

VI-5. 문항카드: 논술우수자전형(자연계열)

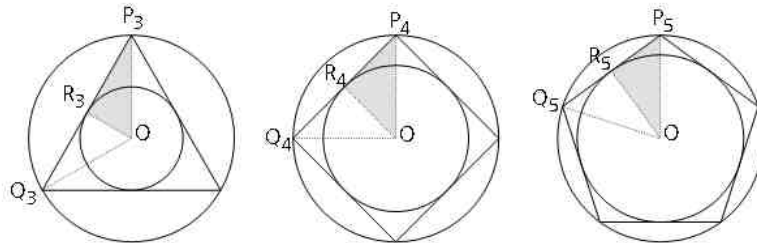
[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2021학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 계열 (수학) / <문제 1>	
출제범위	교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	수열의 극한, 삼각함수의 극한
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 1> 중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정 n 각형에서 이웃한 두 꼭짓점을 각각 P_n , Q_n 이라고 하고, 점 O 에서 선분 P_nQ_n 에 내린 수선의 발을 R_n 이라고 하자. 이 정 n 각형에 내접하는 원 O_n 의 넓이를 a_n , 둘레의 길이를 b_n 이라 하자. (단, n 은 3 이상의 자연수)



다음 물음에 답하시오. [총25점]

(1) 직각삼각형 OP_nR_n 의 넓이를 구하시오. [7점]

(2) $b_6 - 2a_6$ 의 값을 구하시오. [6점]

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(b_n - 2a_n)$ 을 구하시오. [12점]

3. 제시문 요약

중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정 n 각형에서 이웃한 두 꼭짓점을 각각 P_n , Q_n 이라고 하고, 점 O 에서 선분 P_nQ_n 에 내린 수선의 발을 R_n 이라고 하며, 이 정 n 각형에 내접하는 원 O_n 의 넓이를 a_n , 둘레의 길이를 b_n 이라 할 때, 직각삼각형 OP_nR_n 의 넓이와 $b_6 - 2a_6$ 의 값, 그리고 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(b_n - 2a_n)$ 을 구하는 문제이다.

4. 출제의도

직각삼각형에서의 삼각비의 개념을 바탕으로 직각삼각형의 넓이, 원의 넓이와 둘레의 길이에 대한 수열의 일반항을 나타낼 수 있고, 미적분에서 다루는 삼각함수의 극한에 대한 성질을 통합적으로 활용하는 문제해결능력을 평가하고자 한다. 주어진 문제를 정확히 이해하고 필요한 성질을 적용하여 문제를 해결하는 단계를 전개해 나가며 그에 대한 설명을 논리적으로 명확하게 서술할 수 있는지도 평가하고자 한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	[미적분]-수열의 극한-Ⅰ 수열의 극한 [미적분]-미분법-Ⅰ 여러 가지 함수의 미분
성취기준 / 영역별 내용	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
미적분	황선욱 외	미래엔	2019	11, 72	교과서	

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

(1) 중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정 n 각형에서 이웃한 두 꼭짓점을 각각 P_n , Q_n 이라고 할 때, 중심 O 주위의 중심각 2π 를 n 등분하여 $\angle P_nOQ_n = \frac{2\pi}{n}$ 이므로,

$\angle P_nOR_n = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$ 이고, $OP_n = 1$, $P_nR_n = \sin \frac{\pi}{n}$, $OR_n = \cos \frac{\pi}{n}$ 이다.

따라서 직각삼각형 OP_nR_n 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sin \frac{\pi}{n} \times \cos \frac{\pi}{n}$ 이다.

(2) 정 n 각형에 내접하는 원 O_n 의 반지름의 길이는 $OR_n = \cos \frac{\pi}{n}$ 이므로, 원 O_n 의 넓이는

$a_n = \pi \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^2$ 이고, 둘레의 길이는 $b_n = 2\pi \cos \frac{\pi}{n}$ 이다.

따라서 $b_6 - 2a_6 = 2\pi \cos \frac{\pi}{6} - 2\pi \left(\cos \frac{\pi}{6} \right)^2 = \pi \sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다.

[다른 방법 풀이]

정육각형에 내접하는 원 O_6 의 반지름의 길이는 $OR_6 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로, 원 O_6 의 넓이는

$a_6 = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3\pi}{4}$ 이고, 둘레의 길이는 $b_6 = 2\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi \sqrt{3}$ 이다.

따라서 $b_6 - 2a_6 = \pi \sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다.

(3) $n^2(b_n - 2a_n) = n^2 \left(2\pi \cos \frac{\pi}{n} - 2\pi \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^2 \right) = 2\pi^3 \times \cos \frac{\pi}{n} \times \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n} \right)^2}$ 이고,

$x = \frac{\pi}{n}$ 로 두면

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1$ 이고,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$ 인데,

여기에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n} \right)^2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(b_n - 2a_n) = 2\pi^3 \times 1 \times \frac{1}{2} = \pi^3$ 이다.

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<p><문제 1> (1)</p> <p>① $\angle P_nOR_n = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$ 이고,</p> <p>② $OP_n = 1$,</p> <p>③ $P_nR_n = \sin \frac{\pi}{n}$, $OR_n = \cos \frac{\pi}{n}$ 이므로</p> <p>④ 직각삼각형 OP_nR_n의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sin \frac{\pi}{n} \times \cos \frac{\pi}{n}$ 이다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우</p> <p>3등급 : ③단계를 시도했으나 오류가 있는 경우</p> <p>4등급 : ②단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우</p> <p>5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우</p> <p>6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우</p> <p>7등급 : 백지답안</p>	7
<p><문제 1> (2)</p> <p>① 정 n각형에 내접하는 원 O_n의 반지름의 길이는 $OR_n = \cos \frac{\pi}{n}$ 이므로,</p> <p>② 원 O_n의 넓이는 $a_n = \pi \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^2$ 이고,</p> <p>③ 둘레의 길이는 $b_n = 2\pi \cos \frac{\pi}{n}$ 이다.</p> <p>④ 따라서 $b_6 - 2a_6 = 2\pi \cos \frac{\pi}{6} - 2\pi \left(\cos \frac{\pi}{6} \right)^2 = \pi \sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다.</p> <p>[다른 방법 풀이]</p> <p>① 정육각형에 내접하는 원 O_6의 반지름의 길이는 $OR_6 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로</p> <p>② 원 O_6의 넓이는 $a_6 = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3\pi}{4}$ 이고</p> <p>③ 둘레의 길이는 $b_6 = 2\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi \sqrt{3}$ 이다.</p> <p>④ 따라서 $b_6 - 2a_6 = \pi \sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p>	6

<p>2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우 3등급 : ③단계를 시도했으나 오류가 있는 경우 4등급 : ②단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지답안</p>	
<p><문제 1> (3)</p> <p>① $n^2(b_n - 2a_n) = n^2\left(2\pi\cos\frac{\pi}{n} - 2\pi\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\right)$</p> $= 2\pi^3 \times \cos\frac{\pi}{n} \times \frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}$ <p>② $x = \frac{\pi}{n}$로 두면</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1$ 이고,</p> <p>③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$ 인데,</p> <p>여기에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이므로</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$ <p>④ 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$ 이므로</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(b_n - 2a_n) = 2\pi^3 \times 1 \times \frac{1}{2} = \pi^3 \text{ 이다.}$ <p>[채점 기준]</p> <p>1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우 3등급 : ③단계를 시도했으나 오류가 있는 경우 4등급 : ②단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지답안</p>	<p>12</p>

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

(1) $\angle P_n O R_n = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$ 이고, $OP_n = 1$, $P_n R_n = \sin \frac{\pi}{n}$, $OR_n = \cos \frac{\pi}{n}$ 이므로

직각삼각형 $OP_n R_n$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sin \frac{\pi}{n} \times \cos \frac{\pi}{n}$ 이다.

(2) 정 n 각형에 내접하는 원 O_n 의 반지름의 길이는 $OR_n = \cos \frac{\pi}{n}$ 이므로, 원 O_n 의 넓이는

$a_n = \pi \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^2$ 이고, 둘레의 길이는 $b_n = 2\pi \cos \frac{\pi}{n}$ 이다.

따라서 $b_6 - 2a_6 = 2\pi \cos \frac{\pi}{6} - 2\pi \left(\cos \frac{\pi}{6} \right)^2 = \pi \sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 이다.

(3) $n^2(b_n - 2a_n) = n^2 \left(2\pi \cos \frac{\pi}{n} - 2\pi \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^2 \right) = 2\pi^3 \times \cos \frac{\pi}{n} \times \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n} \right)^2}$ 이고,

$x = \frac{\pi}{n}$ 로 두면

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1$ 이고,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$ 인데,

여기에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n} \right)^2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(b_n - 2a_n) = 2\pi^3 \times 1 \times \frac{1}{2} = \pi^3$ 이다.

[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2021학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 계열 (수학) / <문제 2>	
출제범위	교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	도함수의 활용, 적분과 미분의 관계, 적분의 활용, 삼각함수의 미분과 적분
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 2> 구간 $[0, 2]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 로 정의할 때 다음 조건이 모두 성립한다고 하자.

- (가) $1 \leq x \leq 2$ 이면 $f(x) \leq 4 - \cos \pi x$ 이다.
 (나) $0 \leq x \leq 1$ 이면 $f(x) = a \sin \pi x + b \cos \pi x$ 이다. (a, b 는 상수)
 (다) $F(1) = 2, F(2) = 6$

다음 물음에 답하시오. [총25점]

- (1) $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. [10점]
 (2) 상수 a, b 의 값을 구하시오. [10점]
 (3) $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. [5점]

3. 제시문 요약

구간 $[0, 2]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 로 정의할 때, 주어진 조건 (가)~(다)를 만족하도록 구간 $[1, 2]$ 과 $[0, 1]$ 각각에서 함수 $f(x)$ 의 식을 구하고, $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 값을 구하는 문제이다.

4. 출제의도

미적분에서 다루는 삼각함수의 미분과 적분을 이해하며, 수학Ⅱ에서 다루는 연속함수의 정적분의 기하학적 의미, 또는 함수의 증감에 관한 성질을 파악하여 함수를 정할 수 있고, 적분과 미분과의 관계를 이용하는 통합적 문제해결능력을 평가하고자 한다. 문제의 상황을 정확히 이해하고 주어진 조건을 종합하여 추론할 수 있는지, 또 문제를 해결하는 단계를 전개해 나가며 그에 대한 설명을 논리적으로 명확하게 서술할 수 있는지도 평가하고자 한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학Ⅱ]-미분-③ 도함수의 활용 [수학Ⅱ]-적분-② 정적분 [수학Ⅱ]-적분-③ 정적분의 활용 [미적분]-미분법-① 여러 가지 함수의 미분 [미적분]-적분법-① 여러 가지 적분법
성취기준 / 영역별 내용	[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2018	79, 124, 140	교과서	
미적분	황선욱 외	미래엔	2019	76, 166	교과서	

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

(1) 구간 $[1, 2]$ 에서 연속인 함수 $g(x) = 4 - \cos \pi x - f(x)$ 에 대하여 조건 (가)에 의하여 $g(x) \geq 0$

이므로 $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ 로 두면

$1 \leq a < b \leq 2$ 일 때 $G(b) - G(a) = \int_a^b g(t) dt \geq 0$, 즉 $G(a) \leq G(b)$ 가 성립한다.

그런데 조건 (다)에 의하여

$$G(1) = \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 (4 - \cos \pi t - f(t)) dt = \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 - F(1) = 4 - 2 = 2$$

$$G(2) = \int_0^2 g(t) dt = \int_0^2 (4 - \cos \pi t - f(t)) dt = \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^2 - F(2) = 8 - 6 = 2,$$

즉 $G(1) = 2 = G(2)$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 x 에 대하여 $G(x) = 2$ 인 상수함수이다.

따라서 $1 < x < 2$ 인 모든 x 에 대하여 $0 = G'(x) = g(x) = 4 - \cos \pi x - f(x)$ 이고,

$f(x) = 4 - \cos \pi x$ 이다. 그러므로 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$ 이다.

(2) 조건 (나)에 의하여 구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = a \sin \pi x + b \cos \pi x$ 이므로 $f(1) = b \cos \pi = -b$ 이며, 구간 $[1, 2]$ 에서 $f(x) = 4 - \cos \pi x$ 이므로 $f(1) = 4 - \cos \pi = 4 - (-1) = 5$ 이다.

이때 f 가 $x = 1$ 에서 연속이므로 $b = -5$ 이다. 그리고 조건 (다)에 의하여

$$2 = F(1) = \int_0^1 (a \sin \pi t - 5 \cos \pi t) dt = \left[-\frac{a}{\pi} \cos \pi t - \frac{5}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 = \frac{2a}{\pi}$$

$a = \pi$ 이다.

[다른 방법 풀이]

$$\text{조건 (다)에 의하여 } 2 = F(1) = \int_0^1 (a \sin \pi t + b \cos \pi t) dt = \left[-\frac{a}{\pi} \cos \pi t + \frac{b}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 = \frac{2a}{\pi}$$

$a = \pi$ 이다. 그리고 조건 (나)에 의하여 구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = \pi \sin \pi x + b \cos \pi x$ 이므로

$f(1) = b \cos \pi = -b$ 이며, 구간 $[1, 2]$ 에서 $f(x) = 4 - \cos \pi x$ 이므로

$f(1) = 4 - \cos \pi = 4 - (-1) = 5$ 이다.

이때 f 가 $x = 1$ 에서 연속이므로 $b = -5$ 이다.

(3) 정의 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 에 따라

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\pi \sin \pi t - 5 \cos \pi t) dt = \left[-\cos \pi t - \frac{5}{\pi} \sin \pi t \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{\pi} + 1 \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{3}{2}\right) &= \int_0^{\frac{3}{2}} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (4 - \cos \pi t) dt \\ &= F(1) + \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_1^{\frac{3}{2}} = 2 + 2 + \frac{1}{\pi} = 4 + \frac{1}{\pi} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{4}{\pi} \text{ 이다.}$$

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<p><문제 2> (1)</p> <p>① 구간 $[1, 2]$에서 $g(x) = 4 - \cos \pi x - f(x)$는 연속함수이고, $g(x) \geq 0$이다.</p> <p>② $G(x) = \int_0^x g(t) dt$로 두면 $1 \leq a < b \leq 2$일 때 $G(b) - G(a) = \int_a^b g(t) dt \geq 0$, 즉 $G(a) \leq G(b)$가 성립한다.</p> <p>③ $G(1) = \int_0^1 (4 - \cos \pi t - f(t)) dt = \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 - F(1) = 4 - 2 = 2$ $G(2) = \int_0^2 (4 - \cos \pi t - f(t)) dt = \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^2 - F(2) = 8 - 6 = 2$,</p> <p>④ 즉 $G(1) = 2 = G(2)$이므로 $1 \leq x \leq 2$인 모든 x에 대하여 $G(x) = 2$인 상수함수이다.</p> <p>⑤ $1 < x < 2$인 모든 x에 대하여 $0 = G'(x) = g(x) = 4 - \cos \pi x - f(x)$이고, $f(x) = 4 - \cos \pi x$이다. 따라서 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$이다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 2등급 : ②~⑤단계를 잘 서술했으나 ①의 조건을 언급하지 않은 경우 3등급 : ③~④단계를 잘 서술했으나 ②단계를 확인하지 않은 경우 4등급 : ②~③단계를 시도하지 않고 ④의 결론을 설명 없이 쓴 경우 5등급 : ④의 결론을 설명 없이 쓰고 ⑤단계의 계산에서도 오류가 있는 경우 6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우 7등급 : 백지답안</p>	10
<p><문제 2> (2)</p> <p>① 구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = a \sin \pi x + b \cos \pi x$이므로 $f(1) = b \cos \pi = -b$이고, ② 구간 $[1, 2]$에서 $f(x) = 4 - \cos \pi x$이므로 $f(1) = 4 - \cos \pi = 4 - (-1) = 5$이다. ③ f가 $x = 1$에서 연속이므로 $b = -5$이다.</p> <p>④ $2 = F(1) = \int_0^1 (a \sin \pi t - 5 \cos \pi t) dt = \left[-\frac{a}{\pi} \cos \pi t - \frac{5}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 = \frac{2a}{\pi}$이므로 $a = \pi$이다.</p> <p>[다른 방법 풀이]</p>	8

<p>① $2 = F(1) = \int_0^1 (a \sin \pi t + b \cos \pi t) dt$</p> $= \left[-\frac{a}{\pi} \cos \pi t + \frac{b}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 = \frac{2a}{\pi} \text{ 이므로 } a = \pi \text{ 이다.}$ <p>② 구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = a \sin \pi x + b \cos \pi x$ 이므로 $f(1) = b \cos \pi = -b$ 이고,</p> <p>③ 구간 $[1, 2]$에서 $f(x) = 4 - \cos \pi x$ 이므로 $f(1) = 4 - \cos \pi = 4 - (-1) = 5$ 이다.</p> <p>④ f가 $x = 1$에서 연속이므로 $b = -5$ 이다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우</p> <p>3등급 : ③단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우</p> <p>4등급 : ②단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우</p> <p>5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우</p> <p>6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우</p> <p>7등급 : 백지답안</p>	
<p><문제 2> (3)</p> <p>① $F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\pi \sin \pi t - 5 \cos \pi t) dt = \left[-\cos \pi t - \frac{5}{\pi} \sin \pi t \right]_0^{\frac{1}{2}}$</p> $= -\frac{5}{\pi} + 1$ <p>② $F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\frac{3}{2}} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (4 - \cos \pi t) dt$</p> <p>③ $= F(1) + \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_1^{\frac{3}{2}} = 2 + 2 + \frac{1}{\pi} = 4 + \frac{1}{\pi}$</p> <p>④ 따라서 $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{4}{\pi}$ 이다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급 : ④단계를 서술했으나 계산에서 오류가 있는 경우</p> <p>3등급 : ③단계를 시도했으나 오류가 있는 경우</p> <p>4등급 : ②단계를 시도했으나 오류가 있는 경우</p> <p>5등급 : ①단계까지는 옳게 서술했으나 그 이후 과정이 없는 경우</p> <p>6등급 : 답을 구하는 과정이 없거나 문제 푸는 방향이 틀려 답을 구하지 못한 경우</p> <p>7등급 : 백지답안</p>	<p>7</p>

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

(1) 구간 $[1, 2]$ 에서 연속인 함수 $g(x) = 4 - \cos \pi x - f(x)$ 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이므로

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt \text{로 두면 } 1 \leq a < b \leq 2 \text{ 일 때 } G(b) - G(a) = \int_a^b g(t) dt \geq 0,$$

즉 $G(a) \leq G(b)$ 가 성립한다. 그런데

$$G(1) = \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 (4 - \cos \pi t - f(t)) dt = \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 - F(1) = 4 - 2 = 2$$

$$G(2) = \int_0^2 g(t) dt = \int_0^2 (4 - \cos \pi t - f(t)) dt = \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^2 - F(2) = 8 - 6 = 2,$$

즉 $G(1) = 2 = G(2)$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 x 에 대하여 $G(x) = 2$ 인 상수함수이다.

따라서 $1 < x < 2$ 인 모든 x 에 대하여 $0 = G'(x) = g(x) = 4 - \cos \pi x - f(x)$ 이고,

$f(x) = 4 - \cos \pi x$ 이다. 그러므로 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$ 이다.

(2) 구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = a \sin \pi x + b \cos \pi x$ 이므로 $f(1) = b \cos \pi = -b$ 이며,

구간 $[1, 2]$ 에서 $f(x) = 4 - \cos \pi x$ 이므로 $f(1) = 4 - \cos \pi = 4 - (-1) = 5$ 이다.

이때 f 가 $x = 1$ 에서 연속이므로 $b = -5$ 이다. 그리고

$$2 = F(1) = \int_0^1 (a \sin \pi t - 5 \cos \pi t) dt = \left[-\frac{a}{\pi} \cos \pi t - \frac{5}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 = \frac{2a}{\pi} \text{이므로}$$

$a = \pi$ 이다.

$$(3) F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\pi \sin \pi t - 5 \cos \pi t) dt = \left[-\cos \pi t - \frac{5}{\pi} \sin \pi t \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{\pi} + 1$$

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\frac{3}{2}} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (4 - \cos \pi t) dt$$

$$= F(1) + \left[4t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_1^{\frac{3}{2}} = 2 + 2 + \frac{1}{\pi} = 4 + \frac{1}{\pi}$$

따라서 $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{4}{\pi}$ 이다.

[성신여자대학교 문항정보]

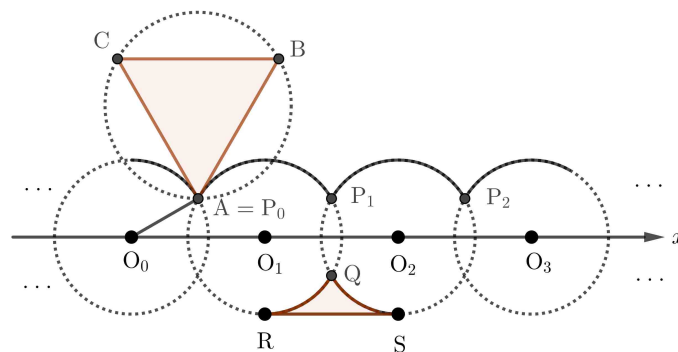
1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2021학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 계열 (수학) / <문제 3>	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심개념 및 용어	일반각과 호도법, 원과 직선의 위치관계
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 3> 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 2π 인 원에 내접하는 정삼각형 ABC를 다음 세 조건을 만족하는 반지름의 길이가 r 인 원의 호로 이루어진 길 위로 굴리려고 한다.

- (가) 정수 n 에 대하여 원 C_n 은 x 축 위에 차례대로 놓인 점 O_n 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원이고, 선분 O_nO_{n+1} 의 길이는 n 의 값과 관계없이 모두 같다.
- (나) 원 C_n 과 원 C_{n+1} 의 두 교점 중 x 축 위쪽에서 만나는 점을 P_n 이라 할 때, 중심각의 크기가 π 보다 작은 부채꼴 $O_nP_nP_{n-1}$ 의 호 $P_{n-1}P_n$ 의 길이는 정삼각형 ABC의 한 변 AB의 길이와 같다.
- (다) 정삼각형 ABC의 한 꼭짓점 A가 점 P_0 에 있을 때, 직선 AB는 원 C_1 에 접하고, 직선 AC는 원 C_0 에 접한다.



다음 물음에 답하시오. [총25점]

- (1) 선분 AB의 길이와 반지름의 길이 r (선분 O_nP_n 의 길이)를 구하시오. [12점]

(2) 조건 (가)~(다)를 만족하는 원의 호로 이루어진 길을 따라 정삼각형 ABC가 한 바퀴 굴렀을 때 점 A가 점 A'으로 옮겨졌다. 선분 AA'의 길이를 구하시오. [5점]

(3) 위의 그림과 같이 원 C_1 위의 점 R과 원 C_2 위의 점 S를 연결한 직선이 두 원 C_1 과 C_2 에 동시에 접하고 점 Q는 두 원 C_1 과 C_2 의 두 교점 중 P_1 이 아닌 점이다. 선분 RS, 호 RQ, 호 QS로 둘러싸인 색칠된 도형의 넓이를 구하시오. [8점]

3. 제시문 요약

삼각형으로 만들어진 바퀴를 원의 호로 이루어진 길 위로 굴리려고 할 때, 길을 구성하는 원의 반지름의 길이를 주어진 문제의 조건을 이용해 구하고, 이 길을 따라 주어진 정삼각형을 한 바퀴 굴릴 때 이동하는 x 축 방향 거리를 구한다. 그리고 문제에 제시된 한 선분과 두 원호로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

4. 출제의도

호도법과 삼각함수와의 관계를 이용하여 주어진 길이에 대응하는 원의 중심각, 주어진 원에 내접하는 삼각형의 한 변의 길이, 주어진 중심각에 대응하는 현의 길이, 그리고 주어진 도형을 계산 가능한 도형으로 분할하여 제시된 도형의 넓이를 구하는 문제풀이 능력 등을 복합적으로 측정한다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학]-기하 - ③ 원의 방정식 [수학 I]-해석 - ① 삼각함수
성취기준 / 영역별 내용	[10수학 02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학	황선욱 외	미래엔	2017	144-148	교과서	
수학 I	류희찬 외	천재교과서	2018	73, 78	교과서	

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

(1) 반지름의 길이가 2π 인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 한 변의 길이는

$$\overline{AB} = 2 \times 2\pi \times \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times 2\pi \times \cos \frac{\pi}{6} = 2\pi\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

직선 AB가 점 P_0 에서 원 C_1 에 접하므로 직선 AB와 직선 O_1P_0 는 서로 수직이고 직선 BC와 x 축은 서로 평행하므로 각 $P_0O_1O_0$ 의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 그러므로 각 $P_0O_1P_1$ 의 크기는 $\frac{2\pi}{3}$ 이고 호 P_0P_1 의 길이는 $r \times \frac{2\pi}{3}$ 이다. 문제의 조건으로부터 선분 AB의 길이와 호 P_0P_1 의 길이가 같으므로 $2\pi\sqrt{3} = r \times \frac{2\pi}{3}$ 이고 이로부터 $r = 3\sqrt{3}$ 이다.

(2) 선분 P_0P_1 의 길이는 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$ 인 원의 중심각 $\frac{2\pi}{3}$ 에 대응하는 현의 길이이므로

$$2 \times 3\sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{3} = 9 \text{ 이다. 따라서 } \triangle ABC \text{가 주어진 길을 따라 한 바퀴 돌 때 선분 } AA' \text{의 길이는 } 3 \times \overline{P_0P_1} = 3 \times 9 = 27 \text{ 이다.}$$

(3) 구하는 도형의 넓이는 사각형 RSO_2O_1 의 넓이에서 부채꼴 O_1RQ 의 넓이와 부채꼴 O_2QS 의 넓이, 그리고 삼각형 O_1QO_2 의 넓이의 합을 빼면 된다.

사각형 RSO_2O_1 의 넓이: 주어진 사각형은 직각사각형이고 $\overline{O_1O_2} = \overline{P_0P_1}$, $\overline{O_1R} = r$ 이므로 $\overline{O_1O_2} \times \overline{O_1R} = 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$

부채꼴 O_1RQ 와 부채꼴 O_2QS 의 넓이는 같고 이 부채꼴의 반지름의 길이는 $r = 3\sqrt{3}$, 중심각은 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 각각의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times (3\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{2}$

$$\triangle O_1QO_2 \text{의 넓이: } \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times r \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{81\sqrt{3}}{4} - 9\pi = \frac{9}{4} \times (9\sqrt{3} - 4\pi)$ 이다.

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<p>〈문제 3〉 (1)</p> <p>① 반지름의 길이가 2π인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $\overline{AB} = 2 \times 2\pi \times \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times 2\pi \times \cos \frac{\pi}{6} = 2\pi\sqrt{3}$이다.</p> <p>② 직선 AB가 점 P_0에서 원 C_1에 접하므로 직선 AB와 직선 O_1P_0는 서로 수직이고 직선 BC와 x축은 서로 평행하므로 각 $P_0O_1O_0$의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.</p> <p>③ 그러므로 각 $P_0O_1P_1$의 크기는 $\frac{2\pi}{3}$이고 호 P_0P_1의 길이는 $r \times \frac{2\pi}{3}$이다.</p> <p>④ 문제의 조건으로부터 선분 AB의 길이와 호 P_0P_1의 길이가 같으므로 $2\pi\sqrt{3} = r \times \frac{2\pi}{3}$이고 이로부터 $r = 3\sqrt{3}$이다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급: ④단계까지 서술하였으나 계산 실수가 있는 경우</p> <p>3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우</p> <p>4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우</p> <p>5등급: ①을 옳게 계산한 경우</p> <p>6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우</p> <p>7등급: 백지 답안</p>	12
<p>〈문제 3〉 (2)</p> <p>① 선분 P_0P_1의 길이는 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$인 원의</p> <p>② 중심각 $\frac{2\pi}{3}$에 대응하는 현의 길이이므로</p> <p>③ $2 \times 3\sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{3} = 9$이다.</p> <p>④ 따라서 $\triangle ABC$가 주어진 길을 따라 한 바퀴 돌 때 선분 AA'의 길이는 $3 \times \overline{P_0P_1} = 3 \times 9 = 27$이다.</p>	5

<p>[채점 기준]</p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급: ④단계까지 서술했으나 계산의 오류가 있는 경우</p> <p>3등급: ③단계까지의 답을 옳게 서술한 경우</p> <p>4등급: ①~③단계를 이용해 현의 길이를 구하려고 했으나 답이 틀린 경우</p> <p>5등급: ① 또는 ②의 내용을 이용해 문제 풀이를 시도한 경우</p> <p>6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우</p> <p>7등급: 백지 답안</p>	
<p>〈문제 3〉 (3)</p> <p>① 구하는 도형의 넓이는 사각형 RSO_2O_1의 넓이에서 부채꼴 O_1RQ의 넓이와 부채꼴 O_2QS의 넓이, 그리고 삼각형 O_1QO_2의 넓이의 합을 빼면 된다.</p> <p>② 사각형 RSO_2O_1의 넓이: 주어진 사각형은 직각사각형이고 $\overline{O_1O_2} = \overline{P_0P_1}$, $\overline{O_1R} = r$이므로 $\overline{O_1O_2} \times \overline{O_1R} = 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$</p> <p>③ 부채꼴 O_1RQ와 부채꼴 O_2QS의 넓이는 같고 이 부채꼴의 반지름의 길이는 $r = 3\sqrt{3}$, 중심각은 $\frac{\pi}{3}$이므로 각각의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times (3\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{2}$</p> <p>④ ΔO_1QO_2의 넓이: $\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times r \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$</p> <p>⑤ 따라서 구하는 넓이는 $\frac{81\sqrt{3}}{4} - 9\pi = \frac{9}{4} \times (9\sqrt{3} - 4\pi)$이다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급: ①~④ 과정을 이해하고 있으나 ②~④ 중 계산 실수가 1개인 경우</p> <p>3등급: ①~④ 과정을 이해하고 있으나 ②~④ 중 계산 실수가 2개인 경우</p> <p>4등급: ①~④ 과정을 이해하고 있으나 ②~④ 중 계산 실수가 3개인 경우</p> <p>5등급: ①을 서술했거나 넓이를 구하는 잘못된 다른 방법을 서술한 경우</p> <p>6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우</p> <p>7등급: 백지 답안</p>	<p>8</p>

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

(1) 반지름의 길이가 2π 인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 한 변의 길이는

$$\overline{AB} = 2 \times 2\pi \times \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times 2\pi \times \cos \frac{\pi}{6} = 2\pi\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

직선 AB가 점 P_0 에서 원 C_1 에 접하므로 직선 AB와 직선 O_1P_0 는 서로 수직이고 직선 BC와 x 축은 서로 평행하므로 각 $P_0O_1O_0$ 의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 그러므로 각 $P_0O_1P_1$ 의 크기는 $\frac{2\pi}{3}$ 이고 호 P_0P_1 의 길이는 $r \times \frac{2\pi}{3}$ 이다. 문제의 조건으로부터 선분 AB의 길이와 호 P_0P_1 의 길이가 같으므로 $2\pi\sqrt{3} = r \times \frac{2\pi}{3}$ 이고 이로부터 $r = 3\sqrt{3}$ 이다.

(2) 선분 P_0P_1 의 길이는 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$ 인 원의 중심각 $\frac{2\pi}{3}$ 에 대응하는 현의 길이이므로

$$2 \times 3\sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{3} = 9 \text{ 이다. 따라서 } \triangle ABC \text{가 주어진 길을 따라 한 바퀴 돌 때 선분 } AA' \text{의 길이는 } 3 \times \overline{P_0P_1} = 3 \times 9 = 27 \text{ 이다.}$$

(3) 구하는 도형의 넓이는 사각형 RSO_2O_1 의 넓이에서 부채꼴 O_1RQ 의 넓이와 부채꼴 O_2QS 의 넓이, 그리고 삼각형 O_1QO_2 의 넓이의 합을 빼면 된다.

사각형 RSO_2O_1 의 넓이: 주어진 사각형은 직각사각형이고 $\overline{O_1O_2} = \overline{P_0P_1}$, $\overline{O_1R} = r$ 이므로 $\overline{O_1O_2} \times \overline{O_1R} = 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$

부채꼴 O_1RQ 와 부채꼴 O_2QS 의 넓이는 같고 이 부채꼴의 반지름의 길이는 $r = 3\sqrt{3}$, 중심각은 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 각각의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times (3\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{2}$

$$\triangle O_1QO_2 \text{의 넓이: } \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times r \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{81\sqrt{3}}{4} - 9\pi = \frac{9}{4} \times (9\sqrt{3} - 4\pi)$ 이다.

[성신여자대학교 문항정보]

1. 일반정보

유형	논술고사	
전형명	2021학년도 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연 계열 (수학) / <문제 4>	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 수학 1
	핵심개념 및 용어	집합의 연산, 수열, 경우의 수
예상소요시간	25분	

2. 문항 및 제시문

<문제 4> 다음 물음에 답하시오. [총25점]

(1) 좌표평면 위의 세 점 $P(10,0)$, $Q(20,0)$, $R(0,20)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR 의 둘레와 내부에 놓여 있는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하시오. [7점]

(2) 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $A(n,0)$, $B(0,n)$, $C(-n,0)$, $D(0,-n)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $ABCD$ 의 둘레와 내부에 놓여 있는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $N(n)$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{11} N(k)$ 의 값을 구하시오. [8점]

(3) $x + y + z = 20$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 에 대하여 x 는 홀수, y 는 짝수, z 는 소수인 순서쌍 (x,y,z) 의 개수를 구하시오. [10점]

3. 제시문 요약

첫 번째 질문은 주어진 삼각형의 둘레와 내부에 놓여 있는 각 좌표가 정수인 점의 개수를 구하는 문제이다. 두 번째 질문은 자연수 n 에 대하여 제시된 도형의 둘레와 내부에 놓여 있는 각 좌표가 정수인 점의 개수 $N(n)$ 을 구하고 이의 합을 구하는 문제이다. 세 번째 질문은 제시된 방정식을 만족하는 자연수 중 문제에 제시된 조건을 모두 만족하는 순서쌍의 개수를 구하는 문제이다.

4. 출제의도

평면에 제시된 도형을 구하고 이 도형에 놓여 있는 각 좌표가 정수인 점의 개수를 집합, 경우의 수, 수열의 합 등을 적절하게 활용하여 구하는 능력을 측정한다. 주어진 문제를 해결하기 위한 방법을 고안하고, 경우를 잘 나누어서 원하는 답을 구체적으로 계산할 수 있는 능력을 측정하기 위해 출제하였다.

5. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	[수학]-수와 연산-[1] 집합 [수학]-확률과 통계-[1] 경우의 수 [수학 I]-수열-[2] 수열의 합
성취기준 / 영역별 내용	[10수학 03-03] 집합의 연산을 할 수 있다. [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

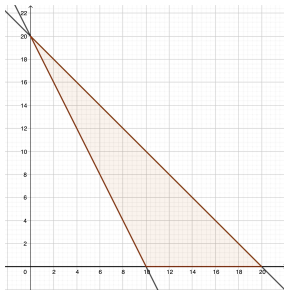
도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련자료 (교과서 등)	재구성여부
수학	황선욱 외	미래엔	2018	175, 261	교과서	
수학 I	류희찬 외	천재교과서	2017	140	교과서	

※ 참고자료는 저자와 발행처, 발행연도, 쪽수를 명기하며, 교과서 자료와 교과서 외 자료로 구별하여 제시함.

6. 문항 해설

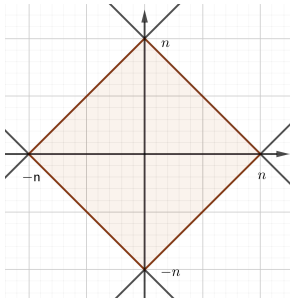
(1) $0 \leq n \leq 20$ 인 정수 n 에 대하여 주어진 도형의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 순서쌍 중 $x=n$ 인 점의 개수를 세면 직선 PR의 방정식은 $2x+y=20$, 직선 QR의 방정식은 $x+y=20$ 이므로

$\begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 10 \\ 21-n, & 11 \leq n \leq 20 \end{cases}$ 을 만족한다.



따라서 각 좌표가 정수인 점의 개수는 $\sum_{n=0}^{10} (n+1) + \sum_{n=11}^{20} (21-n) = 2 \sum_{n=1}^{10} n + 11 = 121$ 개다.

(2) 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $A(n,0)$, $B(0,n)$, $C(-n,0)$, $D(0,-n)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $ABCD$ 의 둘레와 내부에 놓여 있는 x , y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $N(n)$ 을 구하자. $-n \leq k \leq n$ 인 정수 k 에 대하여 정사각형 $ABCD$ 의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 점 중 $x=k$ 인 점의 개수는 $2n-2|k|+1$ 개다.



따라서 $N(n) = \sum_{k=-n}^n (2n-2|k|+1) = 2n+1 + 2 \sum_{k=1}^n (2n-2k+1) = 2n^2 + 2n + 1$ 이고, 이로부터

$$\sum_{k=1}^n N(k) = 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

이다. $n=11$ 인 경우 계산하면 1155이다.

(3) $x+y+z=20$ 을 만족하는 자연수의 순서쌍 (x,y,z) 중 x 는 홀수, y 는 짝수, z 는 소수인 해의 개수를 구하는 문제이므로 음이 아닌 정수 s, t 에 대해 $x=2s+1$, $y=2t+2$ 로 쓸 수 있고 따라서 주어진 문제는 $(2s+1)+(2t+2)+z=20$ 을 만족하는 음이 아닌 정수 s, t 와 소수 z 의 쌍의 개수를 구하면 된다. z 은 17보다 작거나 같은 홀수인 소수이므로 3, 5, 7, 11, 13, 17중 하나이다.

$z=3$ 인 경우: $s+t=7$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 8개

$z=5$ 인 경우: $s+t=6$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 7개

$z=7$ 인 경우: $s+t=5$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 6개

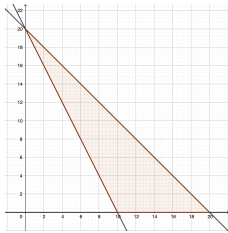
$z=11$ 인 경우: $s+t=3$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 4개

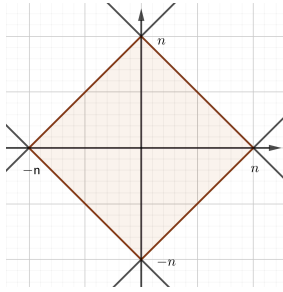
$z=13$ 인 경우: $s+t=2$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 3개

$z=17$ 인 경우: $s+t=0$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 1개

따라서 구하는 수는 $8+7+6+4+3+1=29$ 이다.

7. 채점 기준

채점 기준	배점
<p><문제 4> (1)</p> <p>① $0 \leq n \leq 20$인 정수 n에 대하여 주어진 도형의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 순서쌍 중 $x=n$인 점의 개수를 세면 직선 PR의 방정식은 $2x+y=20$, 직선 QR의 방정식은 $x+y=20$이므로</p>  <p>② $0 \leq n \leq 10$ (또는 $0 \leq n \leq 9$)인 경우 $n+1$개</p> <p>③ $11 \leq n \leq 20$ (또는 $10 \leq n \leq 20$)인 경우 $21-n$개</p> <p>④ 따라서 구하고자 하는 각 좌표가 정수인 점의 개수는</p> $\sum_{n=0}^{10} (n+1) + \sum_{n=11}^{20} (21-n)$ <p>⑤ $= 2 \sum_{n=1}^{10} n + 11 = 121$개다.</p> <p>[채점 기준]</p> <p>1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음</p> <p>2등급: ④까지 맞게 구하고 최종 답이 틀린 경우</p> <p>3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우</p> <p>4등급: ②~③단계에서 계산 실수가 1개인 경우</p> <p>5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우</p> <p>6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우</p> <p>7등급: 백지 답안</p>	7
<p><문제 4> (2)</p> <p>① $-n \leq k \leq n$인 정수 k에 대하여 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 점 중 $x=k$인 점의 개수는 $2n-2 k +1$개다.</p>	8



- ② $N(n) = \sum_{k=-n}^n (2n - 2|k| + 1)$
- ③ $= 2n + 1 + 2 \sum_{k=1}^n (2n - 2k + 1) = 2n^2 + 2n + 1$
- ④ $\sum_{k=1}^n N(k) = 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$ 이다.
- ⑤ $n = 11$ 인 경우 계산하면 1155이다.

[채점 기준]

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ④단계까지 옳게 서술한 경우
- 3등급: ③단계까지 옳게 서술한 경우
- 4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우
- 5등급: ①단계를 옳게 서술한 경우
- 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우
- 7등급: 백지 답안

<문제 4> (3)

- ① 음이 아닌 정수 s, t 에 대해 $x = 2s + 1, y = 2t + 2$ 라 두면
- ② $(2s + 1) + (2t + 2) + z = 20$ 으로부터 $2s + 2t + z = 17$ 을 만족하는 음이 아닌 정수 s, t 와 소수 z 의 쌍의 개수를 구하면 된다.
- ③ z 는 17보다 작거나 같은 홀수인 소수이므로 3, 5, 7, 11, 13, 17중 하나이다.
- ④ $z = 3$ 인 경우: $s + t = 7$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 8개
 $z = 5$ 인 경우: $s + t = 6$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 7개
 $z = 7$ 인 경우: $s + t = 5$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 6개
 $z = 11$ 인 경우: $s + t = 3$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 4개
 $z = 13$ 인 경우: $s + t = 2$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 3개
 $z = 17$ 인 경우: $s + t = 0$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 1개
- ⑤ 따라서 구하는 수는 $8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 = 29$ 이다.

[채점 기준]

- 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음
- 2등급: ①~③과정을 맞게 서술했으나 ④의 계산에서 2개 이하가 틀린 경우

3등급: ①~③과정을 맞게 서술한 경우

4등급: ②단계까지 옳게 서술한 경우

5등급: ①단계까지 옳게 서술한 경우, 또는 문제의 조건을 이용하여 식의 변형을 시도한 경우

6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우

7등급: 백지 답안

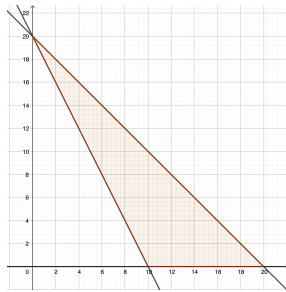
※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.

※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

8. 예시답안

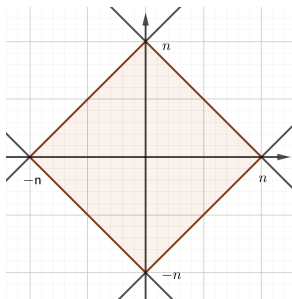
(1) $0 \leq n \leq 20$ 인 정수 n 에 대하여 주어진 도형의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 순서쌍 중 $x=n$ 인 점의 개수를 세면 직선 PR의 방정식은 $2x+y=20$, 직선 QR의 방정식은 $x+y=20$ 이므로

$\begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 10 \\ 21-n, & 11 \leq n \leq 20 \end{cases}$ 을 만족한다.



따라서 각 좌표가 정수인 점의 개수는 $\sum_{n=0}^{10} (n+1) + \sum_{n=11}^{20} (21-n) = 2 \sum_{n=1}^{10} n + 11 = 121$ 개다.

(2) 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $A(n,0)$, $B(0,n)$, $C(-n,0)$, $D(0,-n)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓여 있는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $N(n)$ 을 구하자. $-n \leq k \leq n$ 인 정수 k 에 대하여 정사각형 ABCD의 둘레와 내부에 놓인 각 좌표가 정수인 점 중 $x=k$ 인 점의 개수는 $2n-2|k|+1$ 개다.



따라서 $N(n) = \sum_{k=-n}^n (2n-2 \mid k \mid + 1) = 2n+1 + 2 \sum_{k=1}^n (2n-2k+1) = 2n^2 + 2n + 1$ 이고, 이로부터

$$\sum_{k=1}^n N(k) = 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

이다. $n = 11$ 인 경우 계산하면 1155이다.

(3) $x + y + z = 20$ 을 만족하는 자연수의 순서쌍 (x, y, z) 중 x 는 홀수, y 는 짝수, z 는 소수인 해의 개수를 구하는 문제이므로 음이 아닌 정수 s, t 에 대해 $x = 2s + 1, y = 2t + 2$ 로 쓸 수 있고 따라서 주어진 문제는 $(2s + 1) + (2t + 2) + z = 20$ 을 만족하는 음이 아닌 정수 s, t 와 소수 z 의 쌍의 개수를 구하면 된다. z 은 17보다 작거나 같은 홀수인 소수이므로 3, 5, 7, 11, 13, 17중 하나이다.

$z = 3$ 인 경우: $s + t = 7$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 8개

$z = 5$ 인 경우: $s + t = 6$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 7개

$z = 7$ 인 경우: $s + t = 5$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 6개

$z = 11$ 인 경우: $s + t = 3$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 4개

$z = 13$ 인 경우: $s + t = 2$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 3개

$z = 17$ 인 경우: $s + t = 0$ 인 음이 아닌 정수해의 개수는 1개

따라서 구하는 수는 $8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 = 29$ 이다.