하나를 만족시켜야 한다.

(ㄱ) $-\dfrac{a_1-2}{4}\le 0$

(ㄴ) $-\dfrac{a_1-2}{4}>0$이고 $1-\left(\dfrac{a_1-2}{4}\right)^2>0$

(ㄱ)을 만족시키는 정수 a_1은 $2,3,4,\cdots$이고, (ㄴ)을 만족시키는 a_1은 $-1,0,1$이다.

$a_1=-1$이거나 $a_1=0$인 경우에만 $P\left(\dfrac{1}{2}\right)<3$이 만족되므로, $P(x)=2x^3-x^2-x+2$이거나 $P(x)=2x^3+2$이다.

[1-2]

양수 x에 대하여 $\log Q(x)$와 $\log Q\left(\dfrac{1}{x}\right)$가 진수조건을 만족해야 하므로 $Q(x)>0$이어야 한다.

따라서 $a>0$이고 $b>0$이다.

$$\log Q(x)-\log Q\left(\frac{1}{x}\right)=2\log x$$

이므로

$$\log\left(\frac{Q(x)}{Q\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=\log\left(x^2\cdot\frac{ax^2+b}{a+bx^2}\right)=\log x^2$$

이고

$x^2\cdot\dfrac{ax^2+b}{a+bx^2}=x^2$, 즉, $ax^4+bx^2=bx^4+ax^2$

이다.

$a=b$이고 $Q(x)=ax^2+a$이다. 닫힌구간 $[0,1]$에서 $Q(x)$의 최솟값은 a이고 최댓값은 $2a$이므로,

$10^{-2a}\le y\le 10^{-a}$인 실수 y에 대하여,

$10^{-Q(x)}=y$를 만족시키는 x가 닫힌구간 $[0,1]$에 존재한다.

따라서 조건 $f(10^{-Q(x)})=1$에 의해 $10^{-2a}\le y\le 10^{-a}$일 때, $f(y)=1$이다.

제시문 (나), (다)와 조건 $f(y)\ge 0$로부터

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(y)\,dy &= \int_0^{10^{-2a}} f(y)\,dy+\int_{10^{-2a}}^{10^{-a}} f(y)\,dy+\int_{10^{-a}}^{1} f(y)\,dy\\ &= \int_0^{10^{-2a}} f(y)\,dy+\int_{10^{-2a}}^{10^{-a}} 1\,dy+\int_{10^{-a}}^{1} f(y)\,dy\\ &\ge \int_{10^{-2a}}^{10^{-a}} 1\,dy=\frac{1}{10^a}-\frac{1}{10^{2a}}\end{aligned}$$

이므로

부등식 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\ge\frac{1}{10^a}-\frac{1}{10^{2a}}$ 이 성립한다.

자. 문항카드9

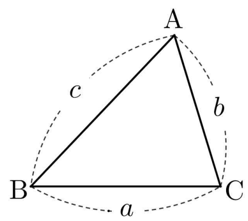
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술(지역인재전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	의·약학계열(수학) / 공통문항 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ
	핵심 개념 및 용어	사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이, 함수의 최댓값
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【공통문항 2】 다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c라 하자.



(가) 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(나) 삼각형 ABC에서

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

(다) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 양 끝점이 아닌 임의의 점 D에 대하여 직선 BD 위의 점 중 점 C로부터의 거리가 1인 점을 E라 하자. (단, 점 E는 점 B가 아니다.)
다음 물음에 답하시오.

[2-1] $\overline{\mathrm{AD}}=x$라 할 때, 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이를 x에 대한 식으로 나타내시오. (15점)

[2-2] 삼각형 CDE의 넓이를 S라 할 때, $S\times\overline{\mathrm{BD}}^2$의 값이 최대가 되도록 하는 선분 AD의 길이를 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 도형의 각 변의 길이와 각의 크기를 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 구하고, 다항함수의 미분법을 활용하여 최댓값을 가질 때의 조건을 파악할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[2-1] 주어진 도형에 대하여 사인법칙과 코사인법칙을 활용해 한 변의 길이와 외접원의 반지름의 길이와의 관계식을 파악할 수 있는지를 판단하는 문항이다.

[2-2] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 주어진 도형의 각 변의 길이와 각의 크기를 구하고, 이를 통해 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 판단하고자 한다. 또한 조건을 만족하는 선분의 길이를 다항함수의 미분법을 활용하여 구할 수 있는지를 판단하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
제시문 (다)	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
[2-1]	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
[2-2]	적용교육과정	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·평가기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (상)다항함수의 그래프의 개형에 대한 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	권오남 외	교학사	2018	97-104
	수학 I	김원경 외	비상교육	2018	95-104
	수학 II	홍성복 외	지학사	2018	90-92
	수학 II	류희찬 외	천재교과서	2018	86-89

5. 문항 해설

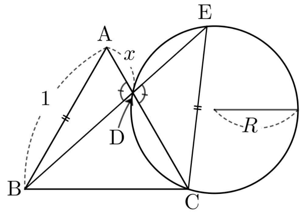
본 문항은 주어진 도형에 대하여 사인법칙과 코사인법칙을 활용해 각 변의 길이와 각의 크기를 구하고, 이를 통해 삼각형의 외접원의 반지름의 길이와 특정한 선분의 길이와의 관계를 파악할 수 있는지를 평가한다. 또한 삼각형의 넓이를 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기로 나타내고 다항함수의 미분법을 활용하여 주어진 식이 최댓값을 가질 때의 조건을 파악할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	사인법칙에 의해 $\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle \mathrm{CDE})}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle \mathrm{ADB})}=2R$가 성립함을 나타낼 수 있다.	5
	$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{x^2-x+1}$ 로 나타낼 수 있다.	5
	$R=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{3}}$ 로 나타낼 수 있다.	5
[2-2]	$\overline{\mathrm{DE}}=\frac{x(2-x)}{\sqrt{x^2-x+1}}$ 로 나타낼 수 있다.	6
	$\sin(\angle \mathrm{CDE})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{x^2-x+1}}$ 로 나타낼 수 있다.	4
	$S=\frac{\sqrt{3}x(1-x)(2-x)}{4(x^2-x+1)}$ 로 나타낼 수 있다.	5
	$S\times\overline{\mathrm{BD}}^2$이 최댓값을 갖게 하는 선분 AD의 길이가 $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$임을 구할 수 있다.	5

7. 예시 답안

[2-1]



$\angle \mathrm{ADB}$와 $\angle \mathrm{CDE}$는 맞꼭지각으로 서로 같고, 주어진 조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$이다.
$\triangle \mathrm{CDE}$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle \mathrm{CDE})}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle \mathrm{ADB})}=2R$$

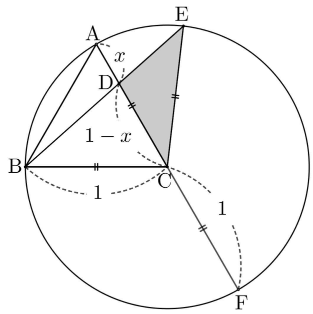
이므로 $\triangle \mathrm{ADB}$의 외접원의 반지름의 길이도 R이다.

또한 $\overline{\mathrm{AD}}=x\,(0<x<1)$라 하면 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{BD}}^2=x^2+1^2-2x\cos\frac{\pi}{3}=x^2-x+1$ 이다.

즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{x^2-x+1}$ 이다.

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BAD})}=\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ 이므로 $R=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{3}}$ 이다.

[2-2]



$\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$이므로 점 A, 점 B, 점 E는 모두 점 C를 중심으로 하는 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.
직선 AC가 이 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하자.

$\overline{\mathrm{AD}}=x\,(0<x<1)$라 하면 $\overline{\mathrm{CD}}=1-x$이므로 $\overline{\mathrm{DF}}=2-x$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{DE}}$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{x(2-x)}{\sqrt{x^2-x+1}}$ 이다.

또한 $\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle \mathrm{CDE})}=2R$ 이므로 $\sin(\angle \mathrm{CDE})=\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{2R}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{x^2-x+1}}$ 이다.

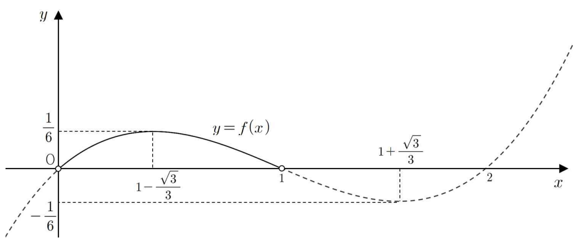
이때 $\triangle \mathrm{CDE}$의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\angle \mathrm{CDE})=\frac{1}{2}\times\frac{x(2-x)}{\sqrt{x^2-x+1}}\times(1-x)\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{x^2-x+1}}=\frac{\sqrt{3}x(1-x)(2-x)}{4(x^2-x+1)}$$

그러므로 $S\times\overline{\mathrm{BD}}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(1-x)(2-x)$이다.

$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(1-x)(2-x)$라 하면, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3x^2-6x+2)$이고, $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$이다.
이때 점 D는 선분 AC 위의 양 끝점이 아닌 임의의 점이므로 $0<x<1$이다.
따라서 열린구간 $(0,1)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	0



즉 함수 $f(x)$는 $x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극대이면서 최대이다.

따라서 최댓값을 갖게 하는 선분 AD의 길이는 $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

차. 문항카드10

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(지역인재전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	의·약학계열(수학) / 선택문항 유형1(미적분)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심 개념 및 용어	지수함수와 로그함수의 극한, 지수함수와 로그함수의 미분, 합성함수의 미분법, 사잇값의 정리, 함수의 증가와 감소, 함수의 극대와 극소
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

【선택문항 유형1(미적분)】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에서
① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(다) 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 이 구간에 속하는 c에 대하여 $f'(c)=0$이고 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=c$에서 극소이고 극솟값은 $f(c)$이다.

열린구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, α는 실수)

[미적분-1] 음이 아닌 실수 x에 대하여 $\ln(1+x)\leq\sqrt{x}$가 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$이 성립함을 보이시오. (5점)

[미적분-2] $\alpha\leq 0$일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가함을 보이고, $\alpha\geq\dfrac{1}{2}$일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 감소함을 보이시오. (10점)

[미적분-3] $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$일 때, 열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 개수가 1임을 보이시오. (15점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 로그함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 증가와 감소를 파악하고 그래프의 개형을 그릴 수 있는지와 극값의 존재성을 설명할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[미적분-1] 미분을 이용하여 부등식을 증명하고, 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[미적분-2] 로그함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분하고, 도함수의 부호를 이용하여 함수의 그래프의 증가와 감소를 설명할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[미적분-3] 사잇값 정리를 이용하여 도함수의 부호가 변하는 상태를 파악하고 극소가 유일하게 존재한다는 것을 설명할 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td colspan="2">적용교육과정</td><td>교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”</td></tr>
<tr><td colspan="2">문항 및 제시문</td><td>학습내용 성취기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문(가)</td><td>적용교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분- $\boxed{3}$ 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
평가기준</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분- (다) 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
(중) 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문(나)</td><td>적용교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속
[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
평가기준</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속
[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
(중) 연속함수에 관한 최대.최소 정리와 사잇값 정리를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문(다)</td><td>적용교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분- $\boxed{3}$ 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
평가기준</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분- (다) 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
(중) 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">[미적분-1]</td><td>적용교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한
[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.
[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
평가기준</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한
[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
(중) 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있다.
[미적분] - (2) 미분법 - (가) 여러 가지 함수의 미분
[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.
[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
(중) 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.
(상) 지수함수와 로그함수를 포함하는 함수를 미분할 수 있다.
[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용
[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
(중) 도함수를 활용하여 간단한 방정식과 부등식 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>[미적분-2]</td><td>적용교육과정</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분- $\boxed{3}$ 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법</td></tr>
</table>

		[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준· 평가기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분- (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (중) 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. (상) 여러 가지 합성함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (중) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 증가, 감소, 오목, 볼록을 조사하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
[미적분-3]	적용교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{2}$ 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분- $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준· 평가기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (중) 연속함수에 관한 최대.최소 정리와 사잇값 정리를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [수학Ⅱ] - (2) 미분- (다) 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (중) 다항함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (중) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 증가, 감소, 오목, 볼록을 조사하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	배종숙 외	금성출판사	2018	43, 85-90
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2018	40, 88-95
	미적분	김원경 외	비상	2019	55-57, 79-84
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	49-57, 80-83

5. 문항 해설

본 문항은 로그함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 그래프의 개형을 그리고 극값의 존재성을 설명할 수 있는지를 평가한다. 양변에 자연로그를 취하여 합성함수의 미분법으로 미분하고, α의 값의 범위에 따른 $f(x)$의 그래프의 증가와 감소를 설명할 수 있어야 한다. 또한 $0<\alpha<\frac{1}{2}$일 때 $f'(x)$의 부호가 $g(x)$의 부호에 의해 결정되므로 사잇값 정리와 $g(x)$의 증가, 감소, 극한값을 바탕으로 $g(x)$ 부호가 음에서 양으로 변하는 순간이 하나밖에 없음을 설명할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	$h(x) = \sqrt{x} - \ln(1+x)$ 의 도함수의 부호를 판별하여 $\ln(1+x) \le \sqrt{x}$ 임을 보일 수 있다	2
	$0 \le x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le x\frac{1}{\sqrt{x}}$ 를 유도하고 $\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ 를 구할 수 있다.	3
[미적분-2]	$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ 의 양변에 자연로그를 취하고 미분하여 $f'(x) = f(x)g(x)$ 꼴로 나타내어 $g(x)$의 부호를 확인해야 함을 안다.	3
	$g'(x) = \frac{(2\alpha-1)x+\alpha}{(x^2+x)^2}$ 를 구하고 $\alpha \le 0$ 일 때 $x>0$에서 $g'(x)<0$ 이고 $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ 이므로 $f(x)$가 증가함수임을 설명할 수 있다.	5
	$\alpha \ge \frac{1}{2}$ 일 때 $x>0$에서 $g'(x)>0$ 이고 $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ 이므로 $f(x)$가 감소함수임을 설명할 수 있다.	2
[미적분-3]	$k = \frac{\alpha}{1-2\alpha} > 0$에서 $g'(k)=0$, $x<k$ 에서 $g'(x)>0$, $x>k$ 에서 $g'(x)<0$ 임을 보이고 (k,∞) 에서 $g(x)>0$ 임을 설명할 수 있다.	3
	$\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ 를 이용하여 $\lim_{x\to 0+} g(x) = -\infty$ 임을 구할 수 있다.	4
	제시문 (나)에 의하여 $g(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0,k)$ 에 존재하고, $(0,k)$ 에서 $g'(x)>0$ 이므로 $x<c$ 에서 $g(x)<0$ 이고 $x>c$ 에서 $g(x)>0$임을 설명할 수 있다.	5
	$f(x)$는 $(0,c)$에서 감소하고 $f(x)$는 (c,∞)에서 증가하므로 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 유일한 극솟값을 가짐을 보일 수 있다.	3

7. 예시 답안

[미적분-1]

$x \ge 0$ 에 대하여 $h(x) = \sqrt{x} - \ln(1+x)$ 라 하자.

$x > 0$ 에서 $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(1+x)} \ge 0$ 이고 $h(0) = 0$ 이므로

$x \ge 0$ 에서 $h(x) \ge 0$ 즉, $\ln(1+x) \le \sqrt{x}$ 가 성립한다.

또, $x > 0$ 일 때 $0 \le \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ 이고 $0 \le x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le x\frac{1}{\sqrt{x}}$ 이다.

이때 $\lim_{x\to 0+} x\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ 이므로 $\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ 이다.

[미적분-2]

$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x) = (x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

위 식의 양변을 x 에 대해 미분하면 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\alpha}{x^2+x}$ 이다.

$g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x + \alpha}{x^2 + x}$ 라 하면 $f'(x) = f(x)g(x)$ 이고,

$x > 0$ 에 대하여 $f(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 의 부호를 확인하면 된다.

이때 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이고 $g'(x) = \dfrac{(2\alpha - 1)x + \alpha}{(x^2 + x)^2}$ 이다.

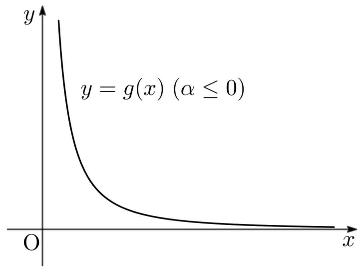
(i) $\alpha \le 0$ 인 경우

$x > 0$ 에서 $g'(x) < 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.

이때 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x) > 0$ 이고

$f'(x) > 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.



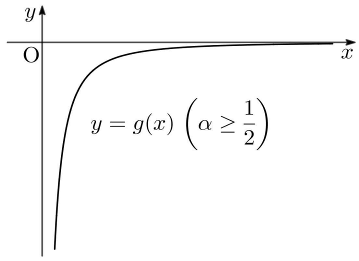
(ii) $\alpha \ge \dfrac{1}{2}$ 인 경우

$x > 0$ 에서 $g'(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x)$ 는 증가한다.

이때 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x) < 0$ 이고

$f'(x) < 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 감소한다.



[미적분-3]

$g'(x) = \dfrac{(2\alpha - 1)x + \alpha}{(x^2 + x)^2} = 0$ 에서 $g'\left(\dfrac{\alpha}{1 - 2\alpha}\right) = 0$ 이고

$k = \dfrac{\alpha}{1 - 2\alpha} > 0$라 하면 $x < k$ 에서 $g'(x) > 0$, $x > k$ 에서 $g'(x) < 0$ 이다.

이때 [미적분-2]에서 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이고 함수 $g(x)$ 는 열린구간 (k, ∞) 에서 감소하므로 열린구간 (k, ∞) 에서

$g(x) > 0$ 이다. … i)

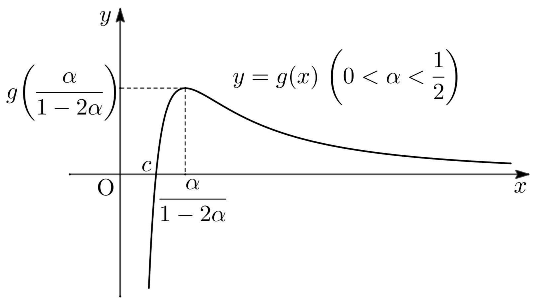
함수 $g(x)$ 는 $x = k$ 에서 연속이므로 $g(k) > 0$ $\left(g(k) = \lim\limits_{x \to k+} g(x) \ge g(2k) > 0\right)$ 이다. … ii)

한편, **[미적분-1]**에서의 $\lim\limits_{x \to 0+} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$ 을 이용하면

$\lim\limits_{x \to 0+} xg(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \left\{x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x + \alpha}{x + 1}\right\} = -\alpha < 0$ 이므로 $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = -\infty$

또, 연속함수 $g(x)$ 가 $g(k) > 0$ 이므로

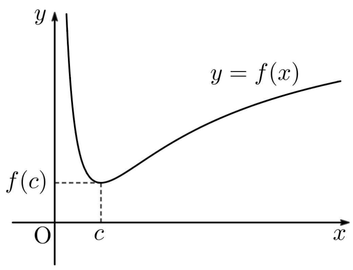
제시문 (나)에 의하여 $g(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, k)$ 에서 적어도 하나 존재한다.



열린구간 $(0, k)$ 에서 $g'(x) > 0$ 이므로 $(0, k)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가하고, $x < c$ 에서 $g(x) < 0$ 이고 $c < x < k$ 에서 $g(x) > 0$ 이다. i), ii)에 의해 $x > c$ 에서 $g(x) > 0$이다.

그러므로 $f'(x) = f(x)g(x)$ 에서 $f'(c) = 0$ 이고 $x < c$ 에서 $f'(x) < 0$, $x > c$ 에서 $f'(x) > 0$이다.

x	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$



$f(x)$는 $(0,c)$에서 감소하고 $f(x)$는 (c,∞)에서 증가하고 $x=c$ 좌우에서 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 제시문 (다)에 의하여 $f(x)$는 $x=c$에서 유일한 극솟값을 갖는다.

카. 문항카드11

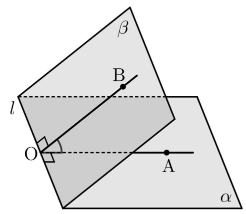
1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술(지역인재전형)	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	의·약학계열(수학) / 선택문항 유형2(기하)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 기하
	핵심 개념 및 용어	두 평면의 위치 관계, 이면각, 정사영
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

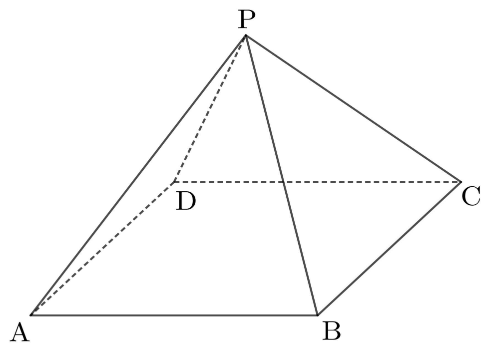
【선택문항 유형2(기하)】 다음 제시문을 읽고 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

(가) 직선 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle\mathrm{AOB}$의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기를 이면각의 크기라 한다. 서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서 그 크기가 크지 않은 쪽의 각을 두 평면이 이루는 각이라 한다.



(나) 평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라 하면 $S' = S\cos\theta$이다.

그림과 같이 밑면이 한 변의 길이가 4인 정사각형이고 옆면이 모두 정삼각형인 사각뿔 $\mathrm{P-ABCD}$가 있다. 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 선분 AB, DC를 $k:1$로 내분하는 점을 각각 E, F라 하고,
두 선분 PB, PC를 $(k-1):2$로 내분하는 점을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이라 하자.
점 E에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 점 F에 도착하는 최단 경로가 두 모서리 PB, PC와 만나는 점을 각각 $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{R_2}$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.



[기하-1] 두 평면 $\mathrm{EQ_1R_1F}$와 $\mathrm{EQ_2R_2F}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오. (15점)

[기하-2] 1보다 큰 실수 k에 대하여 평면 PBC 위의 사각형 $\mathrm{Q_1Q_2R_2R_1}$과 그 내부를 영역 T_k라 하자. 영역 T_k에 포함되는 원 중 지름의 길이가 최대가 되는 원의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이를 k에 대한 식으로 나타내시오. (15점)

3. 출제 의도

본 문항에서는 정사각뿔에서 실수 k의 값에 따른 두 평면이 이루는 이면각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하고, 두 평면과 정사각뿔의 옆면이 만나서 생기는 사각형의 내부에 포함되는 원 중 반지름의 길이가 최대인 원의 밑면 위로의 정사영의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있는지를 평가하고자 한다.

[기하-1] 실수 k의 값에 따라 만들어지는 두 평면이 이루는 이면각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하는 문항이다.

[기하-2] [기하-1]에서 구한 두 평면과 정사각뿔의 옆면이 만나서 생기는 사각형의 내부에 포함되는 원 중 반지름의 길이가 최대인 원의 넓이를 k에 대한 식으로 나타내고, 밑면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정		교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취기준
제시문 (가)	적용교육과정	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - $\boxed{1}$ 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 삼수선의 정리를 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
제시문 (나)	적용교육과정	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - $\boxed{1}$ 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (상) 정사영과 관련된 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
[기하-1]	적용교육과정	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - $\boxed{1}$ 공간도형 [12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학] - (2) 기하 - $\boxed{1}$ 평면좌표 [10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형 [12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. (중) 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. (상) 삼수선의 정리를 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다. [수학] - (2) 기하 - (가) 평면좌표 [10수학02-02] 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다. (하) 수직선에서 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있다.
[기하-2]	적용교육과정	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - $\boxed{1}$ 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·평가기준	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - (가) 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (상) 정사영과 관련된 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하	황선욱 외	미래엔	2020	126-131, 133-135
	기하	홍성복 외	지학사	2021	123-127, 132-135
	기하	권오남 외	교학사	2020	124-128, 132-134
	기하	류희찬 외	천재교과서	2020	124-127, 133-134
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2020	108-110
	수학	류희찬 외	천재교과서	2019	113-117

5. 문항 해설

본 문항은 정사각뿔에서 일정한 조건을 만족하는 두 평면의 이면각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는지를 평가하고, 두 평면과 옆면의 교선으로 만들어진 사각형에 포함되는 원 중 반지름의 길이가 최대인 원의 밑면 위로의 정사영의 넓이를 나타낼 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	전개도로 최단 경로를 찾고, 이를 이용하여 선분의 길이를 계산할 수 있다.	4
	두 평면 $\mathrm{EQ_1R_1F}$와 ABCD의 관계, 두 평면 $\mathrm{EQ_2R_2F}$와 ADP와의 관계를 알아내고 보일 수 있다.	7
	두 평면 $\mathrm{EQ_1R_1F}$, $\mathrm{EQ_2R_2F}$이 이루는 이면각의 크기의 코사인 값을 계산할 수 있다.	4
[기하-2]	내접원의 (반)지름의 길이와 평행한 두 직선 $\mathrm{Q_1R_1}$과 $\mathrm{Q_2R_2}$사이의 거리를 계산할 수 있다.	6
	$k=1.5$를 기준으로 경우를 나눌 수 있다.	3
	정사영의 넓이를 계산할 수 있다.	6

7. 예시 답안

[기하-1]

점 P에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 P'이라 하고, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.

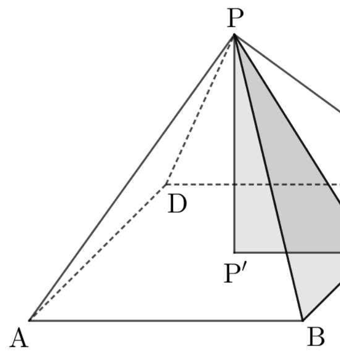
삼각형 PBM이 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2-\overline{\mathrm{BM}}^2=16-4=12$$

이고 $\overline{\mathrm{PM}}=2\sqrt{3}$이다. 삼각형 $\mathrm{PP}'\mathrm{M}$이 직각삼각형이므로,

$$\overline{\mathrm{PP}'}^2=\overline{\mathrm{PM}}^2-\overline{\mathrm{P}'\mathrm{M}}^2=12-4=8$$

이고 $\overline{\mathrm{PP}'}=2\sqrt{2}$이다.



점 E에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 점 F에 도착하는 최단 경로는 다음 전개도에서 점 E와 점 F를 연결하는 직선 경로이다. 삼각형 EBQ_2는 정삼각형이므로, $\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{B}}$이다. 주어진 조건에서

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{EB}}=(k+1):1,\quad \overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{BQ}_1}=(k+1):2$$

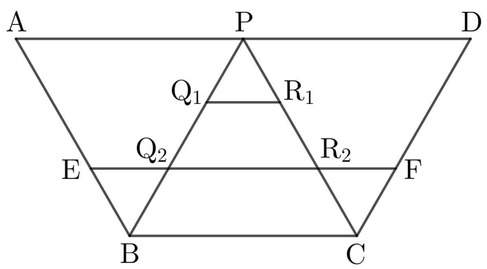
이므로

$$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{BQ}_2}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=(k+1):1.$$

이와 같은 방법으로

$$\overline{\mathrm{PC}}:\overline{\mathrm{CR}_2}=\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{CF}}=(k+1):1$$

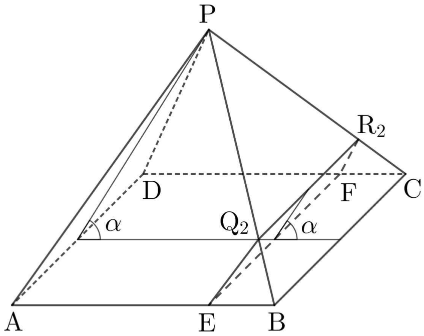
임을 알 수 있다.



다음 그림에서 직선 EQ_2와 직선 AP가 평행하므로 직선 EQ_2는 직선 AP를 포함하는 평면 ADP와 평행하다. 이와 같은 방법으로, 직선 EF는 평면 ADP와 평행함을 알 수 있다. 평면 ADP 위에 있지 않은 한 점 E를 지나고 평면 ADP에 평행한 서로 다른 두 직선 EQ_2와 EF에 의하여 결정되는 평면 $\mathrm{EQ}_2\mathrm{R}_2\mathrm{F}$는 평면 ADP와 평행하다. 따라서 두 평면 ABCD와 $\mathrm{EQ}_2\mathrm{R}_2\mathrm{F}$가 이루는 이면각의 크기를 α라 하면, 두 평면 ADP와 ABCD가 이루는 이면각의 크기도 α가 되어,

$$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다.



선분 AB의 중점과 선분 DC의 중점을 각각 점 N_1, N_2라 할 때,

$$\overline{PQ_1}:\overline{Q_1B}=\overline{N_1E}:\overline{EB}=\overline{PR_1}:\overline{R_1C}=\overline{N_2F}:\overline{FC}=(k-1):2$$

이다. 두 평면 EQ_2R_2F, ADP가 평행함을 보이는 방법으로, 두 평면 PN_1N_2와 EQ_1R_1F는 평행함을 보일 수 있다. 따라서 평면 EQ_1R_1F는 평면 ABCD에 수직이다. 그러므로

$$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$$

이고

$$\cos\theta=\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다.

[기하-1 별해]

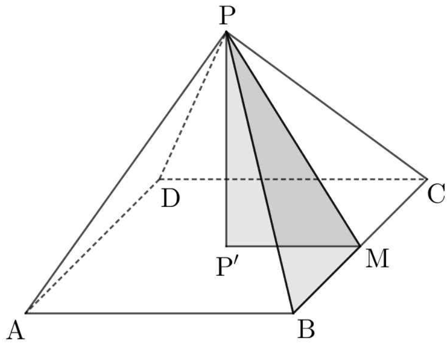
점 P에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 P′이라 하고, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.
삼각형 PBM이 직각삼각형이므로

$$\overline{PM}^2=\overline{PB}^2-\overline{BM}^2=16-4=12$$

이고 $\overline{PM}=2\sqrt{3}$이다. 삼각형 PP′M이 직각삼각형이므로,

$$\overline{PP'}^2=\overline{PM}^2-\overline{P'M}^2=12-4=8$$

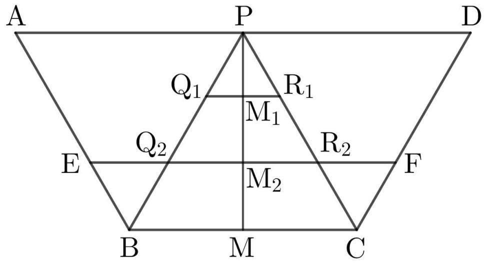
이고 $\overline{PP'}=2\sqrt{2}$이다.



점 E에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 점 F에 도착하는 최단 경로는 다음 전개도에서 점 E와 점 F를 연결하는 직선 경로이다. $\overline{AB}:\overline{EB}=(k+1):1$이므로, $\overline{EB}=\frac{4}{k+1}$이다. 삼각형 EBQ_2는 정삼각형이므로, $\overline{Q_2B}=\overline{EB}=\frac{4}{k+1}$이다. 점 M_1과 M_2를 각각 선분 Q_1R_1과 선분 Q_2R_2의 중점이라 하자. 두 삼각형 PBC, PQ_2R_2는 닮음이므로, $\overline{PM_2}=\frac{2\sqrt{3}\,k}{k+1}$이고, $\overline{M_2M}=\frac{2\sqrt{3}}{k+1}$이다. 두 삼각형 PBC, PQ_1R_1는 닮음이므로,

$$\overline{Q_1R_1}=\frac{4(k-1)}{k+1},\ \overline{PM_1}=2\sqrt{3}\,\frac{k-1}{k+1},\ \overline{M_1M_2}=\frac{2\sqrt{3}}{k+1}$$

이다.



두 점 M_1, M_2에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{M}_1{}'$, $\mathrm{M}_2{}'$이라 하자. 삼수선의 정리에 의하여,

$$\overline{\mathrm{M}_1{}'\mathrm{M}_2} \perp \overline{\mathrm{EF}}$$

이다. 따라서 이면각의 정의에 의해서,

$$\theta = \angle \mathrm{M}_1\mathrm{M}_1{}'\mathrm{M}_2$$

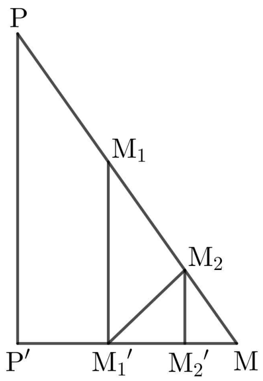
이다. 다음 아래 그림의 삼각형 $\mathrm{PP}'\mathrm{M}$에서, 두 직각 삼각형 $\mathrm{MM}_2\mathrm{M}_2{}'$, $\mathrm{MM}_1\mathrm{M}_1{}'$은 $1:2$로 닮음이며, 두 직각 삼각형 $\mathrm{MM}_2\mathrm{M}_2{}'$, $\mathrm{M}_1{}'\mathrm{M}_2\mathrm{M}_2{}'$은 합동이다.

$$\angle \mathrm{M}_1\mathrm{M}_1{}'\mathrm{M}_2 + \angle \mathrm{M}_2\mathrm{M}_1{}'\mathrm{M}_2{}' = \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\cos\theta = \sin(\angle \mathrm{M}_2\mathrm{M}_1{}'\mathrm{M}_2{}') = \sin(\angle \mathrm{PMP}') = \frac{\overline{\mathrm{PP}'}}{\overline{\mathrm{PM}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다.

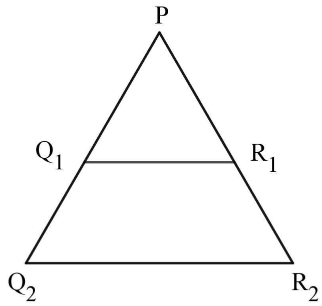


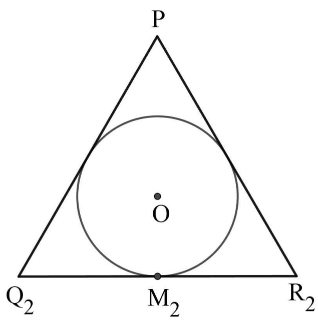
[기하-2]

삼각형 $\mathrm{PQ}_2\mathrm{R}_2$의 내접원의 중심을 점 O라 하자. 삼각형 $\mathrm{PQ}_2\mathrm{R}_2$는 정삼각형이므로 점 O는 삼각형 $\mathrm{PQ}_2\mathrm{R}_2$의 무게중심이 되어, 내접원의 반지름의 길이 r는

$$r = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{PM}_2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{k}{k+1} \times \overline{\mathrm{BC}} = \frac{2\sqrt{3}\,k}{3(k+1)}$$

이다. 선분 $\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$이 삼각형 $\mathrm{PQ}_2\mathrm{R}_2$의 내접원에 접하거나 만나지 않으면, 이 내접원은 사각형 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2\mathrm{R}_1$에 포함되는 원 중에 최대 지름을 갖는 원이 된다.





선분 $\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$이 삼각형 $\mathrm{PQ}_2\mathrm{R}_2$의 내접원에 접하는 경우를 조사하기 위해, 점 M_1과 M_2를 각각 선분 $\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$과 선분

$\mathrm{Q_2R_2}$의 중점이라 하자. 선분 $\mathrm{M_1M_2}$의 길이는

$$\overline{\mathrm{M_1M_2}}=\frac{1}{k+1}\times\overline{\mathrm{PM}}=\frac{1}{k+1}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2\sqrt{3}}{k+1}$$

이다. 선분 $\mathrm{M_1M_2}$의 길이와 내접원의 지름이 같아지는 경우가 선분 $\mathrm{Q_1R_1}$이 내접원에 접할 때이다. 즉,

$$\frac{4\sqrt{3}\,k}{3(k+1)}=\frac{2\sqrt{3}}{k+1}$$

이고, 이때 $k=1.5$이다.

ⅰ) $k\le 1.5$인 경우.

위와 같이 삼각형 $\mathrm{PQ_2R_2}$의 내접원이 사각형 $\mathrm{Q_1Q_2R_2R_1}$에 포함된다. 이때 원의 반지름은 $r=\dfrac{2\sqrt{3}\,k}{3(k+1)}$이다. 원의 넓이는 $\dfrac{4k^2\pi}{3(k+1)^2}$이고 $\cos(\angle\mathrm{PMP'})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로, 이 원의 평면 ABCD로의 정사영의 넓이는

$$(\text{원의 넓이})\times\cos(\angle\mathrm{PMP'})=\frac{4k^2\pi}{3(k+1)^2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}\,k^2\pi}{9(k+1)^2}$$

이다.

ⅱ) $k>1.5$인 경우.

이 경우, 사각형 $\mathrm{Q_1Q_2R_2R_1}$에 포함되는 최대 지름을 갖는 원의 지름은 $\overline{\mathrm{M_1M_2}}$이다. 즉, 최대 지름은 $\dfrac{2\sqrt{3}}{k+1}$이고, 원의 넓이는 $\dfrac{3\pi}{(k+1)^2}$이다. $\cos(\angle\mathrm{PMP'})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로, 이 원의 평면 ABCD로의 정사영의 넓이는

$$(\text{원의 넓이})\times\cos(\angle\mathrm{PMP'})=\frac{3\pi}{(k+1)^2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{(k+1)^2}$$

이다.