

2. 자연계열

[단국대학교 문항카드 7]

1. 일반정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오전 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분법, 함수의 극대와 극소, 적분법, 정적분
예상 소요 시간	70 분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$ 와 $u = g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$
(나) 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서 (1) $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$ (2) $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$
(다) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 도함수 $g'(t)$ 가 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면 $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$

[문제 1] 자연수 n 에 대하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = nx^2e^{-x}, \quad g(x) = (f \circ f)(x)$$

x 에 대한 방정식 $g'(x) = 0$ 이 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 n 을 모두 구하시오.

(단, e 는 2.7로 계산) (15점)

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(1) \int_1^3 h(x)dx = 9$$

(2) 모든 자연수 n 에 대하여 구간 $[3^n, 3^{n+1})$ 에서 $h(x) = h\left(\frac{x}{3}\right) + 1$

$$\int_1^{81} (h(x) + h'(x))dx \text{의 값을 구하시오. (20점)}$$

[문제 3] 모든 실수 x 에 대하여 $k(x) > 0$ 인 연속함수 $k(x)$ 와 함수

$$S(x) = \int_0^x k(t)dt$$

가 두 양수 a, b 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(1) \int_a^b k(x)dx = 3S(a) + 3$$

$$(2) \int_a^b \frac{S(x)e^{S(x)}}{(S(x)+1)^2} k(x)dx = \frac{e^{S(a)}}{S(b)+1} \left(e^{6(S(a)+1)} - 67e^{3(S(a)+1)} + 252 \right)$$

$S(b)$ 의 값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

- ▶ [문제 1] 도함수의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가
- ▶ [문제 2] 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가
- ▶ [문제 3] 정적분의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 - [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
		[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 - [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
		[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법

문항 및 제시문		관련 성취기준
		- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	<p>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용</p> <p>- [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법</p> <p>- [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</p> <p>[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법</p> <p>- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
논제 1-1	교육과정	<p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>- [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</p> <p>- [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법</p> <p>- [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용</p> <p>- [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</p> <p>- [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법</p> <p>- [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</p>
논제 1-2	교육과정	<p>[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법</p> <p>- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법</p> <p>- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
논제 1-3	교육과정	<p>[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법</p> <p>- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p>[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용</p> <p>- [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법</p> <p>- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p>[미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용</p> <p>- [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</p>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	고성은 외	좋은책 신사고	2020	61-66, 72-74, 83-90
	수학 II	이준열 외	천재교육	2020	60-63, 74-76, 83-96
	미적분	김원경 외	비상	2020	79-82, 147-149
	미적분	황선욱 외	미래엔	2020	86-89, 166-167

5. 문항 해설

▶ [논제 1] 미분법 및 함수의 그래프 개형 등을 활용하여 방정식의 해의 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

[논제 2] 적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

[논제 3] 정적분의 개념과 적분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$f'(x) = 0$ 인 x 의 값을 제시	5
	$f'(f(x)) = 0$ 인 x 의 값을 제시	5
	정답을 제시	5
1-2	$\int_1^{81} h'(x)dx$ 의 값을 제시	6
	$\int_3^{3^2} h(x)dx, \int_{3^2}^{3^3} h(x)dx, \int_{3^3}^{3^4} h(x)dx$ 의 값을 제시	10
	정답을 제시	4
1-3	$S(b) = 4S(a) + 3$ 을 제시	4

하위 문항	채점 기준	배점
	방정식 $\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}(e^{3(S(a)+1)} - 4) = \frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)} \left(e^{6(S(a)+1)} - 67e^{3(S(a)+1)} + 252 \right)$ 를 제시	10
	정답을 제시	6

7. 예시 답안

[문제 1] 주어진 자연수 n 에 대하여

$$f'(x) = 2nxe^{-x} - nx^2e^{-x} = nx(2-x)e^{-x}$$

이므로 다음과 같은 증가와 감소를 나타내는 표를 얻을 수 있다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow	$4ne^{-2}$	\searrow

즉, 극솟값은 $f(0) = 0$ 이고 극댓값은 $f(2) = 4ne^{-2}$ 이다.

한편, 합성함수 미분법에 따라

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$$

이므로 방정식 $g'(x) = 0$ 의 해는 $f'(f(x)) = 0$ 의 해 또는 $f'(x) = 0$ 의 해이다.

(i) $f'(x) = 0$ 인 경우 : 위 표로부터 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 이다.

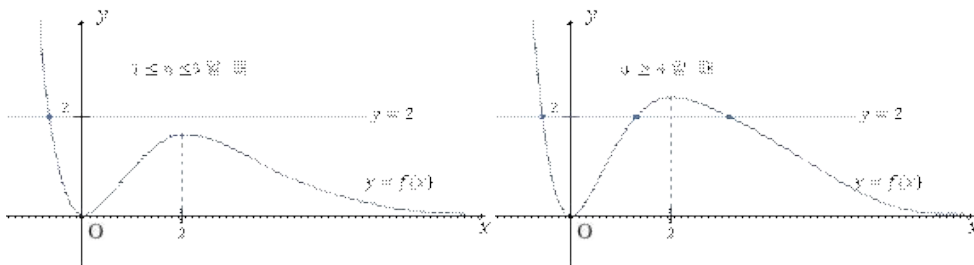
(ii) $f'(f(x)) = 0$ 인 경우 : $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 2$ 이다.

(a) $f(x) = 0$ 인 경우 : 함수 $f(x)$ 는 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 양수이므로, 방정식 $f(x) = 0$ 의 해는 $x = 0$ 뿐이다.

(b) $f(x) = 2$ 인 경우 : $4ne^{-2} < 2 \Leftrightarrow n < \frac{e^2}{2} = 3.645$ ($e = 2.7$ 로 계산)

이므로 $n \leq 3$ 일 때만 방정식 $f(x) = 2$ 가 음의 해 하나만 가짐을 알 수 있다.

(i)와 (ii)에 의하여 $n = 1, 2, 3$.



[참고 그림]

[문제 2] 조건 (2)로 부터

$$h(3^4) = h(3^3) + 1 = h(3^2) + 2 = h(3) + 3 = h(1) + 4$$

이므로

$$\int_1^{81} h'(x)dx = h(81) - h(1) = h(3^4) - h(1) = 4$$

조건 (1)에서 $\int_1^3 h(x)dx = 9$ 이므로

$$\int_3^{3^2} h(x)dx = \int_3^{3^2} \left\{ h\left(\frac{x}{3}\right) + 1 \right\} dx = 3 \int_1^3 h(t)dt + (3^2 - 3) = 33$$

$$\int_{3^2}^{3^3} h(x)dx = \int_{3^2}^{3^3} \left\{ h\left(\frac{x}{3}\right) + 1 \right\} dx = 3 \int_3^{3^2} h(t)dt + (3^3 - 3^2) = 117$$

$$\int_{3^3}^{3^4} h(x)dx = \int_{3^3}^{3^4} \left\{ h\left(\frac{x}{3}\right) + 1 \right\} dx = 3 \int_{3^2}^{3^3} h(t)dt + (3^4 - 3^3) = 405$$

따라서

$$\begin{aligned} & \int_1^{81} (h(x) + h'(x))dx \\ &= \int_1^{3^4} h(x)dx + \int_1^{3^4} h'(x)dx \\ &= \int_1^3 h(x)dx + \int_3^{3^2} h(x)dx + \int_{3^2}^{3^3} h(x)dx + \int_{3^3}^{3^4} h(x)dx + \int_1^{3^4} h'(x)dx \\ &= 9 + 33 + 117 + 405 + 4 \\ &= 568 \end{aligned}$$

[문제 3] 조건 (1)에 의하여 $S(b) - S(a) = \int_a^b k(x)dx = 3S(a) + 3$ 이므로

$$S(b) = 4S(a) + 3 \quad \dots\dots\dots (*)$$

$S(x) = \int_0^x k(t)dt$ 에서 $S'(x) = k(x)$ 이므로

$$\int_a^b \frac{S(x)e^{S(x)}}{(S(x)+1)^2} k(x)dx = \int_{S(a)}^{S(b)} \frac{ue^u}{(u+1)^2} du = \left[\frac{e^u}{u+1} \right]_{S(a)}^{S(b)} = \frac{e^{S(b)}}{S(b)+1} - \frac{e^{S(a)}}{S(a)+1}$$

이고 (*)을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{S(x)e^{S(x)}}{(S(x)+1)^2} k(x)dx &= \frac{e^{4S(a)+3}}{4(S(a)+1)} - \frac{e^{S(a)}}{S(a)+1} = \frac{e^{4S(a)+3} - 4e^{S(a)}}{4(S(a)+1)} \\ &= \frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)} (e^{3(S(a)+1)} - 4) \end{aligned}$$

(*)과 조건 (2)를 이용하여 다음 방정식을 얻는다.

$$\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)} (e^{3(S(a)+1)} - 4) = \frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)} (e^{6(S(a)+1)} - 67e^{3(S(a)+1)} + 252)$$

이로부터

$$(e^{3(S(a)+1)} - 4)(e^{3(S(a)+1)} - 64) = 0$$

여기에서 $e^{3(S(a)+1)} - 4 > e^3 - 4 > 0$ 이므로 $e^{3(S(a)+1)} = 64$ 이고

$$S(a) = 2\ln 2 - 1$$

따라서

$$S(b) = 4S(a) + 3 = 8\ln 2 - 1$$

[단국대학교 문항카드 8]

1. 일반정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오전 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분법, 함수의 극대와 극소
예상 소요 시간	50 분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 구하기 위하여 도함수 $f'(x)$ 를 활용할 수 있다.
(나) 극한값 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 가 존재하면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.
(다) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[문제 1] 방정식 $e^x - |x^2 - ex| = 0$ 의 실근의 개수를 구하시오. (20점)

[문제 2] 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

<p>(1) 점 $(t, 0)$을 지나는 직선 ℓ이 곡선 $y = e^x$에 접할 때 접점의 x좌표를 $u(t)$라 하자.</p> <p>$\int_t^{u(t)} e^x dx = 1 - \frac{1}{e}$일 때 직선 ℓ은 점 $(0, f(0))$에서 곡선 $y = f(x)$와 접한다.</p> <p>(2) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$</p> <p>(3) 곡선 $y = f(e^x)$는 곡선 $y = e^x$와 한 점에서만 만난다.</p>
--

함수 $g(x) = |f(x) - x|$ 가 $x = p$ 에서 미분가능하지 않을 때, 실수 p 의 값을 구하시오. (25점)

3. 출제 의도

- ▶ [문제 1] 미분을 활용하여 실근의 개수를 구할 수 있는지를 평가
- ▶ [문제 2] 미분의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	<p>[수학 II] - (2) 미분 - ① 미분계수 - [12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 - [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. - [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다 - [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 - [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. - [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. - [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[수학 II] - (2) 미분 - (가) 미분계수 - [12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. - [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다 - [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 - [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. - [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p>

문항 및 제시문		관련 성취기준
		- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.
논제 2-1	교육과정	<p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>- [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다</p> <p>- [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용</p> <p>- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용</p> <p>- [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다</p> <p>- [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용</p> <p>- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</p>
논제 2-2	교육과정	<p>[수학 II] - (2) 미분 - ① 미분계수</p> <p>- [12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>- [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p> <p>- [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다</p> <p>- [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용</p> <p>- [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p> <p>- [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p> <p>- [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[수학 II] - (2) 미분 - (가) 미분계수</p> <p>- [12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용</p> <p>- [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</p> <p>- [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다</p> <p>- [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.</p>

문항 및 제시문		관련 성취기준
		<p>[미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용</p> <ul style="list-style-type: none"> - [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. - [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. - [12미적02-13] 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	75-77, 90-98
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	52-59, 67-70, 78-97
	미적분	박교식 외	동아출판	2020	100-122

5. 문항 해설

- ▷ [문제 1] 미분법 및 함수의 그래프를 활용하여 방정식 실근의 개수를 구할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.
- [문제 2] 접선의 개념과 함수의 개념을 활용하여 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$x \leq 0$ 인 경우 실근의 개수가 1인 이유를 제시	5
	$x \geq e$ 인 경우 실근의 개수가 0인 이유를 제시	5
	$0 < x < e$ 인 경우 실근의 개수가 0인 이유를 제시	10
2-2	접선 ℓ 의 방정식을 제시	5
	함수 $f(x)$ 의 일차항의 계수와 상수항을 제시	5
	함수 $f(x)$ 의 삼차항과 이차항의 계수를 제시	10
	함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 점을 제시	5

7. 예시 답안

[문제 1] $h(x) = e^x - |x^2 - ex| = e^x - |x(x - e)|$ 라 하자.

(i) $x \leq 0$ 일 때 : $h(x) = e^x - x^2 + ex$ 이고 $h'(x) = e^x - 2x + e > 0$ 이므로 $h(x)$ 는 증가함수이고

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $h(0) = 1$ 이므로 방정식 $h(x) = 0$ 은 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $x \geq e$ 일 때 : $h(x) = e^x - x^2 + ex$ 이고 $h'(x) = e^x - 2x + e$ 이다.

$h''(x) = e^x - 2$ 에서 $x \geq e$ 일 때 $h''(x) > 0$ 이므로 $h'(x)$ 가 증가한다.

$h'(e) = e^e - e > 0$ 이므로 $x \geq e$ 일 때 $h'(x) > 0$, 즉 $h(x)$ 가 증가한다.

$h(e) = e^e > 0$ 이고 $h(x)$ 가 증가함수이므로 방정식 $h(x) = 0$ 은 구간 $[e, \infty)$ 에서 실근을 갖지 않는다.

(iii) $0 < x < e$ 일 때 : $h(x) = (e^x - ex) + x^2$ 이다.

$e^x - ex$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값 0을 가지므로 $e^x - ex \geq 0$ 이고, $x^2 > 0$ 이므로 $h(x) > 0$ 이다. 따라서 방정식 $h(x) = 0$ 은 구간 $(0, e)$ 에서 실근을 갖지 않는다.

(i)~(iii)에서 방정식 $h(x) = 0$ 의 실근의 개수는 하나이다.

[문제 2] $y = e^x$ 위의 점 $(u(t), e^{u(t)})$ 에서 그은 접선의 방정식은 $y = e^{u(t)}(x - u(t)) + e^{u(t)}$ 이고

이 직선이 x 축 위의 점 $(t, 0)$ 을 지나므로 $u(t) = t + 1$ 이다. 조건 (1)에서

$$\int_t^{u(t)} e^x dx = \int_t^{t+1} e^x dx = e^t(e - 1) = 1 - \frac{1}{e}$$

이므로 $t = -1$, $u(t) = 0$ 이고 접선 ℓ 의 방정식은 $y = x + 1$ 이다.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$)라 할 때 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 점 $(0, 1)$ 에서 접하므로 $f(0) = d = 1$ 이고 $f'(0) = c = 1$ 이다. 따라서 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ 이다.

한편, 조건 (2)로부터 $b = -\frac{3}{2}a$ 이므로 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + x + 1$ 이다.

$e^x = z$ 라 하면 $z > 0$ 이고, 조건 (3)에서 $y = az^3 - \frac{3}{2}az^2 + z + 1$ 과 $y = z$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 오직 한 점에서만 만나야 한다. 즉, $y = az^3 - \frac{3}{2}az^2 + 1$ 과 $y = 0$ 이 구간 $(0, \infty)$ 에서 오직 한 점에서 만나야 한다.

$$\lim_{z \rightarrow 0+} \left(az^3 - \frac{3}{2}az^2 + 1 \right) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \left(az^3 - \frac{3}{2}az^2 + 1 \right) = \infty$$

이므로 곡선 $y = az^3 - \frac{3}{2}az^2 + 1$ 과 직선 $y = 0$ 이 점 $(z_0, 0)$ 에서 접하는 $z_0 > 0$ 가 존재한다.

따라서 $3az_0^2 - 3az_0 = 0$, $az_0^3 - \frac{3}{2}az_0^2 + 1 = 0$ 이어야 하므로 $z_0 = 1$ 이고 $a = 2$ 이다.

그러므로 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$ 이다.

함수 $g(x) = |f(x) - x| = |2x^3 - 3x^2 + 1| = |(x - 1)^2(2x + 1)|$, 즉

$$g(x) = \begin{cases} (x - 1)^2(2x + 1), & x \geq -\frac{1}{2} \\ -(x - 1)^2(2x + 1), & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

따라서 $x \neq -\frac{1}{2}$ 일 때는 함수 $g(x)$ 가 미분가능하다. 그러나

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{g\left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = -\frac{9}{2}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{g\left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{9}{2}$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서만 미분가능하지 않다.

따라서 $p = -\frac{1}{2}$ 이다.

[단국대학교 문항카드 9]

1. 일반정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오후 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	극한, 미분법, 함수의 극대와 극소, 적분법, 정적분
예상 소요 시간	75 분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

<p>(가) 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 이 역함수가 미분가능할 때,</p> $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
<p>(나) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{또는} \quad x \rightarrow a \text{일 때 } f(x) \rightarrow L$ <p>과 같이 나타낸다.</p>
<p>(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면</p> $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$

[문제 1] 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \ln x + 2x^2 + ax + b$ 가 역함수를 갖고, 0이 아닌 실수 L 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left((f^{-1})'(x) \times \left\{ \ln \frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(1)} \right\}^2 \right) = L$$

일 때, $a+b+L$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수) (15점)

[문제 2] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x) = \frac{(x-2)g'(x)}{g(x)}$ 와
0이 아닌 실수 c 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 2$
 (2) $\lim_{x \rightarrow c} h(|x|)$ 가 존재하지 않는다.
 (3) $g(c) = 18c$

$g(2c)$ 의 값을 구하시오. (20점)

[문제 3] 함수 $k(x) = x + \sin x$ 에 대하여 함수 $F(t)$ 와 상수 α, β 를 다음과 같이 정의하자.

- (1) $F(t) = \int_0^{\pi t} \cos(k^{-1}(y))dy$
 (2) α 는 $0 < t < 8$ 에서 $F(t)$ 가 극댓값인 t 의 값 중 가장 큰 값
 (3) β 는 $0 < t < 8$ 에서 $F(t)$ 가 극솟값인 t 의 값 중 가장 큰 값

$F(\beta) - F(\alpha)$ 의 값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

- ▶ [문제 1] 역함수의 미분법을 활용할 수 있는지를 평가
- ▶ [문제 2] 함수의 극한을 이해하고 있는지를 평가
- ▶ [문제 3] 극값을 판정하고 치환적분을 할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 - [12수학II01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.
		[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 - [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
		[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법

문항 및 제시문		관련 성취기준
		- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	<p>[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한</p> <p>- [12수학 II 01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법</p> <p>- [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.</p> <p>[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법</p> <p>- [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
논제 1-1	교육과정	<p>[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한</p> <p>- [12수학 II 01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법</p> <p>- [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한</p> <p>- [12수학 II 01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.</p> <p>[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법</p> <p>- [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.</p>
논제 1-2	교육과정	<p>[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한</p> <p>- [12수학 II 01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - ② 도함수</p> <p>- [12수학 II 02-04] 함수 $y = x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.</p> <p>- [12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</p>
	성취기준·성취수준	<p>[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한</p> <p>- [12수학 II 01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.</p> <p>[수학 II] - (2) 미분 - (나) 도함수</p> <p>- [12수학 II 02-04] 함수 $y = x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.</p> <p>- [12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</p>
논제 1-3	교육과정	<p>[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용</p> <p>- [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다</p>

문항 및 제시문		관련 성취기준
		[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 - [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
		[미적분] - (3)적분법 - ① 여러 가지 적분법 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다
		[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 - [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (3)적분법 - (가) 여러 가지 적분법 - [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	이준열 외	천재교육	2020	12-13, 60-68, 83-89
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	102-103
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	132-134

5. 문항 해설

- ▶ [문제 1] 함수의 극한 개념 및 역함수의 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
- ▶ [문제 2] 함수의 성질과 극한 개념 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
- ▶ [문제 3] 역함수의 미분법 및 적분법을 활용하여 극값 판정의 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$a = -4$ 를 제시	5

하위 문항	채점 기준	배점
	$b = \frac{5}{2} + \ln 2$ 를 제시	5
	정답을 제시	5
1-2	$g(x) = (x-2)^2(x+r)$ 를 제시	5
	$c = -1$ 을 제시	10
	정답을 제시	5
1-3	극값을 갖는 $k^{-1}(\pi t)$ 의 값을 제시	5
	$\alpha = \frac{13}{2} + \frac{1}{\pi}$, $\beta = \frac{15}{2} - \frac{1}{\pi}$ 을 제시	5
	정답을 제시	10

7. 예시 답안

[논제 1] $f^{-1}(x) = y$ 라 하면 $f(p) = 1$ 인 양의 실수 p 가 존재하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left((f^{-1})'(x) \times \left\{ \ln \frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(1)} \right\}^2 \right) = \lim_{y \rightarrow p} \left\{ \frac{1}{f'(y)} \times \left(\ln \frac{y}{p} \right)^2 \right\} = L \neq 0$$

을 만족시킨다. $\lim_{y \rightarrow p} \ln \frac{y}{p} = 0$ 이므로 주어진 극한이 0이 아닌 값으로 수렴하기 위해서는

$$\lim_{y \rightarrow p} f'(y) = f'(p) = 0$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면 모든 양수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이거나 모든 양수 x 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다. 그런데 $f'(x) = \frac{1}{x} + 4x + a$ 에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$ 이므로 모든 양수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야

한다. $f'(p) = 0$ 이므로 $f'(p)$ 는 $f'(x)$ 의 최솟값이다. 따라서 $f''(p) = -\frac{1}{p^2} + 4 = 0$ 이므로 $p = \frac{1}{2}$ 이다.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2 + a = 0$ 이므로 $a = -4$ 이다. 또한 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 + b = 1$ 이므로 $b = \frac{5}{2} + \ln 2$ 이다.

$$L = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{f'(y)} \times \left(\ln \frac{y}{p} \right)^2 \right\} = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\left(\ln y - \ln \frac{1}{2} \right)^2}{\frac{1}{y} + 4y - 4} = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{\ln y - \ln \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{2}} \right)^2 \times \frac{y}{4} \right\} = \frac{1}{2}$$

이므로 $a + b + L = -1 + \ln 2$ 이다.

[논제 2] 조건 (1)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \frac{g'(x)}{g(x)} = 2$ 이므로 $g(2) = 0$ 이다. 따라서 $1 \leq k \leq 3$ 인 자연수 k 와 $p(2) \neq 0$ 인 $(3-k)$ 차 다항식 $p(x)$ 에 대하여

$$g(x) = (x-2)^k p(x)$$

$g'(x) = k(x-2)^{k-1} p(x) + (x-2)^k p'(x)$ 로부터

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ (x-2) \frac{g'(x)}{g(x)} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ (x-2) \frac{k(x-2)^{k-1} p(x) + (x-2)^k p'(x)}{(x-2)^k p(x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{kp(x) + (x-2)p'(x)}{p(x)} \\ &= k \end{aligned}$$

이고 $k = 2$ 이다. 따라서 상수 r ($r \neq -2$)에 대하여

$$g(x) = (x-2)^2(x+r) \dots \dots \dots (*)$$

그러므로

$$h(|x|) = \frac{3|x| + 2r - 2}{|x| + r} = \begin{cases} \frac{3x + 2r - 2}{x + r}, & x \geq 0 \\ \frac{-3x + 2r - 2}{-x + r}, & x < 0 \end{cases}$$

이고 조건 (2)에 의하여 $c = r$ ($c < 0$) 또는 $c = -r$ ($c > 0$)이어야 한다. 따라서 $r < 0$ 이어야 한다. 그런데 $c = -r$ 이면 $g(c) = 0$ 이 되므로 조건 (3)에 모순이다. 따라서 $c = r$ ($r < 0$, $r \neq -2$)이다.

$$g(c) = g(r) = (r-2)^2(2r) = 18r$$

로부터 $c = r = -1$ 이고

$$g(x) = (x-2)^2(x-1)$$

그러므로 $g(2) = g(-2) = -48$

(참고) (*)은 다음과 같은 방법으로도 설명할 수 있다.

조건 (1)로부터 $g(2) = 0$ 이다. 따라서 2차 다항식 $p(x)$ 에 대하여 $g(x) = (x-2)p(x)$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)p(x) + (x-2)^2 p'(x)}{(x-2)p(x)}$$

이므로, $p(2) \neq 0$ 이면 위의 극한값이 1이 되어 조건 (1)에 맞지 않는다.

따라서 $p(2) = 0$ 이고 1차 다항식 $q(x)$ 에 대하여 $g(x) = (x-2)^2 q(x)$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)^2 q(x) + (x-2)^3 q'(x)}{(x-2)^2 q(x)}$$

이고 $q(2) = 0$ 이면 위의 극한값은 3이 되어 조건 (1)에 맞지 않는다.

그러므로 $g(x) = (x-2)^2(x+r)$, ($r \neq -2$)이다.

[문제 3] 함수 $F(t)$ 를 미분하면,

$$F'(t) = \pi \cos(k^{-1}(\pi t)) \dots \dots \dots (**)$$

그런데 $k'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ 이므로 함수 $k(x)$ 는 증가함수이고 $k^{-1}(x)$ 도 증가함수이다. 따라서

$t \in (0, 8)$ 이면 $k^{-1}(\pi t) \in (0, 8\pi)$ 이므로 (**)에서

$$k^{-1}(\pi t) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2} \dots \dots \dots (***)$$

일 때 $F'(t) = 0$ 이다. 또한,

$$F''(t) = -\pi \sin(k^{-1}(\pi t)) \frac{d}{dt} k^{-1}(\pi t)$$

여기에서 $k^{-1}(\pi t) = x$ 라 하면 $\pi t = k(x) = x + \sin x$, 즉, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\pi}(1 + \cos x)$ 이므로

$\frac{d}{dt} k^{-1}(\pi t) = \frac{\pi}{1 + \cos(k^{-1}(\pi t))}$ 이다. 따라서

$$F''(t) = -\frac{\pi^2 \sin(k^{-1}(\pi t))}{1 + \cos(k^{-1}(\pi t))}$$

여기에서 (***)를 만족시키는 t 에서는

$$\cos(k^{-1}(\pi t)) = 0$$

$$\sin(k^{-1}(\pi t)) = \begin{cases} 1, & k^{-1}(\pi t) = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2} \\ -1, & k^{-1}(\pi t) = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{15\pi}{2} \end{cases}$$

여기에서 $k^{-1}(\pi t) = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}$ 이면 $F''(t) < 0$ 이므로 함수 $F(t)$ 는 극댓값을 갖고,

$k^{-1}(\pi t) = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}$ 이면 $F''(t) > 0$ 이므로 함수 $F(t)$ 는 극솟값을 갖는다.

그런데 $k^{-1}(\pi t)$ 는 t 의 증가함수이므로

$$\alpha = \frac{1}{\pi} k\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \frac{13}{2} + \frac{1}{\pi}, \quad \beta = \frac{1}{\pi} k\left(\frac{15\pi}{2}\right) = \frac{15}{2} - \frac{1}{\pi}$$

따라서

$$F(\beta) - F(\alpha) = F\left(\frac{15}{2} - \frac{1}{\pi}\right) - F\left(\frac{13}{2} + \frac{1}{\pi}\right) = \int_{\frac{13}{2}\pi + 1}^{\frac{15}{2}\pi - 1} \cos(k^{-1}(y)) dy$$

여기에서 $k^{-1}(y) = x$ 로 치환하면 $y = k(x) = x + \sin x$ 이므로

$$k\left(\frac{13}{2}\pi\right) = \frac{13}{2}\pi + 1, \quad k\left(\frac{15}{2}\pi\right) = \frac{15}{2}\pi - 1, \quad dy = (1 + \cos x)dx \text{ 에서}$$

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\frac{13}{2}\pi}^{\frac{15}{2}\pi} \cos x (1 + \cos x) dx = \int_{\frac{13}{2}\pi}^{\frac{15}{2}\pi} \left(\cos x + \frac{\cos(2x) + 1}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} - 2$$

[단국대학교 문항카드 10]

1. 일반정보		
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) 문항번호	자연계열, 오후 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분법, 함수의 극대와 극소, 적분법, 정적분
예상 소요 시간	45분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

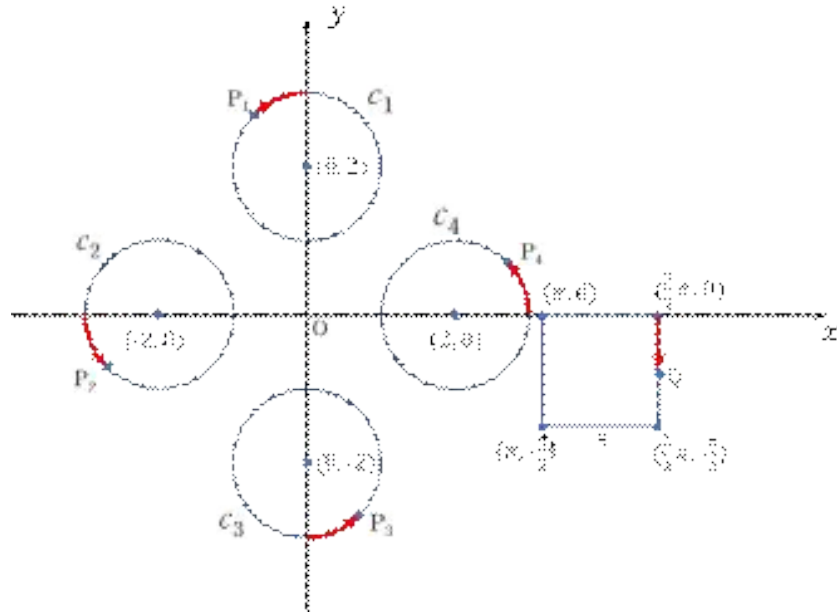
(가) 두 변수 x, y 의 관계를 새로운 변수 t 를 이용하여 $x = f(t), y = g(t)$ 와 같이 나타낼 때, t 를 매개변수라 한다.
(나) 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌거나 음에서 양으로 바뀌면 $f(a)$ 는 극값이다.
(다) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

아래 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 각각 $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1인 4개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4 와 꼭짓점이 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right), \left(\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right), (\pi, 0)$ 인 정사각형 S 가 있다. 실수 $t (t \geq 0)$ 에 대하여 좌표평면 위를 이동하는 5개의 점 P_1, P_2, P_3, P_4, Q 는 다음과 같은 규칙을 따른다.

- 좌표평면 위의 네 점 $R_1(0, 3), R_2(-3, 0), R_3(0, -3), R_4(3, 0)$ 에 대하여 점 P_i 는 $t = 0$ 일 때 점 R_i 를 출발하여 $t (t > 0)$ 초 동안 원 C_i 위를 시계 반대 방향으로 t 만큼 이동한다.

(단, $i = 1, 2, 3, 4$)

- 점 Q 는 $t = 0$ 일 때 점 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ 을 출발하여 t ($t > 0$) 초 동안 정사각형 S 위를 시계 방향으로 t 만큼 이동한다.



출발 후 t 초가 경과했을 때,

- 두 점 P_1 과 P_3 사이의 거리를 $\ell(t)$
- 사각형 $P_1P_2P_3P_4$ 의 넓이를 $A(t)$
- 삼각형 P_1P_3Q 의 무게중심의 x 좌표를 $f(t)$

라 하자.

[문제 1] $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ell(t))^4 dt - 40 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ell(t))^2 dt + 200\pi$ 라 하자.

$0 < t < a$ 에서 함수 $A(t)$ 의 모든 극값의 합을 구하시오. (20점)

[문제 2] $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10 \int_0^{\pi} (f(t))^2 dt$ 의 값을 구하시오. (25점)

3. 출제 의도

- ▶ [문제 1] 매개변수를 이해하고 극값을 판정할 수 있는지를 평가
- ▶ [문제 2] 정적분의 성질과 부분적분법을 활용할 수 있는지를 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 (가, 나, 다)	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 - [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
		[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 - [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분] - (3)적분법 - ① 여러 가지 적분법 - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다
		[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문제 2-1	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 - [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
		[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 - [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 - [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
		[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 - [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
문제 2-2	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 - [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
		[미적분] - (3)적분법 - ① 여러 가지 적분법 - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 - [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
		[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 - [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
		[미적분] - (3)적분법 - (가) 여러 가지 적분법 - [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	이준열 외	천재교육	2020	83-96
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2020	85-85, 137-139
	미적분	박교식 외	동아출판	2020	91-93, 140-145

5. 문항 해설

- ▶ [문제 1] 매개변수 및 적분법을 활용하여 극값 판정의 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.
- ▶ [문제 2] 매개변수, 정적분의 성질과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$\ell(t)$ 를 제시	5
	$A(t)$ 를 제시	5
	$a = 64\pi$ 임을 제시	5
	정답을 제시	5
2-2	점 Q를 제시	7
	$f(t)$ 를 제시	8
	정답을 제시	10

7. 예시 답안

[문제 1] 반지름이 1 이므로, 호의 길이가 t 이면 중심각은 t 이다.

실수 $t \geq 0$ 에 대하여 점 P_1, P_2, P_3, P_4 의 좌표는

$$\begin{aligned} P_1(-\sin t, 2 + \cos t) & \dots\dots\dots (*) \\ P_2(-2 - \cos t, -\sin t) \\ P_3(\sin t, -2 - \cos t) \\ P_4(2 + \cos t, \sin t) \end{aligned}$$

이므로 $(\ell(t))^2 = (-2\sin t)^2 + (4 + 2\cos t)^2 = 20 + 16\cos t$ 이다.

그러므로

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\ell(t))^2 - 20)^2 dt = 256 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 128 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 64\pi$$

한편

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_1P_4} = \sqrt{(-\sin t + 2 + \cos t)^2 + (2 + \cos t + \sin t)^2} = \sqrt{10 + 8\cos t}$$

이므로 사각형 $P_1P_2P_3P_4$ 는 모든 변의 길이가 $\sqrt{10 + 8\cos t}$ 이고 두 대각선은 서로를 수직 이등분한다.

또한 마찬가지로 방법으로 두 대각선의 길이는

$$\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_4} = \sqrt{20 + 16\cos t}$$

로 같으므로 사각형 $P_1P_2P_3P_4$ 는 정사각형이다. 따라서 $A(t) = 10 + 8\cos t$ 이고 $A(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $A'(t) = -8\sin t = 0$ 에서 $t = \pi, 2\pi, \dots, 63\pi$ 이다. 각 점의 좌우에서 $A'(t)$ 의 부호가 바뀌므로, $A(t)$ 의 극값은

$$A(t) = \begin{cases} 18, & t = 2\pi, 4\pi, \dots, 62\pi \\ 2, & t = \pi, 3\pi, \dots, 63\pi \end{cases}$$

그러므로 구간 $0 < t < 64\pi$ 에서의 함수 $A(t)$ 의 모든 극값의 합은 $18 \times 31 + 2 \times 32 = 622$ 이다.

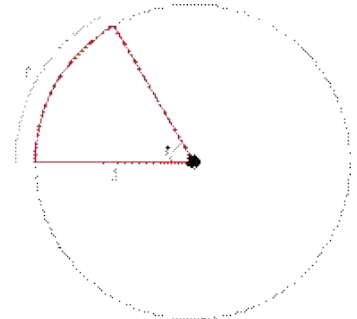
[문제 2] 모든 $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$ 에 대하여 점 Q 의 좌표는

$$\begin{cases} Q\left(\frac{3\pi}{2}, -t\right), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ Q\left(2\pi - t, -\frac{\pi}{2}\right), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ Q\left(\pi, t - \frac{3\pi}{2}\right), & \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \dots\dots\dots (**)$$

그러므로, (*)과 (**)을 이용하면 함수 $f(t)$ 는

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{3}t + \frac{2\pi}{3}, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ \frac{\pi}{3}, & \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

따라서,



$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10 \int_0^{\pi} (f(t))^2 dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2 dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(t))^2 dt - 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(t))^2 dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2 dt - 10 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(t))^2 dt + \frac{\pi^2}{9} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (10 + 8 \cos t) dt - \frac{5}{4} \pi^3
 \end{aligned}$$

먼저

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2 dt - 10 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(t))^2 dt \\
 &= \frac{8}{9} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (t - 2\pi)^2 \cos t dt \\
 &= \frac{8}{9} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (t^2 - 4\pi t + 4\pi^2) \cos t dt
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + c_1, \quad \int t \cos t dt = t \sin t + \cos t + c_2$$

이므로 (c_1, c_2 는 적분상수)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2 dt - 10 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(t))^2 dt \\
 &= \frac{8}{9} [t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{32\pi}{9} [t \sin t + \cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{32\pi^2}{9} [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \frac{16}{9} + \frac{16}{9} \pi - 2\pi^2
 \end{aligned}$$

또한

$$\frac{\pi^2}{9} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (10 + 8 \cos t) dt = \frac{\pi^2}{9} (5\pi + 8 [\sin t]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}) = \frac{5}{9} \pi^3 - \frac{8}{9} \pi^2$$

그러므로

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10 \int_0^{\pi} (f(t))^2 dt &= \frac{16}{9} + \frac{16}{9} \pi - 2\pi^2 + \frac{5}{9} \pi^3 - \frac{8}{9} \pi^2 - \frac{5}{4} \pi^3 \\
 &= \frac{16}{9} + \frac{16}{9} \pi - \frac{26}{9} \pi^2 - \frac{25}{36} \pi^3
 \end{aligned}$$