부록 3 문항카드 양식 3 (자연1계열 – 수학)

3-1. 문항카드 양식 1 (자연1계열)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 1 (자연대·IT대) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	인수분해, 함수의 증가와 감소, 속도와 거리
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

【문제 1】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서 점 P의 위치가 x_0일 때, 시각 $t=b$에서 점 P의 위치 x는

$$x = x_0 + \int_a^b v(t)\,dt$$

[출처 : 수학 II 「정적분의 활용」]

원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A와 B는 다음 조건을 모두 만족한다.

(i) 점 A의 시각 t에서의 속도는 $6t-2$이다.
(ii) 점 B의 시각 t에서의 위치는 점 A의 시각 t^2에서의 위치와 같다.

다음 문항에 답하시오.

(1) 두 점 A와 B가 시각 $t=0$ 이후에 만나는 시각을 모두 구하시오.

(2) 두 점 A와 B가 시각 $t=0$ 이후에 마지막으로 만날 때까지 두 점 사이의 거리가 최대가 되는 시각과 그 때 두 점 사이의 거리를 구하시오.

3. 출제 의도

함수의 미분과 적분을 활용하여 속도와 거리의 관계, 함수의 증가와 감소와 관련된 정보를 계산하는 능력을 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (1) 문자와 식 - 3 인수분해 수학 II - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 수학 II - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
관련 성취기준	과목명: 수학 성취기준 1: [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. 과목명: 수학 II 성취기준 1: [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 성취기준 2: [12수학II03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	29-
	수학	황선욱 외 8명	미래엔	2018	34-
	수학 II	권오남 외 14명	교학사	2018	103- 149-
	수학 II	홍성복 외 10명	지학사	2018	74- 140-

5. 문항 해설

제시된 점 A와 B의 속도로부터 위치를 계산하고, 두 점 사이의 거리의 도함수를 명확하게 계산하여 극점을 구하고 이로부터 거리가 최대가 되는 시각을 올바르게 찾는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	주어진 조건으로부터 A와 B의 위치를 올바른 함수로 표현하고 이로부터 위치가 같은 시각을 정확하게 계산할 수 있다.	12
(2)	주어진 조건으로부터 A와 B 사이의 거리를 올바른 함수로 표현하고 이 함수의 최대·최소를 정확하게 계산할 수 있다.	18

7. 예시 답안

(1) 점 A의 시각 t에서의 위치를 $A(t)$, 점 B의 시각 t에서의 위치를 $B(t)$라고 하면

$$A(t)=\int_0^t (6x-2)dx = 3t^2-2t,\ \ B(t)=A(t^2)=3t^4-2t^2$$

이다. 이 때 $d(t)=B(t)-A(t)$로 놓으면

$$d(t)=B(t)-A(t)=3t^4-2t^2-(3t^2-2t)=3t^4-5t^2+2t=t(t-1)(3t^2+3t-2)$$

이고, 점 A와 점 B가 $t=0$ 이후 다시 만나는 시각은 방정식 $d(t)=0$의 양수 해이다. 이 양수 해는 $t=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}$, $t=1$이다.

(2) $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}<1$이므로 두 점은 $t=1$에서 마지막으로 만난다.

$0<t<1$의 범위에서 두 점 사이의 거리 $|d(t)|$가 최대가 되기 위해서는 $d(t)$가 최대 또는 최소여야 한다. 함수 $d(t)$의 도함수는

$$d'(t)=12t^3-10t+2=2(t+1)(6t^2-6t+1)$$

이므로 $d(t)$는 $t_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$과 $t_2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$에서 극값을 갖고 $0<t_1<t_2<1$이다.

t_1과 t_2가 $6t^2-6t+1=0$의 해이므로 $t_i^2=t_i-\frac{1}{6}$, $t_i^2-t_i=-\frac{1}{6}$ (단, $i=1,2$)을 이용하여 $d(t_1)$과 $d(t_2)$를 구하면 다음과 같다.

$$d(t_1)=(t_1^2-t_1)(3t_1^2+3t_1-2)=-\frac{1}{6}\left(6t_1-\frac{5}{2}\right)=-t_1+\frac{5}{12}=\frac{-1+2\sqrt{3}}{12}$$

$$d(t_2)=-\frac{1}{6}\left(6t_2-\frac{5}{2}\right)=-t_2+\frac{5}{12}=\frac{-1-2\sqrt{3}}{12}$$

$|d(t_2)|>|d(t_1)|$이므로 $0<t<1$에서 두 점 사이의 거리는 시각 $t_2=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$에서 최대가 되고 이 때의 거리는 $|d(t_2)|=\frac{1+2\sqrt{3}}{12}$이다.

3-2. 문항카드 양식 2 (자연1계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 1 (자연대·IT대) / 문제 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 I, 수학 II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>함수의 연속성, 삼각함수, 정적분</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">20분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【문제 2】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

[출처 : 미적분 「여러 가지 적분법」]

$0 \le x \le 2$에서 정의된 증가함수 $f(x)$는 2보다 큰 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(x)$는 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,2)$에서 미분가능하다.

(ii) $f(0)=0$

(iii) 닫힌구간 $[0,1]$에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(1+x)+af(1-x)=3 \text{ (단, } a>2)$$

(iv) $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 정적분 $\int_0^{f(1)} g(x)\,dx$가 최대가 되는 실수 a의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

역함수의 성질 및 도함수와 정적분의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 함수의 최댓값을 구하는 능력을 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 - (4) 함수 - 1 함수 수학 II - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 미적분 - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
관련 성취기준	과목명: 수학 성취기준 1: [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. 과목명: 수학 II 성취기준 1: [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 과목명: 미적분 성취기준 1: [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외 14명	교학사	2018	223-
	수학	황선욱 외 8명	미래엔	2018	227-
	수학 II	권오남 외 14명	교학사	2018	88-
	수학 II	홍성복 외 10명	지학사	2018	83-
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	134-
	미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2019	143-

5. 문항 해설

제시된 조건으로부터 주어진 함수의 정적분을 a에 대한 함수로 올바르게 표현하고 이 함수가 최대가 되는 a의 값을 도함수의 성질을 이용하여 정확하게 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

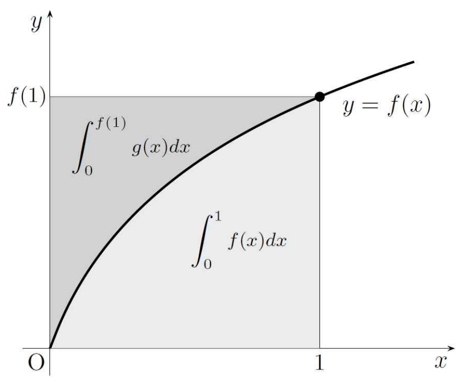
하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 조건으로부터 문제가 원하는 정적분을 올바른 함수로 표현하고 이로부터 최대·최소를 정확하게 계산할 수 있다.	20

7. 예시 답안

조건 (ii)에 의해 $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$와 역함수 $g(x)$는 관계식

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^{f(1)} g(x)dx = 1\times f(1)$$

을 만족한다.



조건 (iii)에 $x=0$을 대입하면 $f(1)+af(1)=(a+1)f(1)=3$이므로 $f(1)=\dfrac{3}{a+1}$이다.

조건 (iii), (iv)와 치환적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} 3 = \int_0^1 3dx &= \int_0^1 (f(1+x) + af(1-x))dx \\ &= \int_1^2 f(x)dx + a\int_0^1 f(x)dx \\ &= 2 - \int_0^1 f(x)dx + a\int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

이므로 $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{a-1}$ 이다.

따라서 정적분 $\int_0^{f(1)} g(x)dx$ 는 실수 a에 대한 함수 $h(a)$로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h(a) = \int_0^{f(1)} g(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{a+1} - \frac{1}{a-1} = \frac{2a-4}{a^2-1} \quad (\text{단, } a > 2)$$

도함수 $h'(a) = \dfrac{2(a^2-1) - 2a(2a-4)}{(a^2-1)^2} = \dfrac{-2a^2+8a-2}{(a^2-1)^2}$ 는 $a = 2 \pm \sqrt{3}$ 에서 0이므로 $h(a)$의 증가와 감소를 다음과 같은 표로 나타낼 수 있다.

a	2	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$h'(a)$		+	0	-
$h(a)$		↗	$2-\sqrt{3}$	↘

그러므로 함수 $h(a)$는 구간 $(2, \infty)$에서 $a = 2+\sqrt{3}$ 일 때 최댓값 $2-\sqrt{3}$ 을 갖는다.

3-3. 문항카드 양식 3 (자연1계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 1 (자연대·IT대) / 문제 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>확률의 덧셈정리, 곱셈정리, 조건부확률</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">30분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【문제 3】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

(가) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

[출처 : 확률과 통계 「확률의 뜻과 활용」]

(나) 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0,\ \mathrm{P}(B) > 0)$$

[출처 : 확률과 통계 「조건부확률」]

흰 구슬 2개와 검은 구슬 3개가 들어 있는 주머니가 있다. A부터 시작하여 A와 B가 흰 구슬이 모두 나올 때까지 번갈아가며 구슬을 1개씩 임의로 꺼낸다. 두 번째 흰 구슬을 꺼낸 사람이 승리한다고 할 때, 다음 문항에 답하시오. (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.)

(1) A가 승리할 확률을 구하시오.

(2) B가 승리했을 때, B가 꺼낸 구슬이 총 2개일 확률을 구하시오.

(3) 흰 구슬을 꺼낸 사람은 연이어 1개 더 구슬을 꺼내는 규칙을 추가했을 때, A가 승리할 확률을 구하시오.

3. 출제 의도

문제에서 주어진 상황을 이해하고, 조건부확률의 개념과 확률의 덧셈정리 및 곱셈정리를 활용하여 확률을 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	확률과 통계 - (2) 확률 - [2] 조건부확률 확률과 통계 - (3) 통계 - [1] 확률분포	
관련 성취기준	과목명: 확률과 통계	
	성취기준 1	[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준 2	[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
	성취기준 3	[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외 14명	비상교육	2019	53-, 73-
	확률과 통계	홍성복 외 10명	지학사	2019	62-, 82-

5. 문항 해설

주어진 조건을 이해하여 승리하는 모든 경우를 분류하고, 곱셈정리를 이용하여 각 경우의 확률을 계산한 후 덧셈정리로부터 각 경우의 확률을 더하여 승리할 확률을 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	A가 승리하기 위한 경우를 명확하게 제시하고 각 경우에 대한 확률을 곱셈정리를 이용하여 올바르게 계산한다.	9
(2)	B가 승리하기 위한 경우를 명확하게 제시하고 각 경우에 대한 확률을 정확하게 계산하여 주어진 조건부확률을 올바르게 계산한다.	9
(3)	추가조건을 정확하게 이해하여 A가 승리하기 위한 경우를 명확하게 제시하고 각 경우에 대한 확률을 곱셈정리를 이용하여 올바르게 계산한다.	12

7. 예시 답안

(1) A가 승리하기 위해서는 3번째 또는 5번째 뽑은 구슬이 두 번째 흰 구슬이어야 한다. 각각의 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

(i)

●○ ○●	○

(ii)

●●●○ ●●○● ●○●● ○●●●	○

(i)의 확률은 $2\times\frac{3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3}=\frac{1}{5}=0.2$이고, (ii)의 확률은 $4\times\frac{3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{2}{5}=0.4$이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{5}=0.6$이다.

(2) (1)에 의해 B가 승리할 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 이때 B가 꺼낸 구슬의 총 개수는 1개 또는 2개이다. 1개만 꺼내고 승리할 확률이 $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$이므로 2개를 꺼내고 승리할 확률은

$\frac{4}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$이다. 따라서 B가 승리했을 때, B가 꺼낸 구슬의 총 개수가 2개일 확률은 $\frac{3/10}{4/10}=\frac{3}{4}=0.75$이다.

(3) A가 승리하는 경우를 A가 첫 번째 꺼낸 구슬을 기준으로 나누어 보면 다음과 같다.

(i) 첫 번째 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 경우:

$$\begin{array}{cc|cccc} \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{A} \\ \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ \end{array}$$

이 때 확률은 $\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}=0.2$이다.

(ii) 첫 번째 꺼낸 구슬이 검은 구슬인 경우:

$$\begin{array}{cccc|cccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{B} & \mathrm{A} \\ \bullet & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ \end{array}$$

이 때 확률은 $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}=0.2$이다.

따라서 A가 승리할 확률은 $\frac{2}{5}=0.4$이다.

3-4. 문항카드 양식 4 (자연1계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 1 (자연대·IT대) / 문제 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 I, 수학 II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>함수의 연속성, 삼각함수, 정적분</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">20분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【문제 4】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

(가) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 넓이를 S라고 하면

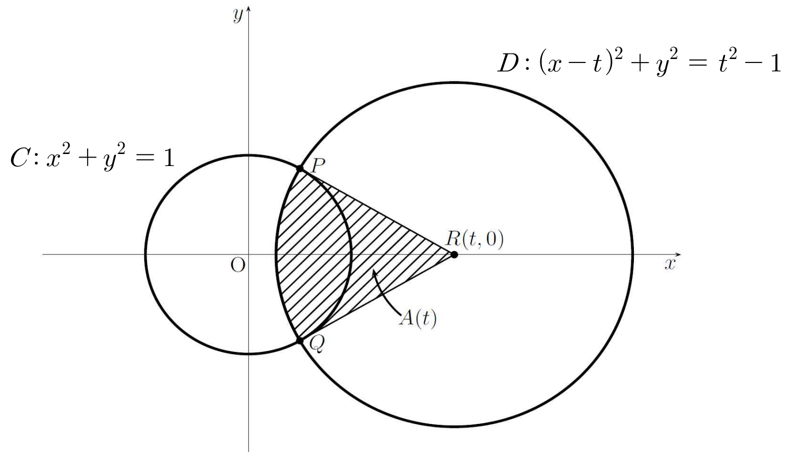
$$S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

[출처 : 수학 I 「삼각함수」]

(나) $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ (단, θ의 단위는 라디안)

[출처 : 미적분 「여러 가지 함수의 미분」]

좌표평면에 원 $C: x^2+y^2=1$과 원 $D: (x-t)^2+y^2=t^2-1$ $(t>1)$이 있다. <그림 1>과 같이 두 원의 교점을 P와 Q, 원 D의 중심을 R라고 할 때, 부채꼴 PRQ의 넓이를 $A(t)$라고 하자. 부채꼴 PRQ의 넓이의 변화율의 극한값 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{dA}{dt}$를 구하시오.



<그림 1>

3. 출제 의도

호도법을 올바르게 이해하고 도형의 넓이 및 합성함수의 도함수를 이용하여 극한을 올바르게 계산하는 능력을 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>수학 I - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
수학 II - (2) 미분 - 2 도함수
미적분 - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
미적분 - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">과목명: 수학 I</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="2">과목명: 수학 II</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="2">과목명: 미적분</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 10명	지학사	2018	69-
	수학 II	권오남 외 14명	교학사	2018	68-
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	51-
	미적분	김원경 외 14명	비상교육	2019	49-

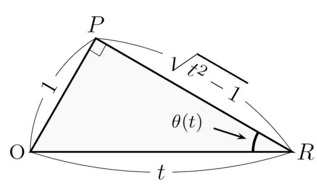
5. 문항 해설

주어진 조건으로부터 부채꼴의 넓이를 호도법을 이용하여 올바르게 계산하고 넓이의 도함수를 합성함수의 미분 및 삼각함수의 성질을 이용하여 알맞게 도출한 뒤 그 극한을 정확하게 계산하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	주어진 조건으로부터 부채꼴의 넓이를 올바른 함수로 표현하고 합성함수의 미분법을 이용하여 그 도함수를 구한 뒤, 극한을 정확하게 계산할 수 있다.	20

7. 예시 답안



$\angle PRO$의 크기를 $\theta(t)$라고 하자. 삼각형 PRO는 피타고라스의 정리에 의해 $\angle OPR = 90^\circ$인 직각삼각형이므로, 삼각형의 변의 길이와 삼각비의 정의에 의해 다음 관계가 성립한다.

$$\sin\theta(t) = \frac{1}{t}, \quad \cos\theta(t) = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \qquad \cdots\cdots ①$$

부채꼴 PRQ의 넓이 $A(t)$는

$$A(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{t^2-1})^2 \cdot 2\theta(t) = (t^2-1)\cdot\theta(t)$$

이므로 넓이의 t에 대한 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{dA}{dt} = 2t\cdot\theta(t) + (t^2-1)\cdot\frac{d\theta}{dt} \qquad \cdots\cdots ②$$

또한 부등식 $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$와 ①로부터

$$\frac{1}{t} < \theta(t) < \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

이고 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = 0$이므로 함수의 극한의 성질에 의해 $t\to\infty$이면 $\theta\to 0$이다.

먼저 ②의 우변 첫째 항의 극한값은 ①에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{t\to\infty} 2t\cdot\theta(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{\sin\theta(t)}\cdot\theta(t)\right) = 2\cdot\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right) = 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

$\frac{d\theta}{dt}$를 구하기 위해 ①의 첫 번째 식의 양변을 미분하고 두 번째 식을 대입하면 다음과 같다.

$$-\frac{1}{t^2} = \frac{d}{dt}\sin\theta(t) = \cos\theta(t)\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

이로부터

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$$

을 얻는다. 따라서 ②의 우변 둘째 항의 극한값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{t\to\infty}(t^2-1)\cdot\frac{d\theta}{dt} = \lim_{t\to\infty}\left(-(t^2-1)\cdot\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right) = -1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

위에서 계산한 ③과 ④로부터 넓이 $A(t)$의 변화율의 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dA}{dt} = \lim_{t\to\infty}\left(2t\cdot\theta(t) + (t^2-1)\cdot\frac{d\theta}{dt}\right) = 2 - 1 = 1$$

부록 4 문항카드 양식 3 (자연2계열 – 수학)

4-1. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	신입학 수시 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 2 (공대) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II
	핵심개념 및 용어	함수의 연속성, 삼각함수, 정적분
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

【문제 1】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

[출처 : 수학 II 「부정적분과 정적분」]

주기가 1인 주기함수 $f(x)$는 $0 \le x \le 1$에서 $f(x) = a - |2x-1|$이다. 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자. ($[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

$$g(x) = \frac{f(x)}{[x+1]\,[x+2]} \quad (x \ge 0)$$

다음 문항에 답하시오.

(1) 임의의 자연수 k에 대하여, 함수 $g(x)$가 $x = k$에서 연속이 되도록 상수 a의 값을 정하시오.

(2) 문항 (1)에서 구한 상수 a에 대하여, n이 자연수일 때 $\int_0^n g(x)|\sin \pi x|\,dx$ 를 n의 식으로 나타내시오.

3. 출제 의도

함수의 연속성 개념, 삼각함수의 주기성 및 여러 가지 적분법을 적용해 적분을 구하는 능력을 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>수학 II - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
수학 II - (3) 적분 - 2 정적분
수학 I - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">과목명: 수학 II</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td colspan="2">과목명: 수학 I</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	30,123
	수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	30,126
	수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2018	74
	수학 I	김원경 외 14인	비상교육	2019	71

5. 문항 해설

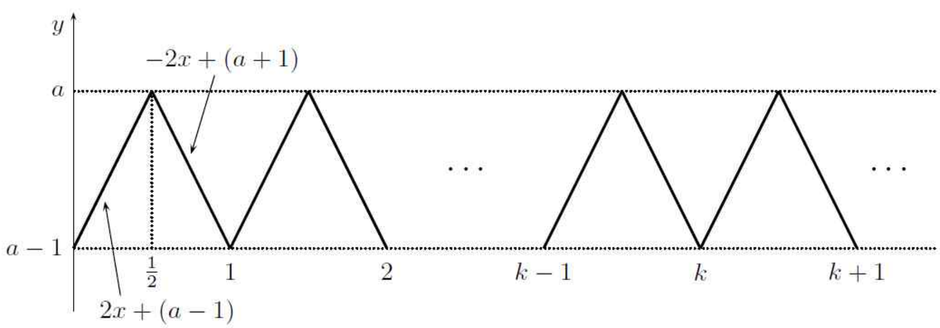
주기함수 f를 이용해 정의된 함수 g가 연속이기 위한 상수의 조건을 구하고, 함수 g의 정적분을 함수 f와 삼각함수의 주기성 및 부분적분법과 치환적분법을 이용하여 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	주기함수 f를 이용해 정의된 함수 g가 연속이기 위한 상수 a의 조건을 구한다	9
(2)	함수 g의 정적분을 함수 f와 삼각함수의 주기성 및 부분적분법과 치환적분법을 적용하여 구한다	21

7. 예시 답안

(1) 함수 $f(x)$는 주기가 1인 주기함수이고 $0 \le x < \frac{1}{2}$일 때 $2x+(a-1)$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$일 때 $-2x+(a+1)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



또한 $f(0)=f(1)=a-1$이므로 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이다.

함수 $g(x)$의 $x=k$ 에서의 함숫값은 $g(k)=\dfrac{f(k)}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{a-1}{(k+1)(k+2)}$이다.

$x=k$ 에서의 좌극한은 함수의 극한의 성질과 $f(x)$의 연속성 $\left(\lim_{x\to k} f(x)=f(k)\right)$을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{x\to k-}\frac{f(x)}{[x+1][x+2]}=\frac{\lim_{x\to k-}f(x)}{\lim_{x\to k-}[x+1][x+2]}=\frac{f(k)}{k(k+1)}=\frac{a-1}{k(k+1)}$$

비슷한 방법으로 $x=k$ 에서의 우극한을 다음과 같이 구한다.

$$\lim_{x\to k+}\frac{f(x)}{[x+1][x+2]}=\frac{\lim_{x\to k+}f(x)}{\lim_{x\to k+}[x+1][x+2]}=\frac{f(k)}{(k+1)(k+2)}=\frac{a-1}{(k+1)(k+2)}$$

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 연속이기 위해서는 함숫값과 좌극한 및 우극한이 모두 같아야 하므로 다음 식을 만족해야 한다.

$$\frac{a-1}{k(k+1)}=\frac{a-1}{(k+1)(k+2)}$$

따라서 $a=1$ 이다.

(2) 문항 (1)에서 구한 $a=1$을 대입하면 함수 $f(x)$는 $0\le x<\frac{1}{2}$일 때 $2x$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$일 때 $-2x+2$이다. 이때 정적분의 성질에 의하여 구하고자 하는 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\int_0^n g(x)\,|\sin\pi x|\,dx\\
&=\int_0^1\frac{f(x)}{1\cdot 2}|\sin\pi x|\,dx+\int_1^2\frac{f(x)}{2\cdot 3}|\sin\pi x|\,dx+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{f(x)}{n\cdot(n+1)}|\sin\pi x|\,dx\\
&=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)}\int_{k-1}^k f(x)|\sin\pi x|\,dx
\end{aligned}$$

정적분 $\int_{k-1}^k f(x)|\sin\pi x|\,dx$ 를 구하기 위해 $t=x-(k-1)$로 놓고 치환적분법과 함수 $f(x)$의 주기성을 이용하면 다음 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\int_{k-1}^k f(x)|\sin\pi x|\,dx&=\int_0^1 f(t+k-1)\left|(-1)^{k-1}\sin\pi t\right|dt\\
&=\int_0^1 f(t)\sin\pi t\,dt\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}2t\sin\pi t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(2-2t)\sin\pi t\,dt
\end{aligned}$$

위 식의 두 번째 적분에서 $u=1-t$로 치환하면

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2-2t)\sin\pi t\,dt=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2u\sin\pi u\,du$$

이므로

$$\int_{k-1}^{k}f(x)|\sin\pi x|\,dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}4t\sin\pi t\,dt$$

이다. 부분적분법을 이용하여 $\int_{0}^{\frac{1}{2}}4t\sin\pi t\,dt$을 구하면

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}4t\sin\pi t\,dt=\left[-4t\cdot\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_{0}^{\frac{1}{2}}+\int_{0}^{\frac{1}{2}}4\cdot\frac{1}{\pi}\cos\pi t\,dt=\left[\frac{4}{\pi^2}\sin\pi t\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\pi^2}$$

따라서 $\int_{0}^{n}g(x)|\sin\pi x|\,dx$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{n}g(x)|\sin\pi x|\,dx&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\int_{k-1}^{k}f(x)|\sin\pi x|\,dx\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\cdot\frac{4}{\pi^2}\\&=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

4-2. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 2 (공대) / 문제 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>정적분의 활용, 함수의 극한, 도함수의 활용</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">20분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【문제 2】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

[출처 : 수학 II 「정적분의 활용」]

곡선 $C: y=x^3+ax$ 위의 점 P에서의 접선 ℓ과 곡선 C가 만나는 다른 점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 중점 R의 x좌표를 b라고 할 때, 다음 문항에 답하시오.

(1) 점 P와 점 Q의 x좌표를 각각 b의 식으로 나타내시오.

(2) 곡선 C와 선분 PR 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 K, 곡선 C와 선분 QR 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 L이라 할 때, 극한값 $\lim_{b\to\infty}\frac{K}{L}$을 구하시오.

3. 출제 의도

도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구하는 능력, 정적분의 활용하여 도형의 넓이를 구하는 능력 및 함수의 극한을 계산하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td>수학 II - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한
수학 II - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
미적분 - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용</td></tr>
<tr><td>관련 성취기준</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">과목명: 수학 II</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="2">과목명: 미적분학</th></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	19,133
	수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	19,137
	미적분	박교식 외 19인	동아출판	2019	101
	미적분	김원경 외 14인	비상교육	2019	96
기타					

5. 문항 해설

도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구하고, 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 활용하여 구한 후, 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	접선 ℓ의 방정식을 구하고 곡선 C와 접선 ℓ의 교점의 x좌표를 구한다.	8
(2)	도형의 넓이 K, L을 구하고, 극한값 $\lim_{b\to\infty}\frac{K}{L}$을 구한다.	12

7. 예시 답안

(1) 점 P의 좌표를 (t, t^3+at)라고 하자. 점 P에서의 접선의 기울기는 $(3t^2+a)$이므로 구하는 접선 ℓ의 방정식은

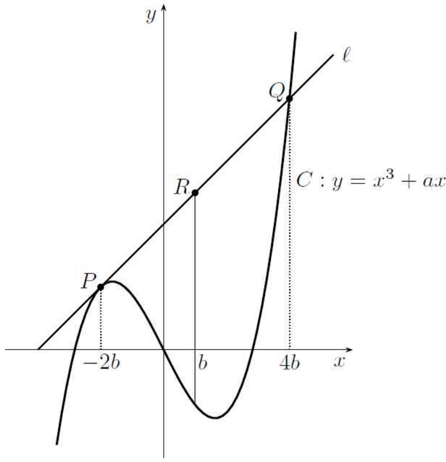
$$y=(3t^2+a)(x-t)+(t^3+at)=(3t^2+a)x-2t^3$$

이다. 직선 ℓ과 곡선 C의 교점의 x좌표는 다음 방정식을 만족한다.

$$(3t^2+a)x-2t^3=x^3+ax \iff (x-t)^2(x+2t)=0$$

따라서 점 Q의 x좌표는 $-2t$이고 선분 PQ의 중점 R의 x좌표는 $b=-\frac{t}{2}$이다. 그러므로 점 P의 x좌표는 $-2b$, 점 Q의 x좌표는 $4b$이다.

(2) $b>0$이면 접선 ℓ은 곡선 C와 그림과 같이 접한다.



접선 ℓ의 방정식은

$$y = (12b^2 + a)x + 16b^3$$

이므로 두 도형의 넓이 K, L은 다음과 같다.

$$K = \int_{-2b}^{b} (-x^3 + 12b^2x + 16b^3)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 6b^2x^2 + 16b^3x\right]_{-2b}^{b} = \frac{135}{4}b^4$$

$$L = \int_{b}^{4b} (-x^3 + 12b^2x + 16b^3)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 6b^2x^2 + 16b^3x\right]_{b}^{4b} = \frac{297}{4}b^4$$

따라서 구하는 극한값은 $\lim_{b \to \infty} \frac{K}{L} = \frac{135}{297} = \frac{5}{11}$ 이다.

4-3. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 2 (공대) / 문제 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>확률변수, 확률분포, 기댓값</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">30분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【문제 3】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

(가) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

[출처 : 확률과 통계 「확률의 뜻과 활용」]

(나) 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0,\ \mathrm{P}(B) > 0)$$

[출처 : 확률과 통계 「조건부확률」]

흰 구슬 2개, 검은 구슬 3개가 들어 있는 주머니에서 흰 구슬이 모두 나올 때까지 구슬을 임의로 1개씩 꺼낸다고 하자. (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.) 꺼낸 구슬의 총 개수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 문항에 답하시오.

(1) 확률 $\mathrm{P}(X=5)$를 구하시오.

(2) 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구하시오.

(3) 흰 구슬 2개, 검은 구슬 n개가 들어 있는 주머니에서 흰 구슬이 모두 나올 때까지

구슬을 임의로 1개씩 꺼낸다고 하자. (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.) 꺼낸 구슬의 총 개수를 확률변수 Y라고 할 때, 기댓값 $\mathrm{E}(Y)$를 n의 식으로 나타내시오.

3. 출제 의도

문제에서 주어진 확률변수를 이해하고, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하여 확률변수의 확률분포와 기댓값을 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="2">확률과 통계 - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용
확률과 통계 - (2) 확률 - 2 조건부확률
확률과 통계 - (3) 통계 - 1 확률분포</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	김원경 외 14인	비상교육	2018	44,53,73
	확률과 통계	황선욱 외 9인	미래엔	2019	50,58,79
기타					

5. 문항 해설

흰 구슬과 검은 구슬이 들어 있는 주머니에서 흰 구슬이 모두 나올 때까지 꺼낸 구슬의 총 개수로 정의된 확률변수 X의 확률분포 및 기댓값을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	확률 $\mathrm{P}(X=5)$를 구한다.	6
(2)	확률변수 X의 확률분포 및 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구한다.	9
(3)	확률변수 Y의 확률분포 및 기댓값 $\mathrm{E}(Y)$를 구한다.	15

7. 예시 답안

(1) $X=5$이기 위해서는 다섯 번째 나오는 구슬이 흰 구슬이어야 한다. 각각의 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

●●●○ ●●○● ●○●● ○●●●	○

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X=5)=4\times\frac{3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{2}{5}=0.4$$

이다.

(2) X의 확률분포를 구하면 다음과 같다.

x	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X=x)$	$1\times\frac{2\cdot1}{5\cdot4}=\frac{1}{10}$	$2\times\frac{3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3}=\frac{2}{10}$	$3\times\frac{3\cdot2\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2}=\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

따라서 확률변수 X의 기댓값은 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{3}{10}+5\cdot\frac{4}{10}=4$$

(3) 확률변수 Y는 2부터 $n+2$까지의 값을 갖는다. 확률변수 Y의 값이 y이기 위해서는 두 번째 흰 구슬이 y번째에 나와야 한다. 첫 번째 흰 구슬이 i번째$(i=1,2,\cdots,y-1)$에 나오고 두 번째 흰 구슬이 y번째에 나올 확률은 모든 i에 대해 동일하게

$$\frac{2\cdot1\times n(n-1)\cdots(n-(y-3))}{(n+2)(n+1)\cdots(n+2-(y-1))}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

이므로

$$\mathrm{P}(Y=y)=\frac{2(y-1)}{(n+1)(n+2)}\quad(y=2,3,\cdots,n+2)$$

이다.

따라서 확률변수 Y의 기댓값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{y=2}^{n+2}y\cdot\frac{2(y-1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{y=1}^{n+1}y(y+1)\\&=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)\\&=\frac{2}{3}n+2\end{aligned}$$

4-4. 문항카드 양식 1 (자연2계열)

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">신입학 수시 논술</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연 2 (공대) / 문제 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학 II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>이차함수, 함수의 최대·최소 정리</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">20분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

【문제 4】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다. 최댓값은 이 구간에서 함수의 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중 가장 큰 값이고, 최솟값은 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.
>
> [출처 : 수학Ⅱ 「도함수의 활용」]

곡선 $C: x^2+y=6$과 직선 $\ell: 2x+y=6$으로 둘러싸인 도형을 S라고 하자. 도형 T는 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 직사각형 중 넓이가 가장 큰 직사각형이다.

> (i) S의 내부에 포함된다.
> (ii) 가로는 x축과 평행하고 세로는 y축과 평행하다.
> (iii) 곡선 C 위의 점 $(a, -a^2+6)$에 오른쪽 위 꼭짓점을 두고 있다.

다음 문항에 답하시오.

(1) 직사각형 T의 넓이 M을 a의 식으로 나타내시오.

(2) 넓이 M이 최대가 되는 실수 a의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 조건을 만족하는 도형의 넓이를 식으로 표현하는 능력, 도함수를 활용하여 함수의 최대, 최소를 구하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="2">수학 - (1) 문자와 식 - $\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수
수학 II - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련 성취기준</td><td colspan="2">과목명: 수학</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">과목명: 수학 II</td></tr>
<tr><td>성취기준 1</td><td>[12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	70
	수학	김원경 외 14인	비상교육	2018	63
	수학 II	박교식 외 19인	동아출판	2018	81
	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2018	78
기타					

5. 문항 해설

꼭짓점이 이차함수 및 직선에 놓인 직사각형의 최대 넓이를 a의 식으로 표현하고, 함수의 증감을 이용하여 그 식이 최대가 되는 실수 a의 값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

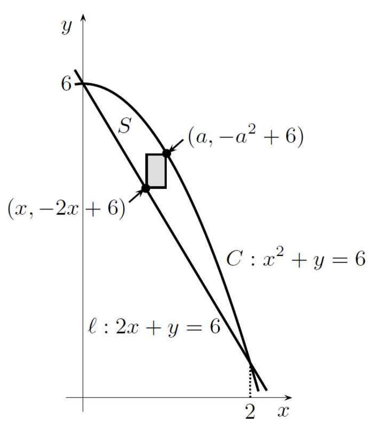
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	직사각형 T의 넓이 M을 a의 식으로 나타낸다.	14
(2)	넓이 M이 최대가 되는 실수 a의 값을 구한다.	6

7. 예시 답안

(1)

(i) S의 내부에 포함된다.
(ii) 가로는 x축과 평행하고 세로는 y축과 평행하다.
(iii) 곡선 C 위의 점 $(a, -a^2+6)$에 오른쪽 위 꼭짓점을 두고 있다.

위 조건을 모두 만족하는 직사각형의 넓이가 최대가 되기 위해서는 아래 그림과 같이 직사각형의 왼쪽 아래 꼭짓점이 직선 $\ell : 2x+y=6$ 위에 놓여야 한다. 또한 곡선 C와 직선 ℓ의 교점의 x좌표는 $x=0, 2$이므로, a의 범위는 $0<a<2$이다.



왼쪽 아래 꼭짓점이 $(x, -2x+6)$이고 오른쪽 위 꼭짓점이 $(a, -a^2+6)$인 직사각형의 넓이를 $f(x)$라고 하자. 왼쪽 아래 꼭짓점의 x, y 좌표는 오른쪽 위 꼭짓점의 x, y 좌표보다 작아야 하므로 $\frac{1}{2}a^2 < x < a$을 만족해야 한다. 이 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 $a-x$와 $-a^2+6-(-2x+6) = -a^2+2x$이므로 직사각형의 넓이는 다음과 같다.

$$f(x) = (a-x)(-a^2+2x) = -2x^2+(a^2+2a)x-a^3 = -2\left(x-\frac{a^2+2a}{4}\right)^2 + \frac{a^4-4a^3+4a^2}{8}$$

$0<a<2$ 에서 $\frac{1}{2}a^2 < \frac{a^2+2a}{4} < a$ 이므로 $f(x)$는 $x = \frac{a^2+2a}{4}$일 때 최대가 되고 이때의 최댓값이 직사각형 T의 넓이

$$M = \frac{1}{8}a^4 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^2$$

이다.

(2) $M = M(a) = \frac{1}{8}a^4 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^2$의 a에 대한 도함수

$$M'(a) = \frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + a = \frac{1}{2}a(a-1)(a-2)$$

는 $0<a<2$일 때 $a=1$에서 0이므로 M의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$M'(a)$		+	0	-	
$M(a)$		↗	$\frac{1}{8}$	↘	

따라서 $a=1$일 때 $M(1) = \frac{1}{8}$로 최대가 된다.