

2-7. 문항카드 ⑦ <자연계열 1회차 문항>

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	2021학년도 수시모집 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1-1(a), 1-1(b), 1-2(a), 1-2(b), 1-3(a), 1-3(b)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수, 수학적 귀납법, 평균값 정리, 부정적분, 방정식과 부등식, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 함수의 그래프와 그 활용, 사잇값의 정리
예상 소요 시간	110분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

<가>

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

- ㉠ 어떤 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이다.
- ㉡ 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 임의의 자연수 n 에 대하여

$$f(nx) = nf(x)$$

이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

- ㉢ 어떤 실수 x 에 대하여 $g(x) \neq 0$ 이다.
- ㉣ 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $g(x+y) = g(x)g(y)$ 이다.

이때 함수 $g(x)$ 는 임의의 자연수 n 에 대하여

$$g(nx) = \{g(x)\}^n \quad \dots\text{①}$$

이다.

모든 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

- ㉤ 어떤 양의 실수 x 에 대하여 $h(x) \neq 0$ 이다.
- ㉥ 임의의 양의 두 실수 x, y 에 대하여 $h(xy) = h(x)h(y)$ 이다.

이때 $h(x_0) \neq 0$ 을 만족시키는 양의 실수 x_0 이 존재하고, 임의의 양의 실수 x 에 대하여

$$h(x_0) = h\left(x \cdot \frac{x_0}{x}\right) = h(x)h\left(\frac{x_0}{x}\right)$$

이므로 $h(x) \neq 0$ 이다. 한편, 양의 실수 a 에 대하여 $k(x) = \ln \{h(a^x)\}$ 이라 하면

$$k(x+y) = k(x) + k(y)$$

이다.

<나>

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 평균값 정리에 의하면 $a < b$ 인 임의의 두 실수 a, b 에 대하여

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다. 이러한 실수 c 가 닫힌구간 $[a, b]$ 의 중점이 되는 함수 $f(x)$ 에 대하여 알아보자. 이제 임의의 서로 다른 두 실수 x, y 에 대하여

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad f'(0) = 0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

이라고 가정하자. 위의 등식 ②에서 $y = -x$ 이면

$$\frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = f'(0) = 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $f(-x) = f(x)$ 를 만족시킨다.

(i) $x \neq 0$ 이면,

$$f'(3x) = f'\left(\frac{4x+2x}{2}\right) = \frac{f(4x) - f(2x)}{4x - 2x} = \frac{f(4x) - f(2x)}{2x}$$

이다. 한편,

$$f'(x) = f'\left(\frac{4x+(-2x)}{2}\right) = \frac{f(4x) - f(-2x)}{4x - (-2x)} = \frac{f(4x) - f(2x)}{6x}$$

이므로

$$3f'(x) = f'(3x)$$

이다.

(ii) $x = 0$ 이면, ②에 의하여 $f'(0) = 0$ 이므로

$$3f'(x) = f'(3x) = 0$$

이다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여, 임의의 실수 x 에 대하여

$$3f'(x) = f'(3x)$$

이다.

<다>

두 사람 A와 B가 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 세 계수 a, b, c 를 서로 번갈아 가며 실수로 바꾸는 다음과 같은 경기를 한다. 단, c 는 0으로 바꿀 수 없다.

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 에서 A 가 먼저 세 계수 a, b, c 중 하나를 선택한 후, 그것을 A 가 원하는 실수로 바꾼다. 그다음, B 는 A 가 선택한 것을 제외한 나머지 두 계수 중 하나를 선택한 후, 그것을 B 가 원하는 실수로 바꾼다. 마지막으로 A 는 위에서 선택하고 남은 계수를 적당한 실수로 바꿔서, 그 결과로 만들어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지면 A 가 이기고, 그렇지 않으면 B 가 이긴다.

예를 들어, A 와 B 가 다음과 같은 순서로 경기를 한다고 하자.

첫 번째, A 는 a 를 선택한 후 -6 으로 바꾼다.

두 번째, B 는 b 를 선택한 후 11 로 바꾼다.

세 번째, A 는 c 를 -6 으로 바꾼다.

위의 결과로 만들어진 삼차방정식은 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 이 되고, 이 방정식은 서로 다른 세 실근 $1, 2, 3$ 을 가진다. 그러므로 A 가 이긴다.

1-1. 제시문 <가>를 읽고 다음 문제에 답하십시오.

1-1(a). 수학적 귀납법을 이용하여 등식 ①이 성립함을 보이시오. 또한 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x)$ 는 양의 실수임을 보이시오.

1-1(b). 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $p(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

- 1) 어떤 실수 x 에 대하여 $p(x) \neq -1$ 이다.
- 2) 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $p(x+y) = p(x) + p(y) + p(x)p(y)$ 이다.

이때 $p(2021x) + 1 = \{p(x) + 1\}^{2021}$ 임을 보이시오.

1-2. 제시문 <나>에서 ②를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 문제에 답하십시오.

1-2(a). 임의의 두 실수 k, x 에 대하여 $kf'(x) = f'(kx)$ 임을 보이시오.

1-2(b). 문제 1-2(a)를 이용하여 함수 $f(x)$ 가 $f(0) = 0$ 과 $f'(2) = 4$ 를 만족시킬 때, $f(x)$ 를 구하십시오.

1-3. 제시문 <다>에서 주어진 경기에 대하여 다음 문제에 답하십시오.

1-3(a). 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 에서 A 가 먼저 a 를 선택하여 6 으로 바꾼 후, B 가 b 를 선택

하여 9로 바꾸어 삼차방정식 $x^3 + 6x^2 + 9x + c = 0$ 이 되었다. 이 삼차방정식에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 실수 c 의 범위를 구하시오.

- 1) 열린구간 $(-5, -3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
- 2) A 가 이 경기에서 이긴다.

1-3(b). 제시문 <다>에서 주어진 경기는 B 의 선택에 상관없이 A 가 이길 수 있음을 보이시오. (도움말: A 는 첫 번째 순서에서 c 를 선택한 후 1로 바꿀 수 있다. 사잇값의 정리와 그래프의 개형을 이용할 수 있다.)

3. 출제 의도

함수, 수학적 귀납법, 평균값 정리, 부정적분, 방정식과 부등식, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 함수의 그래프와 그 활용, 사잇값의 정리 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등 고등학교에서 배우는 수학교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 수학적 귀납법, 함수의 활용, 평균값 정리, 부정적분, 사잇값의 정리, 함수의 그래프에 대한 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 1	교육과정*	[수학 I] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법 [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제 [10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
	성취기준·성취수준**	[수학 I] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법 [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [수학] - (3) 수와 연산 - (나) 명제 [10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.
제시문 2	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학 II 02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
제시문 3	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
문제 1-1	교육과정	[수학 I] - (3) 수열 - ㉓ 수학적 귀납법 [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [수학] - (3) 수와 연산 - ㉒ 명제 [10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다. [수학] - (4) 함수 - ㉑ 함수 [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 I] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법 [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. [수학] - (3) 수와 연산 - (나) 명제 [10수학03-04] 명제와 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다. [수학] - (4) 함수 - (가) 함수 [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
문제 1-2	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ㉓ 도함수의 활용 [12수학 II 02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [수학 II] - (3) 적분 - ㉑ 부정적분 [12수학 II 03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학 II 02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [수학 II] - (3) 적분 - (가) 부정적분 [12수학 II 03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
문제 1-3	교육과정	[수학 II] - (2) 미분 - ㉓ 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ㉒ 함수의 연속 [12수학 II 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - ㉓ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학 II] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. [수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속 [12수학 II 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - (다) 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

*: 교육부 고시 제 2015-74호[별책 8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책신사고	2020	208-224 73-99 183-192
	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	216-227 75-78 91-101 184-191
	수학I	홍성복 외	지학사	2020	148-157 10-59
	수학I	배종숙 외	금성출판사	2020	152-166 40-66
	수학II	이준열 외	천재교육	2020	29-43 73-105 114-130
	수학II	홍성복 외	지학사	2020	30-45 74-105 112-123
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	110-131
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2020	97-117
기타					

1) 교과서 외 자료를 활용한 경우, 관련 자료별로 교과서 근거를 작성.

5. 문항 해설

제시문 <가>에서는 실수 전체의 집합 또는 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 어떤 성질을 만족시키는 함수들을 소개한다. <문제 1-1(a) 1-1(b)>에서는 제시문 <가>에서 소개된 함수들의 이해를 바탕으로 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는지를 평가한다. 또한 '모든', '어떤'을 포함한 명제, 제시문에서 소개된 함수의 성질을 이용하는 명제를 증명할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <나>에서는 주어진 구간에서 평균변화율과 순간변화율이 같은 점이 그 구간의 중점이 되는 함수에 대하여 알아본다. <문제 1-2(a)>에서는 제시문 <나>에서 주어진 함수를 바르게 이해하고 이를 이용하여 이 함수와 관련된 성질을 증명할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-2(b)>에서는 문제에서 주어진 성질을 만족시키는 함수를 부정적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 두 사람이 삼차방정식의 세 계수를 서로 번갈아 가며 실수로 바꾸는 경기를 소개한다. <문제 1-3(a)>에서 삼차다항식의 증가와 감소, 극대와 극소를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-3(b)>에서는 삼차함수의 그래프의 개형을 이용하여 주어진 경기에서의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 수 있다는 것을 보일 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1(a)>, <1-1(b)>

1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-1(a)>에서 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보인다.
4. <1-1(a)>에서 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x)$ 는 양의 실수임을 보인다.
5. <1-1(b)>에서 $u(x) = p(x) + 1$ 로 치환한다.
6. <1-1(b)>에서 $u(nx) = \{u(x)\}^n$ 임을 논리적으로 보인다.

▶ 문제 <1-2(a)>, <1-2(b)>

1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-2(a)>에서 $x \neq 0$ 이고 $k \neq 0$ 인 경우, $kf'(x) = f'(kx)$ 가 성립함을 보인다.
4. <1-2(a)>에서 $x = 0$ 인 경우와 $k = 0$ 인 경우, $kf'(x) = f'(kx)$ 가 성립함을 보인다.
5. <1-2(b)>에서 $f'(x) = 2x$ 임을 보인다.
6. <1-2(b)>에서 $f(x) = x^2$ 임을 보인다.

▶ 문제 <1-3(a)>, <1-3(b)>

1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-3(a)>에서 열린구간 $(-5, -3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지는 c 의 범위를 구한다.
4. <1-3(a)>에서 주어진 경기에서의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지는 c 의 범위를 구한다.
5. <1-3(b)>에서 사잇값의 정리를 이용하여 적당한 구간에서 적어도 하나의 실근이 존재함을 보인다.
6. <1-3(b)>에서 그래프의 개형을 이용하여 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가질 수 있음을 보인다.

■ 각 세부 문제별로 다음의 기준으로 채점한다.

- 1 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
- 2 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
- 3 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 정확하게 충족시키고, 3-6의 요건 중 3가지를 만족하는 경우
- 4 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하는 경우
- 5 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하나 논리 전개 및 계산이 다소 미흡한 경우
- 6 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 1가지를 만족하는 경우
- 7 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지만, 3-6의 요건을 충족시키지 못한 경우
- 8 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지 않은 경우
- 9 등급: 위의 6가지 기준을 대부분 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1(a)

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = $g(x)$, (우변) = $g(x)$ 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면 $g(kx) = \{g(x)\}^k$ 이다. 이때

$$g((k+1)x) = g(kx+x) = g(kx)g(x) = \{g(x)\}^k g(x) = \{g(x)\}^{k+1}$$

이므로 $n = k+1$ 일 때도 등식 ㉠은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ㉠은 성립한다.

조건 ㉡에 의하여 $g(x_0) \neq 0$ 인 실수 x_0 이 존재한다. 이때 임의의 실수 x 에 대하여

$$g(x_0) = g(x + (x_0 - x)) = g(x)g(x_0 - x)$$

이므로 $g(x) \neq 0$ 이다. 임의의 실수 x 에 대하여

$$g(x) = g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left\{g\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2 \geq 0$$

이다. 한편, $g(x) \neq 0$ 이므로 $g(x) > 0$ 이다.

■ 1-1(b)

$u(x) = p(x) + 1$ 이라 하면

$$\begin{aligned} u(x+y) &= p(x+y) + 1 = p(x) + p(y) + p(x)p(y) + 1 \\ &= (p(x) + 1)(p(y) + 1) = u(x)u(y) \end{aligned}$$

이다. 어떤 실수 x_0 에 대하여 $p(x_0) \neq -1$ 이므로 $u(x_0) \neq 0$ 이다. 따라서 등식 ㉠에 의하여

$$u(2021x) = \{u(x)\}^{2021}$$

이다. 즉,

$$p(2021x) + 1 = \{p(x) + 1\}^{2021}$$

이다.

■ 1-2(a)

(i) $x \neq 0$ 이고 $k \neq 0$ 인 경우,

$$\begin{aligned} f'(kx) &= f'\left(\frac{(k+1)x + (k-1)x}{2}\right) \\ &= \frac{f((k+1)x) - f((k-1)x)}{(k+1)x - (k-1)x} \\ &= \frac{f((k+1)x) - f((k-1)x)}{2x} \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f'\left(\frac{(k+1)x + (1-k)x}{2}\right) \\
&= \frac{f((k+1)x) - f((1-k)x)}{(k+1)x - (1-k)x} \\
&= \frac{f((k+1)x) - f(-(k-1)x)}{2kx} \\
&= \frac{f((k+1)x) - f((k-1)x)}{2kx}
\end{aligned}$$

이다. 따라서 $kf'(x) = f'(kx)$ 가 성립한다.

(ii) $x = 0$ 인 경우,

$$kf'(0) = f'(k \cdot 0) = f'(0) = 0$$

이므로 $kf'(x) = f'(kx)$ 가 성립한다.

(iii) $k = 0$ 인 경우, $0 = f'(0)$ 이므로 $kf'(x) = f'(kx)$ 가 성립한다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 임의의 두 실수 k, x 에 대하여 $kf'(x) = f'(kx)$ 가 성립한다.

■ 1-2(b)

$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{2} \cdot 2\right) = \frac{x}{2} f'(2) = \frac{x}{2} \cdot 4 = 2x$$

이므로

$$f(x) = x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 상수이다.})$$

이다. 한편, $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = x^2$ 이다.

■ 1-3(a)

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + c$ 라 하자. A 가 경기에서 이기기 위한 c 의 범위를 구해보자. 방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 개의 실근을 가져야 하므로 함수 $f(x)$ 의 극값들의 부호가 달라야 한다. 먼저

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3) = 0$$

을 풀면 $f(x)$ 가 $x = -3$ 에서 극댓값, $x = -1$ 에서 극솟값을 가진다는 것을 알 수 있고, 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위하여

$$f(-1) = c - 4 < 0, \quad f(-3) = c > 0$$

임을 알 수 있다. 그러므로

$$0 < c < 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 또한,

(i) 극솟값 $f(-1) < 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 $f(x)$ 는 열린구간 $(-1, \infty)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $f(-3)f(-1) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(-3, -1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(iii) 극댓값 $f(-3) > 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이므로 열린구간 $(-\infty, -3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

열린구간 $(-5, -3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가져야 하므로 (i), (ii), (iii)에 의하여 열린구간 $(-5, -3)$ 에서 단 하나의 실근을 갖는다. 따라서

$$f(-3)f(-5) = c(c-20) < 0$$

을 만족시켜야 한다. 그러므로 c 의 범위는

$$0 < c < 20 \quad \dots\dots ②$$

이다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(-5, -3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지며 A 가 이기기 위한 c 의 범위는 ①과 ②를 동시에 만족시켜야 하므로 $0 < c < 4$ 이다.

■ 1-3(b)

첫 번째, A 는 c 를 선택한 후에 1로 바꾼다.

두 번째, B 는 a 또는 b 중 하나를 선택한 후 그것을 어떤 실수로 바꾼다.

세 번째, A 는 B 가 바꾼 계수와 남은 계수의 합이 -3 이 되도록 남은 계수를 바꾼다.

위의 결과로 만들어진 삼차방정식은 다음과 같다.

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0, \quad a + b = -3$$

이 삼차방정식은 서로 다른 세 실근을 가진다. 그 이유는 다음과 같다.

(i) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 이라고 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고

$$f(0) = 1 > 0 \text{이고 } f(1) = 1 + a + b + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$$

이므로, 사잇값의 정리에 의하여 $f(k) = 0$ 인 k 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

(ii) $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이고 $f(0) = 1 > 0$ 이므로 $f(l) = 0$ 인 실근 l 이 열린구간 $(-\infty, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

(iii) $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이고 $f(1) = -1 < 0$ 이므로 $f(m) = 0$ 인 실근 m 이 열린구간 $(1, \infty)$ 에 적어도 하나 존재한다.

그러므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 (i), (ii), (iii)에 의하여 서로 다른 세 실근을 갖는다. 따라서 A 가 경기에서 이긴다.