5. 문항카드 5 – 자연계열 1차 1번

5.1 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">논술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술(일반)전형</td></tr>
<tr><td>계열(과목)/문항번호</td><td colspan="3">자연계열 1차(전자공학전공, 컴퓨터공학전공, 수학전공) / 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학, 수학I, 수학II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>· 함수의 증가와 감소
· 사잇값의 정리
· 역함수</td><td>· 사인함수와 코사인함수
· 도함수의 활용</td></tr>
<tr><td>예상소요 시간</td><td colspan="2">40분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

5.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 $x_1,\, x_2$에 대하여

① $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

[나] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\, b)$에서 미분가능할 때,

① 열린구간 $(a,\, b)$의 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 증가한다.

② 열린구간 $(a,\, b)$의 모든 x에 대하여 $f'(x) < 0$이면 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 감소한다.

[다] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 실수 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 열린구간 $(a,\, b)$에 적어도 하나 존재한다.

[문제]
함수 $f(x) = x - \sin x$에 대하여 제시문 [가], [나], [다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-\pi,\, \pi]$에서 증가함을 보이시오.

【1-2】 열린구간 $(-\pi,\, \pi)$의 각 실수 y에 대하여 $f(x) = y$인 열린구간 $(-\pi,\, \pi)$의 실수 x가 오직 하나씩 존재함을 보이시오.

문항 【1-2】에 의하여 열린구간 $(-\pi,\, \pi)$의 각 원소 y에 $f(x) = y$인 열린구간 $(-\pi,\, \pi)$의 원소 x

를 대응시키는 함수 $g:(-\pi,\pi)\to(-\pi,\pi)$ 를 정의할 수 있다. 문항 【1-3】과 문항 【1-4】에 답하시오.

【1-3】 $-\pi<y<\pi$ 일 때, $g(-y)+g(y)=0$ 임을 보이시오.

【1-4】 $-\pi<y<\pi$ 일 때, $|g(y)|^3\geq 6|y|$ 임을 보이시오.

5.3 출제의도

■ 미분은 다양한 분야에서 활용되기 때문에 고교교육과정에서 중요하게 다루어지고 있다. 따라서 미분법을 통한 수학적 문제 해결 능력과 창의·융합적 사고 능력을 평가하고자 하였다.
- 고교교육과정에서 중요하게 다루는 함수의 증가와 감소에 대한 의미를 잘 이해하고 있는지를 평가하고자 하였다.
- 함수의 도함수를 이용하여 함수가 증가 또는 감소한다는 것을 설명할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
- 역함수와 삼각함수의 기본적인 특성을 파악하고 있는지를 평가하고자 하였다.

■ 문항 【1-1】은 미분계수를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판정하는 문항으로 교육과정에서 중요하게 다루고 있는 개념이다. 따라서 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 쉽게 이해하고 해결할 수 있는 수준의 문제이다.

■ 문항 【1-2】는 연속함수의 성질을 이용하는 문제로서 교육과정에서 기초적인 내용이지만 매우 중요하게 다루고 있는 개념을 포함하고 있다. 문항 【1-1】의 결과를 이용하는 문항으로 유기적으로 연결되어 있으며 모든 교과서에서 다루고 있고 중요성이 강조되고 있는 개념이다.

■ 문항 【1-3】은 교육과정에서 다루고 있는 함수의 개념을 충실히 익힌 학생이라면 매우 쉽게 증명할 수 있는 함수의 기본적인 성질에 관한 문항이다. 그러므로 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 쉽게 이해하고 해결할 수 있다.

■ 문항 【1-4】는 제시문 [가], [나], [다]와 문항 【1-1】과 문항 【1-3】의 개념과 결과를 이용하여 부등식이 성립함을 보이는 문항이다. 교육과정에서 중요하게 다루고 있는 함수의 증가와 감소에 대한 개념과 미적분의 기본적인 내용인 도함수를 활용할 수 있다면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다. 전체적으로 고교교육과정의 개념을 활용하여 해결이 가능한 문항으로 많은 학생들이 어렵지 않게 해결할 수 있는 수준으로 생각된다.

5.4 출제 근거

5.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 [가]	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 [나]	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 [다]	**[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속** [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
하위문항 【1-1】	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.
하위문항 【1-2】	**[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속** [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
하위문항 【1-3】	**[수학] - (4) 함수 - ① 함수** [10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. **[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
하위문항 【1-4】	**[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

5.4.2 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2018	223
		박교식 외	동아출판	2018	221
		홍성복 외	지학사	2018	229
	수학I	배종숙 외	금성출판사	2018	83-84
		김원경 외	비상교육	2018	76-78
		이준열 외	천재교육	2018	82-83
	수학II	박교식 외	동아출판	2018	40, 81-83
		황선욱 외	미래엔	2018	38, 82-83

		고성은 외	좋은책신사고	2018	38, 80-81
	미적분	김원경 외	비상교육	2019	67, 105
		이준열 외	천재교육	2019	77, 120
		류희찬 외	천재교과서	2019	81, 137

5.5 문항 해설

5.4.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 [가], [나]는 ‘함수의 증가와 감소’를 제시하고 있으며 <수학Ⅱ>의 미분에 해당하는 지문이다.
- 제시문 [다]는 ‘사잇값의 정리’를 제시하고 있는데, 교육과정에 부합하는 내용이다.
- 문항 【1-1】은 제시문에 주어진 함수의 증가의 정의를 이용하여 쉽게 해결할 수 있는 수준으로 파악된다.
- 문항 【1-2】는 문항 【1-1】의 내용과 연계하여 연속함수의 성질을 적용하는 내용으로 대부분의 교과서에 다루는 개념과 문제로 어렵지 않게 해결할 수 있는 수준이다.
- 문항 【1-3】은 ‘역함수’의 의미를 이해하고 사인함수의 성질을 이용하여 주어진 관계식을 증명하는 문제로 교과서에서 자주 다루는 내용으로 교육과정에 부합한다.
- 문항 【1-4】는 주어진 부등식이 성립함을 증명하는 문항이다. ‘역함수’의 의미를 이해하고 있는 학생이라면 주어진 부등식을 x에 대한 관계식으로 변형하여 어렵지 않게 해결할 수 있는 수준이다.

5.5.2 출제 검토 교사 의견

- 제시문 [가], [나]는 함수의 증가와 감소를 제시하고 있다. 기본정의와 도함수와 연계된 정의를 제시하고 있다. 제시문 [다]는 ‘사잇값의 정리’를 제시하고 있다.
- 제시문은 모두 <수학Ⅱ> 교과서에서 발췌하여 구성하였다. 교과서의 표현이 재구성 없이 수록되어 제시문의 내용을 이해하는데 어려움이 없을 것으로 파악된다.
- 문항 【1-1】은 제시문 [나]를 이용하여 해결해야 한다. 이때, $f'(0)=0$이므로 구간을 $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$로 각각 나눈 후, 각 닫힌구간에서 증가함을 보이는 것이 핵심이다. 구간을 나누지 않고 증명하는 학생이 많을 것으로 예상된다. 어려운 문항은 아니지만 「함수의 증가와 감소」 내용을 세심히 살펴야 답안을 정확하게 작성할 수 있을 것으로 판단된다.
- 문항 【1-2】는 ‘일대일 대응’ 성질을 제시문 [다]의 ‘사잇값의 정리’와 ‘귀류법’의 개념을 이용하여 증명해야 한다. 수험생은 문항의 ‘오직 하나 존재함’에 주목해야 한다. 이는 제시문 [다]에서 볼 수 있는 ‘적어도 하나 존재한다.’의 표현과 다르며, 증명 과정에 ‘존재함’과 ‘유일함’이 포함되어야 한다. 제시문 [다]를 통하여 ‘존재함’이 증명되면 치역과 공역이 같음이 증명되는 것이고, 문항 【1-1】을 통해 함수 $f(x)$가 증가함을 이용하면 대응 관계가 유일하며 ‘일대일 함수’임을 보이는 것이다. 공통과목에서 학습하는 기본적인 개념이 다수 포함되어 있으나, 명제를 증명하

고 이를 기술하는 학습이 부족한 수험생은 다소 어려울 수 있다. 반면, 평소 평가에 자주 등장하지 않더라도 정의와 성질에 관심을 가지고 학습한 학생은 쉽게 답안을 작성할 수 있을 것으로 판단된다.

■ 문항 【1-3】은 <수학>의 '역함수' 성질을 활용하여 풀이해야 한다. 함수 $f(x)$와 $g(y)$의 대응 관계를 이용하면 문제를 비교적 쉽게 해결할 수 있다. 고등학교 교육과정에서는 역함수를 구한 후 y를 x로 표현하여 $g(x)$와 같이 기술하도록 안내하고 있으나, 본 문항에서는 문제 해결을 위하여 함수와 역함수와의 대응 관계를 이용해야 하므로 변수의 변환 없이 $g(y)$로 표현하였다. 교과서의 표기와 유사하게 $g(x)$로 표현하여 출제되었다면 많은 수험생들이 문항을 어렵게 느낄 것을 우려하여 배려한 것으로 보인다.

■ 문항 【1-4】는 구간을 나누어 주어진 부등식을 증명해야 한다. $y=0$일 때, $g(0)=0$이므로 자명하고, $0<y<\pi$일 때, 주어진 부등식을 $y=f(x)$인 관계를 이용하여 $x^3>6(x-\sin x)$으로 변환하여 증명할 수 있다. 그리고 문항 【1-3】의 결과에 따라 $-\pi<y<0$일 때도 성립한다. <미적분> 과목의 성취기준 '[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.'를 근거로 평가할 수 있으며, 구간을 잘 나누었다면 이후는 미적분 교과서에 수록된 예제 문항의 풀이 방법과 유사하여 쉽게 증명할 수 있다고 판단된다.

5.5.3 자문위원 평가 의견

■ 제시문 [가]가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 5, 4.9로 대부분 '매우 그렇다'라는 의견이다. "교육부 고시 제2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정에서 수학Ⅱ의 미분 중 도함수의 활용에 관한 제시문이다. 성취기준 등 세부내용으로는 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다에 해당한다"라는 의견이 있었다. 또한 "함수의 증가와 감소에 대한 정의로 고등학교 수학II 과정에서 도함수의 활용에서 함수의 증가와 감소의 판정을 학습하기 이전에 중요한 개념으로 학습하는 과정이다. 학교의 평가 및 수능 등에서도 주요하게 조건으로 다루는 개념인 만큼 고등학생 대부분에게 친숙한 개념이다. 이미 알고 있는 학생이 많았을 것으로 짐작되지만 추론능력을 측정하는 논술형 평가가 학생들 모두에게 익숙한 것은 아니기 때문에 함수의 증가와 감소의 판정에 대한 개념 이전에 정의에 대한 내용을 제시문으로 준 것은 적절하다고 보인다."라는 의견이 있었다.

■ 제시문 [나]가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.93, 4.9로 대부분 '매우 그렇다'라는 의견이다. "고등학교 2015 개정 교육과정의 '[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용'에서 소개된 내용을 발췌한 것으로 고등학교 교육과정을 이수한 학생들이 제시문의 내용을 쉽게 이해하고 문제에 적용하는 데에 어려움이 없었을 것"이라는 의견이 있었다.

■ 제시문 [다]가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.93으로 대부분 '매우 그렇다'라는 의견이다. 대부분 "고등학교 2015 개정 교육과정의 '수학Ⅱ - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속'에서 소개된 내용을 발췌한 것으로 고등학교 교육과정을 이수한 학생들이 제시문의 내용을 쉽게 이해하고 문제에 적용하는 데에 어려움이 없었을 것"이라는 의견이 있었다.

■ 문항 【1-1】이 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.9로 대부분 '매우 그렇다'라는 의견이다. "제시된 함수 $f(x)$는 대부분의 고등학교 미적분 교과서에 소개되거나 예제 등에서 다루어진 것이므로 학생들에게 익숙했을 것", "제시문 [가], [나]의 내용을 활용하여 해결할 수 있으므로 큰 어려움이 없었을 것"이라는 의견이다.

■ 문항 【1-2】가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.7

로 대부분 ‘그렇다’라는 의견이다. “2015 개정 교육과정 ‘[수학Ⅱ] – (1) 함수의 극한과 연속 – ② 함수의 연속’ 단원에 수록되어 있는 사잇값의 정리를 활용하여 주어진 범위에서 조건을 만족하는 해가 있음을 판단하는 문제로 교과서에 수록된 연속함수와 증가함수의 특징(일대일 대응)이 사용되므로 교육과정에 충실한 문제”라는 의견이 대부분이다.

- 문항 【1-3】이 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.8, 4.7로 대부분 ‘그렇다’라는 의견이다. “그래프의 대칭적 성질을 판단해야 하는 문제로서 역함수의 성질, 함수의 증가와 감소 등의 교육과정 내용체계를 활용하여 충분히 해결할 수 있어 교육과정 성취기준에 기반한 문제라고 볼 수 있다.”라는 의견과 “주어진 함수와 역함수가 원점대칭임을 보이는 문제로 학생들에게 익숙한 문제 형태”라는 의견이다.
- 문항 【1-4】가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.7, 4.6으로 대부분 ‘그렇다’라는 의견이다. “고등학교 교육과정을 이수한 학생들이 문제를 해결하는 데 큰 어려움이 없을 것”, “문제해결에 필요한 사고의 과정을 앞의 소문항에서 상당부분 유도해준 부분이 사고와 다루어야 하는 계산의 양이 적정하다고 판단됨”이라는 의견이다.
- 【문제 1】의 제시문 난도에 대한 질문에 5점 척도 가중평균이 1.4로 대부분 ‘쉽다’라는 의견이었으며 문항에 대한 난도는 2.9로 ‘보통이다’라는 의견이다. 제시문은 “주로 <수학Ⅱ>에서 배운 연속함수의 미분에 대한 기본 정리와 정의들로 구성이 되어있어 쉽고 친숙하게 느꼈을 것이고, 전반적으로 평이하고 어렵지 않은 개념을 활용할 수 있는 문제로 구성되어 있어 난이도가 적절하다.”라는 의견이다. 또한, “제시문과 교과서의 개념을 활용하는 방법이 단조롭고 문제의 풀이가 길지 않아 전체적으로 쉬운 느낌이 많이 들지만 문항 【1-4】에서 다소 응용력이 필요한 문제가 제시됨에 따라 어느 정도의 변별력이 있는 난도로 구성된 느낌”이라는 의견이다.

5.6 채점 기준

<table>
<tr><th>하위문항</th><th>채점기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>【1−1】</td><td>■ 제시문 [가]와 [나]에 주어진 증가함수의 정의와 충분조건을 이용하여 함수 $f(x)$가 각 구간 $[-\pi, 0]$과 $[0, \pi]$에서 증가함을 보일 수 있다.
■ 함수 $f(x)$가 각 구간 $[-\pi, 0]$과 $[0, \pi]$에서 증가하므로 전체구간 $[-\pi, \pi]$에서 증가한다는 것을 명시한다.</td><td rowspan="4">320</td></tr>
<tr><td>【1−2】</td><td>■ 제시문 [다]의 사잇값 정리를 이용하여 $f(x)=y$를 만족하는 x가 적어도 하나 존재함을 보일 수 있다.
■ 문항 【1−1】의 결과를 이용하여 $f(x)=y$를 만족하는 x가 오직 하나뿐임을 보일 수 있다.</td></tr>
<tr><td>【1−3】</td><td>■ 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 뜻을 정확하게 이해하고, 원래의 함수 $f(x)$의 성질에 해당하는 $g(x)$의 성질을 증명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>【1−4】</td><td>■ 역함수 $g(x)$에 대한 어떤 부등식을 원래의 함수 $f(x)$에 대한 부등식으로 변환할 수 있다.
■ $f(x)$에 대한 부등식을 증명하기 위하여, 적당한 함수 $h(x)$를 정의하고 제시문 [나]에 주어진 증가함수의 충분조건을 이용하여 $h(x)$가 구간에서 증가함을 보일 수 있다.</td></tr>
</table>

5.7 답안사례

【1-1】
$-\pi < x < 0$일 때, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$이다. 따라서 제시문 [나]에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-\pi, 0]$에서 증가한다. 또한 $0 < x < \pi$일 때, $f'(x) > 0$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가한다. 함수 $f(x)$가 각 구간 $[-\pi, 0]$과 $[0, \pi]$에서 증가하므로 전체 구간 $[-\pi, \pi]$에서 증가한다.

【1-2】
$-\pi < y < \pi$일 때, $f(-\pi) = -\pi$이고 $f(\pi) = \pi$이므로 $f(-\pi) < y < f(\pi)$이다. 제시문 [다]에 의하여 $f(x) = y$인 x가 열린구간 $(-\pi, \pi)$에 적어도 하나 존재한다. 문항 【1-1】의 결과에 의하여 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\pi, \pi)$에서 증가하므로 그와 같은 x는 오직 하나뿐이다.

【1-3】
$x = g(y)$라고 하면 $y = f(x) = x - \sin x$이므로 $f(-x) = -f(x) = -y$이다. 따라서 함수 g의 정의에 의해 $-x = g(-y)$이다. 그러므로 $-g(y) = -x = g(-y)$이다.

【1-4】
(i) $0 < y < \pi$일 때, $x = g(y)$라고 하면 $x > 0$이고 $y = f(x)$이므로
$|g(y)|^3 > 6|y| \iff x^3 > 6f(x) \iff x^3 > 6(x - \sin x)$이다.
그러므로 $0 < t < \pi$인 모든 t에 대하여 $t^3 > 6(t - \sin t)$를 증명하면 된다. 이를 위하여 함수 $h(t) = \dfrac{t^3}{6} - t + \sin t$를 생각하자. 이때 $h'(t) = \dfrac{t^2}{2} - 1 + \cos t$, $h''(t) = t - \sin t$이다.
$0 < t < \pi$일 때, $h''(t) = f(t) > 0$이므로 $h'(t)$가 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가한다. 따라서 $0 < t < \pi$일 때, $h'(t) > h'(0) = 0$이다. 따라서 함수 $h(t)$가 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가한다.
그러므로 $0 < t < \pi$일 때, $h(t) > h(0) = 0$이다. 즉, $t^3 > 6(t - \sin t)$이므로 $g(y)^3 > 6y$이다.
(ii) $y = 0$일 때, $g(0) = 0$이므로 당연히 성립한다.
(iii) $-\pi < y < 0$이면 $0 < -y < \pi$이므로 문항 【1-3】과 (i)에 의해서

$$|g(y)|^3 = |-g(y)|^3 = |g(-y)|^3 > 6|-y| = 6|y|$$

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의해서 열린구간 $(-\pi, \pi)$의 모든 y에 대하여 $|g(y)|^3 \geq 6|y|$가 성립한다.

6. 문항카드 6 – 자연계열 1차 2번

6.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열 1차(전자공학전공, 컴퓨터공학전공, 수학전공) / 2번	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 확률 및 통계
	핵심개념 및 용어	· 경우의 수 · 조합 · 중복조합 · 이항계수
예상소요 시간	60분	/ 100 분

6.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 $r\,(1 \le r \le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타낸다. 각각의 조합에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $r!$이므로, ${}_n\mathrm{C}_r \times r!$은 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수와 같고 이를 이용하면

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

을 얻을 수 있다. 이때 위의 등식이 $r=0$일 때도 성립하도록 ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$로 정한다.

[나] 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 것을 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 ${}_n\mathrm{H}_r$로 나타낸다. 서로 다른 2개의 숫자 1, 2에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우는 111, 112, 122, 222이므로 ${}_2\mathrm{H}_3 = 4$이다. 이 경우의 수를 조합의 수로 나타내기 위하여 각 경우의 첫 번째, 두 번째, 세 번째 수가 중복되지 않도록 연속인 세 수 0, 1, 2를 각각 더하면 123, 124, 134, 234이다. 이것은 서로 다른 4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하지 않고 3개를 택하는 모든 조합이므로 ${}_2\mathrm{H}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 = {}_{2+3-1}\mathrm{C}_3$임을 알 수 있다. 일반적으로 ${}_n\mathrm{H}_r$는 서로 다른 $(n+r-1)$개에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$와 같다.

[다] 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$는 방정식

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

[문제]
제시문 [가], [나], [다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【2-1】 m이 자연수일 때, 방정식 $2x+y+z+w=2m$의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하시오.

$n \geq 5$인 자연수 n에 대하여 1부터 n까지의 자연수에서 서로 다른 세 수를 택하려고 한다. 문항 【2-2】, 【2-3】, 【2-4】에 답하시오.

【2-2】 k가 $1 \leq k \leq n-4$인 자연수라고 하자. 연속인 두 수가 포함되지 않고 가장 작은 수가 k가 되도록 서로 다른 세 수를 택하는 방법의 수를 구하시오. (단, 연속인 두 수란 $a, a+1$ 꼴의 두 정수를 말한다.)

【2-3】 연속인 두 수가 포함되지 않도록 서로 다른 세 수를 택하는 방법의 수를 구하시오.

【2-4】 n이 $n \geq 5$인 짝수라고 하자. 연속인 두 수가 포함되지 않도록 서로 다른 세 수를 택했다고 할 때, 이 중에서 가장 작은 수가 짝수일 확률을 구하시오.

6.3 출제 의도

- 일상생활에서 어떤 일을 계획하고 의사 결정을 할 때 일어나는 사건을 예측할 수 있는 능력이 있는지를 평가하고자 하였다.
- 제시문을 이해하고 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는 종합적인 능력을 평가하고자 하였다.
- 사건이 일어날 수 있는 모든 경우를 분류하고 조직하는 수학적 능력을 평가하고자 하였다.
- 조합과 중복조합의 개념과 관계를 잘 이해하고 있는지를 평가하고자 하였다.
- 구체적인 상황에서 조합과 중복조합의 수를 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
- 문항 【2−1】에서는 중복조합의 수가 계수가 1인 n변수 일차 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다는 제시문 [다]의 내용을 활용하여 한 변수의 계수만 1보다 크고 나머지 모든 변수들의 계수는 1인 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수를 계산할 수 있는가를 묻는 문항이다. 제시문 [다]는 교육과정에서 중요하게 다루고 있고 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있다.
- 문항 【2−2】에서는 제시문 [나]에서 제시된 중복조합을 조합으로 변환시키는 방법을 주어진 조건을 만족하는 조합의 개수를 묻는 문항이다. 주어진 조건을 만족하는 조합은 한 개를 고정하므로 결국 두 개를 택하는 조합이다.
- 문항 【2−3】은 연속한 두 수를 포함하지 않는 세 수의 조합의 개수를 묻는 문항으로 문항 【2−2】의 결과를 이용하면 기초적인 방법으로 조건을 만족하는 조합의 수를 찾을 수 있다. 구체적으로 문항 【2−2】의 결과는 n에 관한 이차식으로 표현되므로 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$을 계산을 할 수 있으면 해결이 가능하다. 제시문 [나]에서 제시된 중복조합을 조합으로 변환시키는 방법을 활용해서 구할 수도 있으며 이 경우 위의 계산 없이도 바로 구하는 값은 얻을 수 있다. 이항계수의 기본적인 성질과 위의 자연수의 합 계산을 통해 문제를 해결할 수 있다.

■ 문항 【2-4】 에서는 가장 작은 수가 짝수인 연속한 두 수를 포함하지 않는 세 수의 조합의 개수를 묻는 문항이다. 문항 【2-2】에서 구한 값을 짝수에 대해 더하면 얻을 수 있으므로 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$ 이 포함된 식의 계산 능력과 조건부 확률의 정의를 알고 있는지 평가하는 문항이다.

6.4 출제 근거

6.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 [가]	**[수학] – (5) 확률과 통계 – ② 순열과 조합** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
제시문 [나]	**[수학] – (5) 확률과 통계 – ② 순열과 조합** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] – (1) 경우의 수 – ① 순열과 조합** [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
제시문 [다]	**[수학] – (5) 확률과 통계 – ② 순열과 조합** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] – (1) 경우의 수 – ① 순열과 조합** [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
하위문항 【2-1】	**[수학] – (5) 확률과 통계 – ② 순열과 조합** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] – (1) 경우의 수 – ① 순열과 조합** [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
하위문항 【2-2】	**[수학] – (5) 확률과 통계 – ② 순열과 조합** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] – (1) 경우의 수 – ① 순열과 조합** [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
하위문항 【2-3】	**[수학] – (5) 확률과 통계 – ② 순열과 조합** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] – (1) 경우의 수 – ① 순열과 조합** [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
하위문항 【2-4】	**[수학] – (5) 확률과 통계 – ② 순열과 조합** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. **[수학Ⅰ] – (3) 수열 – ② 수열의 합** [12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. **[확률과 통계] – (1) 경우의 수 – ① 순열과 조합** [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] – (2) 확률 – ② 조건부확률** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

6.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	권오남 외	교학사	2018	268-269
		홍성복 외	지학사	2018	267-268
	수학 I	고성은 외	좋은책 신사고	2018	137
		홍성복 외	지학사	2018	141
	확률과 통계	권오남 외	교학사	2019	19-21, 63
		박교식 외	동아출판	2019	20-22, 62
		김원경 외	비상교육	2019	17, 19, 54
		고성은 외	좋은책 신사고	2019	25
		홍성복 외	지학사	2019	20, 21, 23, 64
		이준열 외	천재교육	2019	23

6.5 문항 해설

6.5.1 위원회 자체 평가 의견

■ 제시문 [가]는 ‘조합의 정의’, ‘조합의 수’를 제시하고 있으며 <수학>의 순열과 조합에 해당하는 지문이다.

■ 제시문 [나], [다]는 ‘중복조합의 수’를 제시하고 있으며 확률과 통계의 순열과 조합에 해당하는 지문이다.

■ 문항 【2-1】은 제시문 [다]를 이용하여 쉽게 해결할 수 있는 수준으로 파악된다.

■ 문항 【2-2】는 제시문 [나]의 중복조합을 조합으로 변환시키는 방법을 활용하여 어렵지 않게 해결할 수 있는 수준이다.

■ 문항 【2-3】은 문항 【2-2】의 내용을 확장한 형태로 시그마를 활용하여 $\sum_{k=1}^{n-4} {}_{n-k-2}\mathrm{C}_2 = \sum_{k=2}^{n-3} {}_{k}\mathrm{C}_2$를 계산하면 어렵지 않게 해결할 수 있는 수준이다.

■ 문항 【2-4】는 문항 【2-2】, 【2-3】과 조건부확률을 이용하면 어렵지 않게 해결할 수 있는 수준이다.

6.5.2 출제 검토 교사 의견

■ 제시문 [가]는 <수학> 교과서에서 ‘조합’의 내용을 발췌한 것이다. 중복조합 계산에서 조합의 이해와 계산 과정이 필요하다는 것을 생각한다면 당연히 제시문에 수록되어야 할 개념으로 적절한 수준으

로 제시되었다. 교육과정에 부합한다.

- 제시문 [나]는 <확률과 통계>에서 ‘중복조합’의 내용을 발췌하였으며, 일부 사례가 더해져서 그 내용이 재구성되었다. 특히 ‘첫 번째, 두 번째, 세 번째 수가 중복되지 않도록 연속인 세 수 $0, 1, 2$를 각각 더하면’으로 시작하는 부분은 중복조합 ${}_n\mathrm{H}_r$를 조합 ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$로 바꾸어 계산하는 이유를 설명하고 있는데, 이는 동시에 이 문제를 해결할 수 있는 여러 방법 중 하나를 제시하고 있다. 교육과정에 부합한다.
- 제시문 [다]는 <확률과 통계>의 ‘중복조합’에서 ‘방정식의 음이 아닌 정수해의 개수’를 구하는 예제를 일반화하여 설명한 것이다. 보통 확률과 통계 과목의 교과서는 중복조합에서 학생들에게 2~3개 정도의 예제를 제공하고 있다. 제시문에 학생들이 경험한 예제의 일반화된 내용이 수록되면 수험생은 제시문 [다]의 내용이 문항의 해법이 될 수 있다는 것을 예상할 수 있다. 교육과정에 부합한다.
- 문항 【2-1】은 제시문 [다]를 이용하여 풀이할 수 있으며, <확률과 통계>에서 흔히 제공하는 예제와 유사하여 수험생에게 친숙할 것이다. 교육과정 성취기준 ‘[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.’를 근거로 평가할 수 있고, 이 문항의 풀이 과정 및 결과가 문항 【2-4】의 풀이 과정에 활용되므로 문항 【2-1】은 문항 【2-4】의 길잡이 역할을 한다. 다만, 방정식의 상수항은 숫자 대신 문자로 표기되어 결과를 정리하는 과정이 번거로울 수 있다. 또한, 문항의 방정식에서 상수항이 $2m$ 대신 n으로 출제되었다면 수험생이 짝수와 홀수의 경우를 구분하여 계산해야 하므로 풀이 과정이 번거롭고 길어졌을 것이다. 따라서 방정식의 우변(상수항)을 $2m$으로 둔 것은 수험생의 문제 해결 시간을 줄이고 과정을 단순하게 하기 위한 것이다. 계산과정에 $\sum_{k=1}^{m} k$, $\sum_{k=1}^{m} k^2$ 를 이용하는 부분이 있는데, 교육과정의 기본 내용으로 난도는 쉬운 편이다.
- 문항 【2-2】와 문항 【2-3】은 <확률과 통계>에서 제시한 다양한 방법으로 해결할 수 있으며, 세부 조건의 차이가 있지만 문제 해결을 위한 방법은 구조적으로 유사하다. 우선 선택할 수 있는 방법은 제시문 [나]에 안내된 ‘중복조합을 조합으로 변환시키는 방법’이다. 특히 문항 【2-2】의 경우를 예로 들면, 여사건을 이용하여 구할 수도 있는데, 1부터 $(n-k-1)$에서 서로 다른 두 수를 택하는 방법의 수를 구하고 연속인 두 수를 택하는 방법 $(n-k-2)$를 빼도 된다. 또한 먼저 k를 뽑고 $k+2$부터 n까지의 $(n-k-1)$개의 자연수에서 연속이 아닌 서로 다른 두 수를 택하는 과정을 제시문 [다]와 문항 【2-1】에서 안내한 것과 같이 해결할 수도 있다. 제시문 [다]의 방법을 이용하면 방정식 $x+y+z=n-k-3$이고 $x,\ z \geq 0,\ y \geq 1$인 정수해의 개수를 구하는 문제와 같다. 이렇듯 문항 【2-2】, 【2-3】은 문제 해결에 여러 방법이 존재하며, 문제 해결 과정 및 결과는 문항 【2-4】의 길잡이 역할을 한다. 문항이 단계별로 제시되어 있어 학생들에게 다양한 생각을 할 수 있도록 유도하고 있다. 수학적으로 의미가 있는 문항이다.
- 문항 【2-4】는 앞선 문항 【2-1】, 【2-2】, 【2-3】의 문제 해결 과정을 모두 참고해서 조건부 확률을 계산하는 과정이다. 따라서 복잡해 보이지만 이전 문항의 문제 해결 과정 및 결과를 활용하면 문제 해결에 오랜 시간이 걸리지는 않을 것이다. 문제 해결 과정에 중복조합, 조건부확률, 여러 가지 수열의 합 등의 이해가 필요하며, 각각 성취기준 [12확통01-02], [12확통02-05], [12수학Ⅰ03-05]를 근거로 평가할 수 있다.

6.5.3 자문위원 평가 의견

- 제시문 [가]가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 5, 5로 대부분 ‘매우 그렇다’라는 의견이다. “교육부 고시 제2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정에서 수학

의 경우의 수 중 순열과 조합에 관한 제시문이다. 성취기준 등 세부내용으로는 <[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다>에 해당한다” 라는 의견이다.

■ 제시문 [나]가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.9로 대부분 ‘매우 그렇다’ 라는 의견이다. “2015 개정 교육과정 ‘[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합’ 단원에 수록되어 있는 중복조합에 대한 정의와 계산 방법을 다루고 있는데, 교육과정 교과서의 내용 요소에 충실하다고 볼 수 있다. 중복조합의 계산 방법 중 가장 보편적인 방법을 제시문에 소개함으로써 학생들이 공식의 증명 방법에 대한 이해도를 높일 수 있었다.” 라는 의견이 있었다. 대부분 교육과정에 부합한다는 의견이다.

■ 제시문 [다]가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.9로 대부분 ‘매우 그렇다’ 라는 의견이다. “ ‘다양한 상황에서 중복조합의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다’ 라는 목표와 부합된다.” , “중복조합을 소개하는 모든 교과서에서 대표 예제로 다루어지는 내용이며 학교의 평가 및 수능 시험에서도 대개 쉬운 형태의 문제로 자주 출제되므로 학생에게 친숙한 내용이라 할 수 있다.” 라는 의견이다. 대부분 교육과정에 부합한다는 의견이다.

■ 문항 【2-1】이 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.7로 대부분 ‘매우 그렇다’ 라는 의견이다. “확률과 통계 과목의 핵심성취기준인 ‘[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다’ 에 근거하여 고등학교 교육과정 범위에 해당하고, 부정방정식의 정수인 해의 개수를 구하는 문제에서 중복조합을 사용하는 것으로 대표적인 교과서 예시 문제이다.” 라는 의견이다. 또한, “중복조합의 활용에서 계수를 약간 조정한 변형 문제로 치환을 통한 중복조합으로의 풀이, 수형도를 이용한 풀이 등 다양한 접근이 가능하므로 학생의 논리적인 사고력과 유창성을 측정하기에 적합하며 고교교육과정의 확률과 통계과목을 정상적으로 학습한 학생이라면 한 번쯤 다루어봤을 만한 형식과 수준의 문제이다.” 라는 의견도 있었다.

■ 문항 【2-2】가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.6으로 대부분 ‘그렇다’ 라는 의견이다. “적절한 기준을 정하고 경우를 나누어 경우의 수를 세는 과정에서 논리적인 사고력을 필요로 하나 그 수준과 범위는 고등학교 교육과정의 수학과목과 확률과 통계과목을 정상적으로 이수한 학생이라면 쉽게 해결할 수 있다고 여겨짐. 이후 문항 【2-3】,【2-4】의 해결 과정에 유의미한 비계의 역할을 해줄 만한 사고를 유도하는 문제라고 생각된다.” 라는 의견이다. 또한, “고등학교 교육과정을 이수하고 대학수학능력시험을 준비한 학생들이 문제를 해결하는 데에 큰 어려움이 없었을 것.” 이라는 의견도 있었다.

■ 문항 【2-3】이 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.6으로 대부분 ‘그렇다’ 라는 의견이다. “문항 【2-2】에서 조금 더 발전한 형태로 경우를 확장하여 추론하고 계산하는 사고를 측정하기에 적합하다고 생각됨. 연속된 수를 선택하거나 선택하지 않도록 하는 조건은 고등학교 교과서나 수능 연계교재와 같은 보조교재 등에서 자주 다루어지므로 학생들에게 익숙하고 고등학교 교육과정 범위에 부합한다고 생각된다.” 라는 의견이다. 또한, “중복조합이라는 내용체계에 맞으며 ‘[12확통01-02]중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다’ 라는 성취기준에 부합한다.” 라는 의견도 있었다.

■ 문항 【2-4】가 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.5로 대부분 ‘그렇다’ 라는 의견이다. “제시문 [나]와 문항 【2-2】, 문항 【2-3】을 활용하여 문제풀이에 접근한다면 모의고사에서도 다뤄지는 유형의 문제이기에 학생들이 문제를 해결할 수 있었을 것” , “풀이가 다소 복잡할 수 있지만 기본적으로 활용한 수학적 내용은 조합의 성질, 그리고 조건부확률이 전부이기 때문에 고등학교 교육과정의 범위에 해당한다고 볼 수 있다.” 라는 의견이다. 대부분 교육과정에 부합한다는 의견이다.

■ 자연계열 1차 2번의 제시문 난이도에 대한 질문에 5점 척도 가중평균이 1.7로 대부분 ‘쉽다’ 라는 의견이었으며 문항에 대한 난도는 3.3으로 ‘보통이다’ 라는 의견이다. 제시문은 “교과서에 수록된

내용으로 학생들에게 익숙한 내용이다.” 라는 의견이다. 또한, “주어진 공식을 그대로 활용하는 것이 아니라 공식을 사용할 수 있는 환경으로 식을 변경하고 아이디어를 창출해 내야 하는 점에서 변별력이 있는 난도로 구성된 느낌” 이라는 의견이다.

6.6 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
【2-1】	■ $x=i$ 일 때, 주어진 방정식의 음이 아닌 정수해의 개수가 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_{2m-2i}$ 임을 파악할 수 있다. ■ 구하는 답을 중복조합의 합으로 올바르게 표현하고, 제시문을 활용하여 이 합을 정확하게 계산할 수 있다.	480
【2-2】	■ 구하는 방법의 수가 1 부터 $(n-k-1)$ 까지의 자연수에서 연속이 아닌 서로 다른 두 수를 택하는 조합의 수와 같다는 것을 파악할 수 있다. ■ 이 조합의 수가 1 부터 $(n-k-3)$ 까지의 자연수에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같음을 잘 설명할 수 있다. ■ 제시문을 활용하여 중복조합의 수를 정확하게 계산할 수 있다.	
【2-3】	■ 1 부터 $n-4$ 까지의 자연수에서 3 개를 택한 중복조합으로부터 1 부터 n 까지의 자연수에서 연속하는 두 수를 포함하지 않는 서로 다른 세 수의 조합을 얻는 방법을 설명할 수 있다. ■ 1 부터 n 까지의 자연수에서 연속하는 두 수를 포함하지 않는 서로 다른 세 수의 조합의 수가 중복조합의 수 ${}_{n-4}\mathrm{H}_3$ 과 같음을 정확하게 설명할 수 있다.	
【2-4】	■ 구하는 방법의 수를 문항 【2-2】의 결과를 이용하여 이항계수의 합으로 올바르게 표현할 수 있다. ■ 이항계수의 성질을 이용하여, 이 합을 정확하게 계산할 수 있다. ■ 문항 【2-3】의 결과를 이용하여 구하는 조건부확률을 구할 수 있다.	

6.7 답안 사례

【2-1】

먼저 x의 값을 정하자. $x = i\ (0 \le i \le m)$일 때, 방정식 $y+z+w = 2m-2i$의 음이 아닌 정수해의 개수는 제시문 [다]에 의해 ${}_3\mathrm{H}_{2m-2i}$이다. 제시문 [나]에 의해

${}_3\mathrm{H}_{2m-2i} = {}_{3+(2m-2i)-1}\mathrm{C}_{2m-2i} = {}_{2m-2i+2}\mathrm{C}_2$

이므로, 구하는 정수해의 개수는

$${}_{2m+2}\mathrm{C}_2 + {}_{2m}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_4\mathrm{C}_2 + {}_2\mathrm{C}_2 = \sum_{i=1}^{m+1} {}_{2i}\mathrm{C}_2$$

이다. 등식 ${}_{2i}\mathrm{C}_2 = \dfrac{2i(2i-1)}{2}$을 이용하면 위 합은

$$\sum_{i=1}^{m+1}(2i^2-i) = \frac{2(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} - \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(4m+3)}{6}$$

【2-2】

연속인 두 수가 포함되지 않고 가장 작은 수가 k가 되도록 세 수를 택하려면, 먼저 k를 뽑고 $k+2$부터 n까지의 $(n-k-1)$개의 자연수에서 연속이 아닌 서로 다른 두 수를 택하면 된다. 이렇게 택하는 방법의 수는 1부터 $(n-k-1)$까지의 자연수에서 연속이 아닌 서로 다른 두 수를 택하는 방법의 수와 같음은 자명하다.

1부터 $(n-k-1)$까지의 자연수에서 연속이 아닌 서로 다른 두 수는 제시문 [나]의 중복조합을 조합으로 변환시키는 방법을 활용하여 쉽게 구할 수 있다. 1부터 $(n-k-3)$까지의 자연수에서 중복조합 $i, j\ (1 \le i \le j \le n-k-3)$를 택하는 경우, 연속이 아닌 두 수의 조합으로 나타내기 위하여 첫 번째와 두 번째 수에 각각 0, 2를 더하면 $i, (j+2)$를 얻는다. 이것은 1부터 $(n-k-1)$까지의 자연수에서 연속이 아닌 두 수를 택한 조합이다. 1부터 $(n-k-1)$까지의 자연수에서 연속이 아닌 서로 다른 두 수는 모두 이와 같은 방식으로 얻을 수 있으므로 구하는 방법의 수는 ${}_{n-k-3}\mathrm{H}_2 = {}_{n-k-2}\mathrm{C}_2$이다.

【2-3】

제시문 [나]의 중복조합을 조합으로 변환시키는 방법을 활용하여 1부터 n까지의 자연수에서 연속인 두 수가 포함되지 않도록 서로 다른 세 수를 택할 수 있다.

1부터 $n-4$까지의 자연수에서 중복조합 $a, b, c\ (1 \le a \le b \le c \le n-4)$를 택하는 경우, 연속인 두 수를 포함하지 않는 서로 다른 세 수의 조합으로 나타내기 위하여 각 경우의 첫 번째, 두 번째, 세 번째 수에 각각 0, 2, 4를 더하면 $a, (b+2), (c+4)$를 얻는다. 이것은 1부터 n까지의 자연수에서 연속하는 두 수가 포함되지 않도록 3개를 택한 조합이다. 1부터 n까지의 자연수에서 연속인 두 수를 포함하지 않는 서로 다른 세 수는 이와 같은 방법으로 모두 얻을 수 있으므로 구하는 방법의 수는 ${}_{n-4}\mathrm{H}_3 = {}_{n-2}\mathrm{C}_3$ 이다.

【2−4】
문항 【2−2】의 풀이에서 연속인 두 수가 포함되지 않고 가장 작은 수가 k가 되도록 서로 다른 세 수를 택하는 방법의 수는 ${}_{n-k-2}\mathrm{C}_2$임을 보였다. $k=2,4,\cdots,n-4$ 에 대하여 이 값을 모두 더하면 연속인 두 수가 포함되지 않고 가장 작은 수가 짝수가 되도록 서로 다른 세 수를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다. $n=2m$ 이라고 놓으면 구하는 방법의 수는

$${}_2\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n-6}\mathrm{C}_2+{}_{n-4}\mathrm{C}_2=\sum_{i=1}^{m-2}{}_{2i}\mathrm{C}_2$$

이다. $m'=m-3$ 이라고 치환하면 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}{}_{2i}\mathrm{C}_2=\sum_{i=1}^{m'+1}{}_{2i}\mathrm{C}_2$ 이므로 【2−1】의 풀이에 의하여 이 값은

$$\frac{(m'+1)(m'+2)(4m'+3)}{6}=\frac{(m-2)(m-1)(4m-9)}{6}=\frac{(n-4)(n-2)(2n-9)}{24}$$

【2−3】의 결과를 이용하면 구하는 조건부 확률은

$$\frac{\dfrac{(n-2)(n-4)(2n-9)}{24}}{\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}}=\frac{2n-9}{4(n-3)}$$

7. 문항카드 7 – 자연계열 2차 1번

7.1 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">논술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술(일반)전형</td></tr>
<tr><td>계열(과목)/문항번호</td><td colspan="3">자연계열 2차(화공생명공학전공, 기계공학전공, 물리학전공) / 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학II, 미적분, 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">· 조건부확률
· 확률의 곱셈정리
· 기댓값
· 구간
· 최솟값</td></tr>
<tr><td>예상소요 시간</td><td colspan="2">40분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

7.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

어느 도시에 신종 바이러스가 확산하여 이 도시에 거주하는 사람의 $100r\,\%$(r는 $0<r<1$인 상수)가 감염되었다. 방역당국은 바이러스 감염 여부를 검사하는 기술을 확보하였으나 이 검사 기술에는 다음 두 종류의 오류가 있을 수 있다.

① 감염된 사람을 검사했을 때 음성 반응이 나타날 수 있고, 이 확률은 p이다. (단, $0<p<1$)
② 감염되지 않은 사람을 검사했을 때 양성 반응이 나타날 수 있고, 이 확률은 q이다. (단, $0<q<1$)

바이러스 감염 여부를 한 번 검사하는 데 드는 비용을 1이라 하자. 검사 비용 외에 검사의 오류로 인해 추가 비용이 발생할 수 있다. 감염된 사람의 검사에서 음성 반응이 나타나는 경우, 이 사람은 적절한 치료를 받지 못할 뿐만 아니라 타인을 감염시킬 수 있기 때문에 추가 비용 α가 발생한다. 감염되지 않은 사람의 검사에서 양성 반응이 나타나는 경우, 경제 활동의 제약 등으로 인해 추가 비용 β가 발생한다. 검사의 오류가 없다면 추가 비용은 발생하지 않는다. (단, α, β는 양의 상수)

[문제]
이 도시에 거주하는 사람을 임의로 한 명 선택하여 바이러스 감염 여부를 한 번 검사한다. 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 양성 반응이 나타날 확률을 구하시오.

【1-2】 음성 반응이 나타났을 때, 실제로 감염되었을 확률을 구하시오.

【1-3】 총 비용을 확률변수 X라고 할 때, X의 기댓값 $E(X)$를 구하시오.

【1-4】 M은 3보다 큰 상수이고 $r\alpha = 4(1-r)\beta$라고 가정하자. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=M$을 만족하는 p와 q에 대하여 기댓값 $E(X)$가 최소가 되도록 하는 p와 q의 값을 구하시오.

7.3 출제의도

- 두 사건에 대한 조건부확률을 잘 이해하고 있는지를 평가하고자 하였다.
  - 두 사건이 있을 때, 하나의 사건이 일어날 확률을 다른 사건의 조건부확률과 연계하여 표현하는 역량을 평가하고자 하였다.
  - 조건부확률에 대한 문제에서 확률의 곱셈정리를 이용하여 두 사건의 조건을 서로 바꿀 수 있는지를 평가하고자 하였다.
  - 확률변수의 확률질량함수를 구하고, 이를 이용하여 확률변수의 기댓값을 정확하게 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
  - 구간 내에서 그래프의 개형이 아래로 볼록한 함수의 최솟값을 미분법을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
- 문항 【1-1】은 '[확률과 통계]-(2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용', '[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률'에 해당하는 내용이며 두 사건 A, B에 대하여 조건부확률이 주어질 때, $P(B)$를 구하는 것으로서 조건부확률과 확률의 곱셈정리를 이용하여 답을 손쉽게 구할 수 있는 문항이다.
- 문항 【1-2】는 '[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용', '[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률'에 해당하는 내용으로 직접적으로 주어지지 않은 조건부 확률을 확률의 곱셈정리를 이용하여 변형하면 답을 쉽게 구할 수 있는 문항다.
- 문항 【1-3】은 '[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포'에 해당하는 내용으로, 사건 및 이와 관련된 확률이 주어질 때 이를 확률변수 X 및 확률질량함수 $P(X=x)$와 연결시키고 X의 기댓값 $E(X)$을 구하는 것으로서 통계 및 이산확률분포의 기본과정을 충실히 학습하면 답을 구할 수 있는 문항이다.
- 문항 【1-4】는 '[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용'에 해당하는 내용으로, 문항 [3-3]에서 구한 기댓값 $E(X)$가 방정식을 만족하는 두 변수 (p, q)로 표현될 때, 기댓값의 최솟값을 구하는 문제로서, 주어진 방정식을 이용하여 q를 소거하고 함수를 p에 대하여 나타낸 후 도함수를 활용하여 극소값을 찾고, 그 해가 주어진 p의 범위 조건을 만족하고, 이때 실제로 최소가 됨을 밝히는 문제이며, 도함수의 활용을 충실히 학습하면 답을 구할 수 있는 문항이다.

7.4 출제근거

7.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 전체	**[확률과 통계] – (2) 확률 – ② 조건부확률** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
하위문항【3-1】	**[확률과 통계] – (2) 확률 – ② 조건부확률** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
하위문항【3-2】	**[확률과 통계] – (2) 확률 – ② 조건부확률** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
하위문항【3-3】	**[확률과 통계] – (2) 확률 – ② 조건부확률** [12확통02-05]조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다. [12확통02-07]확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] – (3) 통계 – ① 확률분포** [12확통03-01]확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02]이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
하위문항【3-4】	**[수학Ⅱ] – (2) 미분 – ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[미적분] – (2) 미분법 – ② 여러 가지 미분법** [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. **[미적분] – (2) 미분법 – ③ 도함수의 활용** [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

7.4.2 자료 출처

참고자료	교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	권오남 외	교학사	2018	91-93, 102
		배종숙 외	금성출판사	2018	87-89, 100
	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2019	61~64, 82, 88
		이준열 외	천재교육	2019	62~64, 85, 91
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	96~97, 128~132, 137
		이준열 외	천재교육	2019	83~84, 112~116, 120

7.5 문항 해설

7.5.1 위원회 자체 평가 의견

제시문 및 문항은 모두 고등학교 수학교과서 [확률과 통계], [수학Ⅱ], [미적분] 과정내의 2015 수학과 개정교육과정의 성취기준인 [12확통02-03], [12확통02-05], [12확통02-07], [12확통03-01], [12확통03-02], [12수학Ⅱ02-08], [12수학Ⅱ02-10], [12미적02-06], [12미적02-12], [12미적02-13]등의 성취기준을 통해 교육과정 내에서 모두 확인할 수 있는 문항으로 교육과정의 범위와 수준 모두 충족하는 문항으로 구성되어 있다는 것을 확인할 수 있었다. 제시문의 내용이 교과서밖 자료라고 할지라도 현재 국가적 상황에 맞는 환경을 설정하여 수학적 과제로 자연스럽게 연결시킨 점은 수학의 실용성면에서 매우 인상적이었던 문제라고 생각할 수 있고 특히 미적분까지 연결시켜 문항을 개발한 것은 창의적인 문제라고도 할 수 있다. 전반적인 평가는 제시문과 각 문항은 모두 고등학교 수학과 교육과정에서 요구하는 성취기준과 범위, 수준에 적합한 문항이라고 할 수 있다.

- 제시문은 성취기준 ‘[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.’와 ‘[12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.’에서 근거를 확인할 수 있었으며 교과서 내용을 충실히 학습한 수험생이라면 이해할 수 있는 문항이었다.
- 문항 【1-1】은 성취기준 ‘[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.’와 [12확통02-07] ‘확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.’를 근거로 하는 문제로 감염 여부를 모르는 사람을 검사했을 때 양성 반응이 나타날 확률을 구하는 문항이었다. 감염 여부에 따라 두 분류로 분리하여 계산하는 내용은 교과서에서도 많이 다루는 조건부 확률, 곱셈정리 등을 이용한 문항이므로 교육과정을 충실히 이해한 수험생이라면 해결하기 어렵지 않은 문항이었다.
- 문항 【1-2】는 성취기준 ‘[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.’를 근거로 하고 있으며 감염, 비감염 그리고 양성, 음성으로 구분하여 정리하면 음성반응이 나타날 확률을 감염된 사람의 검사에서 음성반응이 나올 확률과 감염되지 않은 사람의 검사에서 음성 반응이 나올 확률을 더해 구하고, 이를 통해 원하는 조건부 확률을 쉽게 구할 수 있었을 것이다.
- 문항 【1-3】은 성취기준 ‘[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.’와 ‘[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.’등을 근거로 하고 있으며 통계단원에서 학습한 내용을 바탕으로 기댓값을 구하는 문항이었다. 제시문에 나타난 비용에 대한 조건과 확률변수에 대한 이해가 충분했다면 해결하는데 어렵지 않은 문항이었다.
- 문항 【1-4】는 성취기준 ‘[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.’응을 근거로 하고 있는 문항으로 문항 【1-3】에서 구한 결과를 바탕으로 수학Ⅱ와 미적분에서 학습한 함수의 최솟값을 구하는 문제로서 통계와 미분 내용을 결합한 융합형 문제라고 할 수 있다. 주어진 조건을 결합하여 창의적으로 해결할 수 있는 능력이 요구되는 문항으로, 다소 어렵게 느껴질 수는 있지만 변수들을 잘 활용할 수 있다면 주어진 교육과정 내에서 해결할 수 있는 문항이었다.

7.5.2 출제 검토 교사 의견

- 출제 검토교사 모두 제시문 및 각 평가문항이 2015 개정교육과정 확률과 통계, 수학Ⅱ, 미적분 과목의 평가기준에 부합하도록 제시된 내용이라고 평가하였다. 현재 코로나 상황으로 힘든 상황을 반영한 제시문을 확률과 통계 및 미적분 등과 교육과정 내에서 자연스럽게 연계시킨 문항이라고 평가하였다.

또한 바이러스 감염 여부를 판단하는 과정에서 기회비용의 개념을 접근시켜 각 상황의 확률과 기댓값을 구할 수 있는지를 평가하는 제시문으로서 현재 교육과정의 틀 내에서 적합한 문항이었다는 의견을 제시하였다.

- 제시문은 2015 개정교육과정 확률과 통계의 성취기준 '[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.' 와 '[12확통02-07]확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.' 를 근거로 제시된 내용이었으며 현재 세계적인 위기상황에서 생각해볼 수 있는 내용이었다. 수험생은 제시문에 소개된 개연성 있는 상황을 통하여 사건, 확률, 조건부확률 등의 수학적 요소를 연결 · 융합하여 주어진 문항을 해결해야 했으며, 이러한 일련의 과정은 교육과정에서 제시하는 6가지 수학 교과 역량 중 '창의 · 융합' 에 해당하는 내용이었다. 예를 들어, 어떤 사람이 바이러스에 감염된 사건을 A, 바이러스 검사에서 양성 반응이 나타나는 사건을 B라고 하면, 제시문의 ①의 내용은 $P(B^c|A)=p$이고, ②의 내용은 $P(B|A^c)=q$이었다. 또한, 바이러스 검사 과정에서 발생할 수 있는 경우와 비용에 대한 설명은 문항 【1-3】에서 확률변수 X와 확률분포를 파악하는데 활용할 수 있었다.
- 문항 【1-1】은 감염된 사람이 양성 반응이 나타난 경우와 감염되지 않은 사람이 양성 반응이 나타난 경우로 나누어서 생각할 수 있는지를 평가하고 있는 문항으로 제시문의 가정된 상황에서 수학적 요소를 알아내고 이를 연결 · 융합하여 문제를 해결해야 했으며, 수학 교과에서 요구하는 '창의 · 융합' 적 역량이 요구되는 문항이었다. 수학적 요소를 알아내기만 하면 교육과정에서 요구하는 확률과 통계의 성취기준 '[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.' 를 이용하여 문항에서 구해야 하는 확률 $P(B)$를 쉽게 구할 수 있는 문항이었다.
- 문항 【1-2】는 음성 반응이 나타났을 때, 실제로 감염되었을 확률을 구하는 문항으로 조건부 확률의 기본적인 형태라고 할 수 있고, 2015 수학과 개정교육과저 성취기준 '[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.' 에 근거한 문항이었다. 문항 【1-1】에서 풀이한 방법과 같은 방법으로 $P(B^c)$를 구하고 「조건부확률」의 정의를 이용하여 결론을 도출할 수 있었던 문항으로 확률과 통계 교과서에서 유사한 예제를 충분히 수록하고 있으며, 교수 · 학습 상황에서 교사가 자주 제시하는 유형의 문항이므로 수험생이 느끼는 난이도는 높지 않을 것으로 판단했다.
- 문항 【1-3】은 확률변수 X가 가질 수 있는 값인 $1, 1+\alpha, 1+\beta$의 세 가지 경우 각각의 확률을 구하고 이를 통해 평균을 구할 수 있는지를 평가하고 있다. 확률변수 X가 될 수 있는 총 경우의 수만 생각한다면 어렵지 않게 해결할 수 있었던 문제였다. 또한 2015 수학과 개정교육과정의 성취기준 [12확통02-05], [12확통03-02]에 근거한 문항이었다. 문항 [3-2]와 마찬가지로 수험생이 느끼는 난도는 높지 않을 것으로 판단했다.
- 문항 【1-4】는 2015 수학과 개정교육과정의 성취기준 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.' 와 해당 평가기준 '상' 의 수준에 근거하여 평가하고 있다. 최솟값을 구해야 하는 대상인 기댓값 $E(X)$는 문항 【1-3】의 결과를 이용할 수 있고 기댓값 $E(X)$의 식은 주어진 두 관계식을 통하여 p에 대한 함수로 나타낼 수 있었다. 이 함수를 바탕으로 특정 조건을 만족하는 상황에서 기댓값이 최소인 상황을 파악할 수 있는지를 묻는 문항이었다. 도함수가 열린구간에서 극솟값을 가지는 이유를 먼저 고찰하고, 그 극솟값이 최솟값임을 찾아야 하는 문항이었다. 다만, 수험생이 변수와 상수의 구분 없이 문자식을 정리하면 문제 해결에 어려움을 겪을 수도 있었던 문항이었다. 또한 단순히 함수를 미분해서 0이 되는 x값을 찾아서 대입하여 구해서는 안되는 문항이었다. 함수를 미분해서 0이 되는 x값 중 극소인 점을 정확하게 판단하는 것이 핵심이다. 논리적인 전개 부분에서 변별력이 있었던 문항이었다. 도함수의 부호를 바로 판정할 수 없어서 이계도함수를 구해야 함수의 증감과 그래프의 개형을 알아낼 수 있으며, 변수 이외에도 문자가 포함되어 문제 해결에 다소 많은 시간이 필요한 문항인 것으로 판단된다.

7.5.3 자문위원 평가 의견

- 평균 경력 13.8년의 15명의 현직교사 의견을 5점 척도로 구성된 설문 문항을 종합한 결과 [문제3]의 제시문의 난이도(논술 제시문 난이도는? 응답기준 1점 '매우쉽다' 에서 5점 '매우어렵다')는 평균 2.4(쉽다)이었으며 문제의 난이도는 평균 3.2(보통)이었다.
 또한 제시문과 각 문항에 대해서는 '고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?' 에 대한 질문(고등학교 교육과정의 성취기준 및 내용요소를 포함하는 문항인가? – 응답기준은 1점 '전혀아니다' 에서 5점 '매우그렇다')과 '고등학교 교육과정 수준에 적합한가?' 에 대한 질문(해당 교육과정을 이수한 학습자들이 그 내용요소를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가? – 응답기준은 위와 동일)으로 구성된 문항에 대한 응답결과를 요약한 결과 제시문의 수준은 평균 4.7(고등학교 교육과정 수준에 매우 적합), 고등학교 교육과정 범위에 대한 의견은 4.5(고등학교 교육과정의 성취기준과 내용요소에 매우 적합)이었다.
- 각 문제의 범위에 대한 응답은 4개 소문항에 대해 각각 평균 4.9, 4.9, 4.9, 4.3으로 평가하여 문항 【1-4】를 제외하곤 대부분 범위에 대해 매우 그렇다는 의견이었다. 또한 각 문제의 수준에 대한 응답은 4개 소문항에 대해 각각 평균 4.9, 4.8, 4.7, 4.2로 평가하여 위와 마찬가지로 문항 【1-4】를 제외하곤 대부분 교육과정 수준에 매우 적합한 문항으로 응답하였다.
- 전반적인 [문제3]에 대한 평가의견은 우리 주변에서 접한 상황을 실제 문제에 적용할 수 있는 수학적 개념으로 만들어 제시했다는 점에서 익숙한 소재였으며 제시문을 완벽하게 이해하기 위해서 각 상황에 대해 정확한 이해가 필요한데 여기에 필요한 [확률과 통계]의 개념이 다수 내재되어 있어 교과서의 기본 개념에 충실히 따른 문항이었다는 평가였으며 각 소문항은 조건을 만족하는 확률을 구하고 확률분포의 기댓값을 찾아나가는 문제로 교과서 및 수능 등에서 자주 다루고 있으므로 익숙하게 느껴질 문항이었고 어렵지 않게 해결할 수 있는 문항이었다. 다만, 문항 【1-4】에서 다루는 최소가 되는 조건에 대한 문제는 식을 조작하고 정리해야 하며 상황에 맞는 p, q를 찾아내는 아이디어가 필요하여 변별력이 다소 있는 문제라고 판단했다.

제시문 및 각 개별 문항에 대한 세부 의견을 요약하면 다음과 같다.

- [제시문]
  - "제시문은 고등학교 2015 개정 교육과정의 <확률과 통계> – (2) 확률 – ② 조건부확률에서 소개된 내용과 관련된 것으로 고등학교 교육과정을 이수한 학생들이 제시문의 내용을 쉽게 이해하고 문제에 적용하는 데에 어려움이 없었을 것입니다."
  - "제시문은 고등학교 교육과정 범위 내에 있으며 『확률과 통계(교학사)』 교과서 75쪽 대단원 마무리 문제를 변형한 제시문으로 고등학교 교육과정 범위에 있다. 또한, 고등학교 2015 개정 교육과정 <확률과 통계> 과목의 핵심성취기준인 '[12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.' 에 부합하는 제시문이다."
- 문항 【1-1】
  - "감염된 사람이 양성이 나올 확률과 감염되지 않은 사람이 양성이 나올 확률을 더하면 되는 문제로 [확률과 통계] – (2)확률 – ②조건부확률 '[12확통02-03]확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.' 에 해당하는 문제이다."
  - "<확률과 통계>의 '[12확통02-01]통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.' , '[12확통02-02]확률의 기본 성질을 이해한다.' , '[12확통02-04]여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.' 에 의거하여 문항 【1-1】은 수학적 확률과 여사건의 확률을 적용하여 해결할 수 있으므로 교육과정에 위배 되지 않음."
- 문항 【1-2】
  - "2015 개정 교육과정 [확률과 통계] – (2) 확률 – ② 조건부확률 단원에 수록되어 있는 '조건

부 확률’ 을 묻는 문제로 교육과정의 내용체계와 평가기준에 매우 적합한 문제로 보여진다. 음성 반응이 나타날 확률과 감염환자가 음성 반응이 나타날 확률은 사전적으로 확률의 곱셈법칙을 이용하여 구하고 이를 이용해 주어진 답을 구해내면 된다. 이 문제의 개념은 교과서의 많은 문제에서 다루고 있는 소재로 교육과정의 범위와 수준에 적합하다고 볼 수 있다. 관련 교육과정성취기준: [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.”

■ 문항 【1-3】
- “ ‘[12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.’ , ‘[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.’ 제시문에 나타난 비용에 대한 조건과 확률변수에 대한 이해가 충분하다면 문제를 해결할 수 있을 것이라 생각된다.”

■ 문항 【1-4】
- “기댓값으로 구한 식의 최소를 구하기 위하여 미분과 도함수를 활용하는 과정은 고등학교 교육과정상 수학II와 미적분 과목에서 개념이 주요하게 다루어지며 보통의 수능형 문제로도 많이 접할 기회가 있는 소재인 만큼 교육과정상 그 범위와 수준에 부합한다.”
- “문제를 해결하기 위해서는 유리함수를 미분할 수 있어야 하고 극값에 대한 이해가 필요하다. 고등학교 교육과정에서 함수의 몫의 미분법과 극값에 대한 내용을 배우기 때문에 고등학교 교육과정 범위에 해당한다고 볼 수 있다. $r\alpha = 4(1-r)\beta$라 하면 $\mathrm{E}(X) = (1-r)\beta(4p+q)+1$이므로, 기댓값이 최소가 되기 위해서는 $4p+q$가 최소가 되어야 한다.”

7.6 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
【1-1】	■ 제시문에서 기술한 일상 생활 속에서의 나타날 수 있는 문제를 확률적으로 이해하고, 이를 두 사건 A, B를 이용하여 표현할 수 있다. ■ 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 이용하여 사건 B가 일어날 확률을 구할 수 있다.	320
【1-2】	■ 원하는 조건부확률을 직접 구하기 어려운 경우, 확률의 곱셈정리를 이용하여 조건부확률을 이미 알고 있는 확률로 표현할 수 있다. ■ 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 이용하여 문제에서 구하는 조건부확률을 구할 수 있다.	
【1-3】	■ 조건부확률이 포함된 문제에서 확률변수 X의 뜻을 정확하게 이해하고, X의 확률질량함수를 찾을 수 있다. ■ X의 확률질량함수를 이용하여 X의 기댓값을 계산할 수 있다.	
【1-4】	■ 두 변수 p, q가 주어진 식을 만족하는 경우, X의 기댓값의 최솟값 $E(X)$를 구하기 위해 $E(X)$를 하나의 변수 p의 함수로 표현할 수 있다. ■ 이때 변수 p가 속하는 구간을 올바르게 찾고 미분법을 이용하여 구간 내에서 기댓값 $E(X)$의 최솟값을 구할 수 있다.	

7.7 답안 사례

【1-1】

어떤 사람이 바이러스에 감염된 사건을 A, 바이러스 검사에서 양성 반응이 나타나는 사건을 B라 하자. 바이러스 검사에서 양성 반응이 나타날 확률은

$P(B) = P(A\cap B)+P(A^c\cap B) = P(A)P(B\mid A)+P(A^c)P(B\mid A^c)$이므로

$P(B) = r(1-p) + (1-r)q$

【1-2】

바이러스 검사에서 음성 반응이 나타났을 때, 실제로는 바이러스에 감염되었을 확률은 조건부확률

$$P(A\mid B^c) = \frac{P(A)P(B^c\mid A)}{P(B^c)}$$

이다.

$P(B^c) = P(A\cap B^c) + P(A^c\cap B^c) = P(A)P(B^c\mid A) + P(A^c)P(B^c\mid A^c)$

이므로

$$P(A\mid B^c) = \frac{rp}{rp+(1-r)(1-q)}$$

【1-3】

확률변수 X가 $1, \alpha+1, \beta+1$일 확률은 각각 아래와 같다.

(가) $P(X=1)$은 검사받은 사람이 감염자이고 결과가 양성이거나 검사받은 사람이 비감염자이고 결과가 음성일 확률이므로

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(A\cap B) + P(A^c\cap B^c) \\ &= P(A)P(B\mid A)+P(A^c)P(B^c\mid A^c) \\ &= r(1-p)+(1-r)(1-q) \end{aligned}$$

(나) $P(X=\alpha+1)$은 검사받은 사람이 감염자이고 결과가 음성일 확률이므로

$P(X=\alpha+1) = P(A\cap B^c) = P(A)P(B^c\mid A) = rp$

(다) $P(X=\beta+1)$은 검사받은 사람이 비감염자이고 결과가 양성일 확률이므로

$P(X=\beta+1) = P(A^c\cap B) = P(A^c)P(B\mid A^c) = (1-r)q$

이를 정리하면

X	1	$\alpha+1$	$\beta+1$	계
$P(X=x)$	$r(1-p)+(1-r)(1-q)$	rp	$(1-r)q$	1

이다. 따라서

$$\begin{aligned} E(X) &= \{r(1-p)+(1-r)(1-q)\} + (\alpha+1)rp + (\beta+1)(1-r)q \\ &= r\alpha p + (1-r)\beta q + 1 \end{aligned}$$

이다.

【1-4】

$r\alpha = 4(1-r)\beta$ 를 이용하면 $E(X) = (1-r)\beta(4p+q)+1$ 이다.

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=M$ 이므로 $0<q=\frac{p}{Mp-1}<1$ 을 대입하여 $E(X)$ 를 p 의 함수로 표현하면,

$\frac{1}{M-1}<p<1$ 이고 $E(X)=(1-r)\beta\left(4p+\frac{p}{Mp-1}\right)$

이다. $(1-r)\beta>0$ 이므로 $h(p)=4p+\frac{p}{Mp-1}$ 를 최소로 하는 p 를 구하자.

$h'(p)=4-\frac{1}{(Mp-1)^2}=0$ 을 만족하는 p 를 찾으면 $Mp-1=\pm\frac{1}{2}$ 이고 $Mp-1>0$ 이므로 $p=\frac{3}{2M}$ 이다.

이때, $M>3$ 이므로 $\frac{1}{M-1}<p=\frac{3}{2M}<1$ 이다. 또한 $h''(p)=\frac{2M}{(Mp-1)^3}>0$ 이므로 함수 $h(p)$ 는 구간 $\left(\frac{1}{M-1},1\right)$ 에서 아래로 볼록하다. 따라서 $p=\frac{3}{2M}$ 에서 함수 $h(p)$ 가 최소가 된다.

(또는 $h'(p)=\frac{4\left(p-\frac{1}{2M}\right)\left(p-\frac{3}{2M}\right)}{\left(p-\frac{1}{M}\right)^2}$ 이므로 $\left(\frac{1}{M-1},\frac{3}{2M}\right)$ 에서 $h'(p)<0$ 이고 $\left(\frac{3}{2M},1\right)$ 에서 $h'(p)>0$ 이다. 따라서 $p=\frac{3}{2M}$ 에서 함수 $h(p)$ 가 최소가 된다.)

그러므로 $E(X)$ 를 최소로 하는 p 와 q 는 $p=\frac{3}{2M}$, $q=\frac{3}{M}$ 이다.

8. 문항카드 8 – 자연계열 2차 2번

8.1 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">논술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술(일반)전형</td></tr>
<tr><td>계열(과목)/문항번호</td><td colspan="3">자연계열 2차(화공생명공학전공, 기계공학전공, 물리학전공) / 2번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학Ⅰ, 수학II, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">· 함수의 증가와 감소
· 사잇값의 정리
· 사인함수와 코사인함수
· 도함수의 활용</td></tr>
<tr><td>예상소요 시간</td><td colspan="2">60분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

8.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

[나] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

① 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다.

② 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x) < 0$이면 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

[다] 함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[라] 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

[마] 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$을 만족하면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

[문제]

제시문 [가], [나], [다], [라]를 이용하여 문항 【2-1】과 문항 【2-2】에 답하시오.

【2-1】 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f(x) < g(x)$이면 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

【2-2】 함수 $f(x)$가 구간 $[1, \infty)$에서 연속이고 증가할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

문항 【2-2】의 결과와 제시문 [마]를 이용하여 문항 【2-3】과 문항 【2-4】에 답하시오.

【2-3】 p가 자연수일 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

【2-4】 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

8.3 출제 의도

■ 함수의 증가와 감소의 뜻을 명확하게 이해하고 있는지를 평가하고자 하였다.
- 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
- 함수 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$를 미분하면 $f(x)$임을 말할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
- 함수 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$를 이용하여 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$를 $F(b)-F(a)$로 정의한다는 것을 이해하고 있는지를 평가하고자 하였다.
- 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 수렴하는 수열의 극한값을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

■ 문항 【2-1】은 정적분의 대소 관계에 대한 기본적인 사실을 증명할 수 있는가를 평가하는 문항이다. 제시문 [나]와 [다]에 주어진 정적분의 정의와 도함수를 활용한 함수의 증가와 감소 판정법을 이용하여 쉽게 해결할 수 있는 문제이다.

■ 문항 【2-2】는 문항 【2-1】에서 증명된 정적분의 대소 관계를 활용하여 증가하는 함수의 함숫값의 합과 정적분과 관련된 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문항이다. 제시문 [라]에서 주어진 정적분의 기본 성질을 이용하면 부등식에 대한 간단한 조작을 통하여 쉽게 증명할 수 있다.

■ 문항 【2-3】은 문항 【2-2】에서 얻은 부등식을 매우 간단한 다항함수인 $f(x)=x^p$에 적용하여 어떤 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문항이다. 미적분을 공부한 학생이라면 정적분을 급수의 합으로 표현함으로써 극한값을 바로 구할 수 있기 때문에 매우 쉽게 느껴지는 문제라고 판단된다. 이 문제에서는 정적분을 이용하지 않고 문항 【2-2】의 부등식로부터 극한값을 계산하는 방법을 제안하고 있다. 이 과정에서 제시문 [마]의 극한값의 대소 관계를 이용하는 것이 필요한 데 이것은 고등학교 교육과정에서 아주 흔히 나타나는 방법이다.

■ 문항 【2-4】는 문항 【2-2】에서 얻은 부등식을 간단한 무리함수인 $f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$에 적용하여 어떤 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문항이다. 문항 【2-3】과 마찬가지로 제시문 [마]의 극한값의 대소 관계를 이용하여 쉽게 해결할 수 있으며, 따라서 고등학교 교육과정에 적절한 수준의 문항이다.

8.4 출제 근거

8.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용교육과정	교육부 고시 제2015-74호
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 [가]	[수학II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 [나]	[수학II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 [다]	[수학II] - (3) 적분 - ② 정적분 [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.
제시문 [라]	[수학II] - (3) 적분 - ② 정적분 [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.
제시문 [마]	[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
하위문항 【2-1】	[수학II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [수학II] - (3) 적분 - ② 정적분 [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.
하위문항 【2-2】	[수학I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학I03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학II] - (3) 적분 - ② 정적분 [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.
하위문항 【2-3】	[수학I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학I03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
하위문항 【2-4】	[수학I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학I03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

8.4.2 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
교등학교 교과서	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2018	133
		홍성복 외	지학사	2018	137
	수학II	권오남 외	교학사	2018	88, 90, 131, 136
		배종숙 외	금성출판사	2018	83, 85, 124, 127
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	20, 139-140
		류희찬 외	천재교과서	2019	22, 157

8.5 문항 해설

8.5.1 위원회 자체 평가 의견

제시문 및 문항은 모두 고등학교 수학교과서 수학 I , 수학 II , 미적분 내의 2015 개정 수학과 교육과정의 [12수학 I 03-04], [12미적01-02], [12미적03-03], [12수학 II 02-08], [12수학 II 03-03]등의 성취기준을 근거로 교육과정의 범위와 수준 모두 충족하는 문항으로 구성되어 있다는 것을 확인할 수 있었다. 수열의 극한과 정적분 사이의 관계를 이용하여 제시문에서 제시된 근거를 바탕으로 부등식을 증명하는 과정과 만족하는 함수를 찾는 과정을 직접 서술하는 형식의 문항으로 수험생의 역량을 평가할 수 있는 평가문항이며 제시문과 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 문항을 해결하는데 어렵지 않았을 문항이었다. 문항 【2-1】, 【2-2】는 교육과정에서 발췌된 제시문 내용을 바탕으로 아이디어를 생각한다면 증명 과정이 복잡하지 않아 충분히 해결할 수 있었을 것으로 판단되며 문항 【2-3】, 【2-4】는 제시문 [마]를 이용해야 하므로 주어진 급수와 비교하여 새로운 급수를 발견해야 하는 과정에서 다소 어려움이 있었을 수도 있으나 주어진 교육과정 내에서 창의적인 해결능력을 요구하는 평가 과정에서는 충분히 도입할 수 있는 문항이었다.

- 제시문은 성취기준 '[12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.', '[12수학 II 03-03] 정적분의 뜻을 안다.' '[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.' 에서 근거를 확인할 수 있으며 교과서에서 충분히 다루고 중요하게 학습하는 내용으로 수험생들이 익숙하게 생각할 수 있는 내용으로 구성되었다.
- 문항 【2-1】은 성취기준 '[12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.' '[12수학 II 03-03] 정적분의 뜻을 안다.' 를 근거로 제시된 문항으로 익숙하지 않은 증명 문제일 수도 있지만 교과서나 교육과정 내용을 활용하여 충분히 증명할 수 있었던 문항으로 교육과정 수준 및 범위에 적합한 문항이었다. 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이므로 정적분의 성질에 의해 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.
- 문항 【2-2】는 성취기준 '[12수학 I 03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.', '[12수학 II 03-03] 정적분의 뜻을 안다.' 를 근거로 제시된 문항으로 급수와 정적분의 관계를 이용한 직사각형의 넓이 또는 수학적 귀납법 형태로도 문제해결이 가능한 문항이었다.
- 문항 【2-3】과 문항 【2-4】는 성취기준 '[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해

하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.’, ‘[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.’를 근거로 제시된 문항으로 수열의 극한과 부등식, 수렴과의 관계, 적분 등을 고려하여 복합적인 사고력을 요하는 문항이었다. 부등식에서 자연스럽게 크기 비교를 통해 새로운 함수를 생각해내야만 해결이 가능한 문항이긴 했지만 교육과정 내에서도 이와 유사한 형태의 예제 등이 많이 있으므로 대부분의 수험생들이 생소한 문제는 아니었을 것으로 판단된다. 또한 문항 【2-3】은 $f(x)=x^p$라 두고 주어진 부등식에 대입하여 n^{p+1}로 나누어서 극한값을 계산한다면 제시문 [마]를 활용하여 수월하게 생각해낼 수 있었던 문항이었고 다만 문항 【2-4】는 무리함수 등의 특정한 함수를 생각해내는 것이 다소 어렵게 느껴질 수 있었던 문항이었다. 아이디어가 필요한 문제였지만 교육과정 내에서 고민할 수 있는 문항이고 자연과정의 논술의 특성상 창의적인 아이디어와 유추능력 등 다양한 수학적 사고력을 측정할 수 있는 문항으로 판단되기에 논술문제로서 적절한 문항이었다.

8.5.2 출제 검토 교사 의견

출제 검토교사 모두 제시문 및 각 평가문항이 2015 개정교육과정 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분 과목의 평가기준에 부합하도록 제시된 내용이라고 평가하였다. 함수의 증가와 감소, 정적분, 정적분의 성질, 수열의 성질을 이해하고 제시된 조건을 활용할 수 있는지를 평가하는 문항이었다. 기본적인 개념이지만 다양한 생각을 할 수 있도록 의미를 부여하고 있는 좋은 문항이었고 또한 교육과정 내에서 기준과 수준에 모두 부합하는 문항이었다.

- 제시문은 고등학교 교과서 [수학Ⅱ], [미적분]의 내용을 발췌하였으며, 문제 해결에 필요한 「함수의 증가와 감소」, 「정적분의 정의와 성질」, 「수렴하는 수열과 극한의 성질 및 대소 관계」 등의 내용으로 구성되었다. 교과서 내용을 재구성 없이 수록하였으며, 수학과 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 내용은 없었다. 교육과정을 충실히 이수한 수험생이라면 어렵지 않은 제시문 내용이었다.
- 문항 【2-1】은 제시문 [나], [다]를 적용하여 해결할 수 있었던 문항으로 쉽게 출제되었다. [수학Ⅱ]에서 학습한 성취기준 ‘[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.’와 ‘[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.’는 근거를 바탕으로 하고 있으며 제시문 내용을 이용하여 부등식을 간단히 증명할 수 있었고 함수가 증가하는 성질과 정적분의 정의를 서로 연계하여 출제된 점이 인상적이었다.
- 문항 【2-2】는 위의 결과와 제시문 [가], [라]의 내용을 이용하여 증명할 수 있었던 문항이었다. 문항【2-1의 성취기준과 ‘[12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.’는 근거를 바탕으로 하고 있는 문항이었다. 다만, ‘닫힌구간 $[k,\ k+1]$과 함수 $f(x)$를 설정하여 부등식 $f(k)<f(x)<f(k+1)$을 세우고 「정적분의 성질」과 「수열의 합」을 이용하여 $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$일 때의 부등식을 더할 수 있다.’는 생각을 하지 못하면 문제 해결에 어려움을 겪을 수도 있었던 문항이었다. 즉, 함수 $f(x)$가 임의의 자연수 k에 대하여 닫힌구간 $[k,k+1]$에서 증가하므로 열린구간 $(k,k+1)$의 모든 x에 대하여 $f(k)<f(x)<f(k+1)$이다. 따라서
  $$f(k)=\int_k^{k+1} f(k)dx<\int_k^{k+1} f(x)dx<\int_k^{k+1} f(k+1)dx=f(k+1)$$
  이다. 임의의 자연수 n에 대하여 $k=1,2,\cdots,n$일 때의 부등식을 모두 더하여
  $$f(1)+\int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)dx$$
  을 유도할 수 있다. $n=1$일 때 왼쪽 부등식이 성립함을 보이는 것도 중요하였다.
- 문항 【2-3】은 문항 【2-2】의 결과와 제시문 [마]를 이용해야 해결할 수 있는 문항이었다. 성취기

준 ‘[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.’와 ‘[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.’를 근거로 하고 있다. 다른 접근방법도 있지만, 주어진 사실에서 출발하여 논리적으로 이끌어 낼 수 있는 능력을 평가하고 있다. 마지막 단계에서 제시문 [마]를 적용하여 극한값을 찾으면 된다. 일부 수험생은 문항 【2-3】의 계산식 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p$을 보고 「정적분과 급수의 합 사이의 관계」를 연상할 수도 있겠으나, 문항 【2-2】의 결과를 이용한다는 단서가 있으므로 출제 의도를 벗어난 답안은 작성하지 않을 것이다.

- 문항 【2-4】는 문항 【2-2】의 결과를 활용하여 풀이해야 하며, 문항 【2-3】과 전체적인 구성은 유사하다. 합의 기호 $\sum$에서 함수 $f(x)$를 알아낼 수 있으며, 함수 $f(x)$의 유형에 따라 적분 방법이 다르고, 평가할 수 있는 성취기준의 근거가 구분된다. 성취기준 ‘[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.’와 ‘[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.’를 근거로 평가할 수 있다. 문항 【2-1】의 증가함수와 문항 【2-2】의 부등식을 활용할 줄 알아야 해결할 수 있는 문항이었다. 증가함수 $y=-\frac{1}{\sqrt{x}}$를 생각해야 하는데, 이 부분에서 변별력이 있을 것으로 판단되며 증가함수 형태를 생각해냈다면 교육과정 내에서 무난하게 해결할 수 있었던 문제로 판단된다.

8.5.3 자문위원 평가 의견

- 평균 경력 13.8년의 15명의 현직교사 의견을 5점 척도로 구성된 설문 문항을 종합한 결과 [문제4]의 제시문의 난이도(응답기준 1점 ‘매우쉽다’에서 5점 ‘매우어렵다’)는 평균 1.8(쉽다)이었으며 문제의 난이도는 평균 3.2(보통)이었다.
  또한 제시문과 각 문항에 대해서는 ‘고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?’에 대한 질문(응답기준은 1점 ‘전혀아니다’에서 5점 ‘매우그렇다’)과 ‘고등학교 교육과정 수준에 적합한가?’에 대한 질문(응답기준은 위와 동일)으로 구성된 문항에 대한 응답 결과를 요약한 결과 제시문의 수준은 평균 4.92(5개 문항 통합평균/고등학교 교육과정 수준에 매우 적합), 고등학교 교육과정 범위에 대한 의견은 4.95(5개 문항 통합평균/고등학교 교육과정의 성취기준과 내용요소에 매우 적합)이었다.
- 각 문제의 범위에 대한 응답은 4개 소문항에 대해 각각 평균 4.9, 4.9, 4.9, 4.8으로 평가하여 모두 범위에 대해 매우 그렇다는 의견이었다. 또한 각 문제의 수준에 대한 응답은 4개 소문항에 대해 각각 평균 4.9, 4.7, 4.7, 4.5로 평가하여 위와 마찬가지로 모두 교육과정 수준에 매우 적합한 문항으로 응답하였다.
- 전반적인 [문제2]에 대한 평가의견은 제시문은 고등학교 수학 [수학Ⅱ]의 증가와 감소, 정적분, [미적분]의 수열의 극한 내용을 중심으로 서술되어 있어 학생들이 읽는데 전혀 부담이 없는 내용으로 매우 쉬운 난이도로 제시되었으며 문항 【2-1】, 문항 【2-2】는 단순히 주어진 제시문의 논리를 적용시키기만 하면 충분히 해결 가능하며 또한 그래프를 간략히 그려보고 이를 이용하여 식과 식 사이의 관계를 이해하면 해결 가능한 문항이었다. 문항 【2-3】, 문항 【2-4】는 앞의 문제와 제시문 [마]를 이용하여 관계식을 적고 논리적인 설명만 뒤따르면 충분히 풀이 가능한 문제로 판단되며 교과서에서 흔히 제시되는 무한급수와 정적분 사이의 관계를 통해 접했던 내용이었다. 하지만 이 문항들을 해결하기 위해서는 앞의 제시문과 문항들에서 나온 힌트들을 논리적인 서술이 가능하도록 구성해야 하고 주어진 급수보다 크고 작은 새로운 급수를 발견해야 하는 점에서 어려움이 있었을 것이다. 극한을 취할 때 같은 값으로 수렴하는 두 급수를 창출해야 하는 창의적인 사고를 필요로 하므로 상당 수준의 문제 해결력이 필요한 문제라고 판단하였다.

제시문 및 각 개별 문항에 대한 세부 의견을 요약하면 다음과 같다.

■ 제시문 [가]

– “제시문 [가]는 2015 개정 교육과정 [수학Ⅱ–미분–도함수의 활용] 단원에 수록되어 있는 ‘함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.’는 교육과정 내용을 충실히 반영하였다. 함수의 증가와 감소에 대한 특징은 수학Ⅱ 모든 교과서에 수록되어 있고 이를 미분계수와 연결 짓기 위한 중요한 성질이므로 제시문에 수록되어 있는 것이 매우 적절하다.”

■ 제시문 [나]

– “‘[12수학Ⅱ02–08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.’ 수학Ⅱ 교과의 2.3.함수의 증가와 감소, 극대와 극소 단원에서 도함수의 부호를 활용해 함수의 증가와 감소를 판정하는 개념이다.”

■ 제시문 [다]

– “‘[12수학Ⅱ03–03]정적분의 뜻을 안다.’ 정적분의 정의를 소개한 것으로 그 도입의 방식이 2015교육과정에서 변화가 있었던 만큼 학교의 수업에서 민감하게 반응하고 주의하여 전달된 내용인 만큼 학생들에게도 익숙한 내용이었을 것으로 생각됨”

■ 제시문 [라]

– “‘[12수학Ⅱ03–03] 정적분의 뜻을 안다.’ [평가준거 성취기준 ①] 정적분의 뜻을 알고, 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. 성취수준 : (상) 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. 의 내용으로 구체적인 내용체계 및 성취기준에 제시되어 있지는 않지만 정적분의 성질을 지도하면서 가장 중요하게 다루어주는 내용이므로 학생들의 이해도는 높았을 것으로 판단됨”

■ 제시문 [마]

– “ 수학Ⅱ 과목에서 함수의 극한과 연속을 다루고 있습니다. 이 중 제시문 [마]는 함수의 극한에 대한 내용입니다. ‘[12수학Ⅱ01–02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.’는 성취기준에 부합하는 내용입니다.”

■ 문항 【2–1】

– “‘[12미적03–04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.’에 근거하여 고등학교 교육과정 범위에 해당한다. 정적분이 급수를 통해서 유도되는 과정을 이해한다면 양수인 함숫값을 갖는 함수의 적분은 양수가 된다는 사실을 쉽게 파악할 수 있을 것으로 예상된다. 증명 과정이 약간 어렵게 느껴질 수 있지만, 개념만 제대로 숙지하고 있는 학생이라면 충분히 접근할 수 있는 문제이다. $g(x)-f(x)=h(x)$라 하면 $h(x)>0$이므로 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 따라 도형의 넓이를 뜻하므로 $\int_a^b h(x)dx>0$이다. 즉, $\int_a^b h(x)dx=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx>0$이므로 정적분의 연산 성질에 따라 $\int_a^b g(x)dx>\int_a^b f(x)dx$가 성립함을 보이면 된다.”

■ 문항 【2–2】

– “함수 $f(x)$가 구간 $[1,\infty)$에서 증가하므로 $f(x)>0$이라 해도 일반성을 잃지 않습니다. 수열의 합과 정적분의 넓이를 비교하여 주어진 부등식을 증명할 수 있습니다. 제시문 [가]와 정적분의 뜻을 이용하면 해결할 수 있습니다. ‘[12수학Ⅱ03–03] 정적분의 뜻을 안다’라는 성취기준에 부합합니다.”

■ 문항 【2–3】

– “‘[12수학Ⅱ03–01] 부정적분의 뜻을 안다.’, ‘[12미적03–03] 정적분의 뜻을 안다.’, ‘[12미적01–02] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.’, ‘ [12미적01–02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.’에 의거하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$ 로 변형한 뒤 문제 [4-2]의 결과를 이용하여 해결할 수 있으므로 교육과정에 위배되지 않음.'

- 문항 【2-4】
  - '제시문 [마], 문항 【2-2】의 결과와 고등학교 2015 개정 교육과정의 미적분 (3)적분법 $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있었을 것입니다. 특히, 문항 【2-2】의 주어진 부등식이 문제 해결에 결정적인 역할을 하므로 학생들이 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있었을 것입니다.'

8.6 채점기준

하위문항	채점기준	배점
【2-1】	■ 제시문 [나]에서 주어진 증가함수의 충분조건을 이용하여 $g(x)-f(x)$의 한 부정적분 $H(x)$가 구간 $[a, b]$에서 증가함을 보일 수 있다. ■ 제시문 [다]에서 주어진 정적분의 정의를 이용하여 부등식에 나오는 두 정적분의 차가 $H(b)-H(a)$이므로 양수임을 보일 수 있다.	480
【2-2】	■ k가 임의의 자연수라고 할 때, 열린구간 $(k, k+1)$의 모든 x에 대하여 $f(k)<f(x)<f(k+1)$을 명시한다. ■ 문항 【2-2】의 결과를 이용하여 $f(k)<\int_k^{k+1}f(x)\,dx<f(k+1)$임을 보일 수 있다. ■ 제시문 [라]를 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있다.	
【2-3】	■ 문항 [4-2]의 결과를 이용하여 $\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p$에 대한 유용한 부등식을 유도할 수 있다. ■ 극한값공식 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}=0$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=1$을 명시한다. ■ 제시문 [마]를 이용하여 문제의 극한값을 계산할 수 있다.	
【2-4】	■ 함수 $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}$은 구간 $[1, \infty)$에서 연속이고 증가함을 명시한다. ■ 문항 【2-2】의 결과를 이용하여 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$에 대한 유용한 부등식을 유도할 수 있다. ■ 제시문 [마]를 이용하여 문제의 극한값을 계산할 수 있다.	

8.7 답안 사례

【2-1】

함수 $f(x), g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x), G(x)$라고 하고, $H(x) = G(x) - F(x)$라고 놓자. 그러면 함수 $H(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여

$H'(x) = G'(x) - F'(x) = g(x) - f(x) > 0$

이다. 따라서 제시문 [나]에 의하여 함수 $H(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다. 그러므로 제시문 [다]를 이용하면

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = [G(b) - G(a)] - [F(b) - F(a)] = H(b) - H(a) > 0$$

이므로

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

이다.

(마지막 부분의 다른 풀이) $H(x)$가 함수 $g(x) - f(x)$의 한 부정적분이므로

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx = H(b) - H(a) > 0$$

【2-2】

k가 임의의 자연수라고 할 때, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 증가하므로 열린구간 $(k, k+1)$의 모든 x에 대하여 $f(k) < f(x) < f(k+1)$이다. 따라서 문항 【2-1】의 결과에 의하여

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\,dx < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = f(k+1)$$

이다. 임의의 자연수 n에 대하여 $k = 1, 2, \cdots, n$일 때의 부등식을 모두 더하면, 제시문 [라]에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) < \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - f(1)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

이고

$$f(1) + \int_1^{n+1} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n+1} f(k)$$

이다. 그러므로 문제의 두 부등식 중에서 오른쪽 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립하고, 왼쪽 부등식은 $n \ge 2$일 때 성립한다. 또한 $n = 1$일 때는 왼쪽 부등식이 등식으로 성립한다.

【2-3】

자연수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^p$은 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 증가한다. 따라서 문항 【2-2】의 결과에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{n^{p+1}+p}{p+1}=1+\int_1^n x^p\,dx \le \sum_{k=1}^{n} k^p < \int_1^{n+1} x^p\,dx = \frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1}$$

이므로

$$\frac{1}{p+1}\left(1+\frac{p}{n^{p+1}}\right) \le \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p < \frac{1}{p+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-\frac{1}{n^{p+1}}\right\}$$

이다. 그런데

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}=0$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=1$

이므로 제시문 [마]에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p=\frac{1}{p+1}$$

【2-4】

함수 $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}$은 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 증가한다. 따라서 문항 【2-2】의 결과에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여

$$(-1)+\int_1^n\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \le \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \int_1^{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

이고

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)=\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{n}-1$$

이므로

$$2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 2-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

이다. 따라서 제시문 [마]에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$$