

## 2023학년도 수리논술 적중사례



### 한양대

[한양대 파이널 수업내용]

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 를 이용하여  $a^b = b^a$ 의 순서쌍 개수 구하는 문제

[기출문제]

함수  $f(x) = \frac{\ln(x+\alpha)}{x+\alpha}$ 에 대하여 방정식  $(f \circ f)(x) = \frac{1}{e}$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수  $\alpha$ 의 범위를 구하시오. (단,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ )

[한양대 파이널 수업내용]

이항계수의 성질( $\sum_{k=1}^n k_n C_k$  등) 유도방법 정리 후 주사위를 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 홀수번 또는 짝수번 나올 확률 풀이

[기출문제]

문제 3. 평평한 면과 둥근 면이 나올 확률이 각각  $p, 1-p$ 인 윷짝 한 개를 2023번 던졌을 때, 평평한 면이 나온 횟수가 짝수일 확률을  $p$ 에 대한 식으로 나타내시오. (단, 0은 짝수이다.)

[한양대 파이널 수업내용]

파스칼의 삼각형과 이항계수의 성질 유도 정리

문제 1.  $n$ 이 자연수일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$${}_nC_0^2 + {}_nC_1^2 + {}_nC_2^2 + \dots + {}_nC_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

문제 2. 자연수  $l, m, n$ 에 대하여  $n \leq l, n \leq m$ 일 때, 등식  $\sum_{k=0}^n {}_lC_k \cdot {}_mC_{n-k} = {}_{l+m}C_n$ 이 성립함을 보이시오.

[기출문제]

문제 1. 정수  $n$ 과  $k$ 가  $1 \leq k \leq n$ 을 만족시킬 때, 제시문 (나)를 이용하여

$${}_{3n+3}C_{3k} = {}_{3n}C_{3k-3} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-2} + 3 \times {}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k}$$
가 성립함을 보이시오.

문제 2. 자연수  $n$ 에 대해  $a_{n+1} = 2 + \sum_{k=1}^n {}_{3n+3}C_{3k}$ 를 이용하여  $a_n + a_{n+1} = 3 \times 2^{3n}$ 이 성립함을 보이시오.

문제 3.  $\sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-1}$ 의 값을 구하시오.

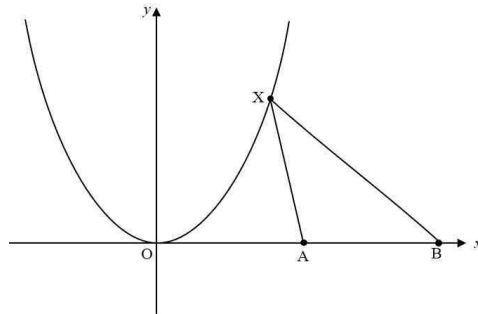
### 건국대

[건국대 파이널 수업내용]

덧셈정리를 이용한 각의 최댓값 문제

[기출문제]

그림에서 점  $X$ 는 곡선  $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2$  위의 점이고 점  $A, B$ 는  $x$ 축 위에 있다.



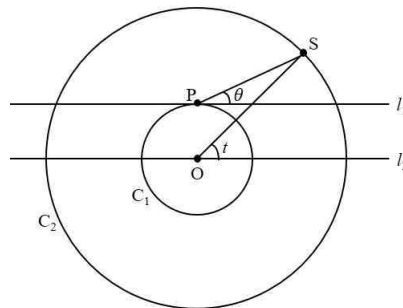
논제. (나)에서 점  $A, B$ 의 좌표가 각각  $(2, 0), (4, 0)$ 일 때  $\sin(\angle AXB)$ 의 최댓값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

[건국대 파이널 수업내용]

원과 삼각함수를 이용한 음함수 문제

[기출문제]

그림에서  $C_1, C_2$ 는 중심이  $O$ 인 동심원이고  $C_1$ 의 반지름은  $r$ ,  $C_2$ 의 반지름은  $R$ 이다. 직선  $l_1$ 은 원  $C_1$ 과 점  $P$ 에서 접한다. 직선  $l_2$ 는 점  $O$ 를 지나고  $l_1$ 과 평행하다. 점  $S$ 는 원  $C_2$ 를 따라 돌고 있다. 시각  $t$ 일 때 직선  $l_2$ 와 직선  $OS$ 가 이루는 각의 크기가  $t$ 이고  $\theta$ 는 직선  $l_1$ 과 직선  $PS$ 가 이루는 각의 크기이다.



논제. (나)에서  $R=4r$ 라고 하자.  $\theta=0$ 일 때의  $\frac{d\theta}{dt}$ 와  $\theta=\frac{\pi}{2}$ 일 때의  $\frac{d\theta}{dt}$ 를 모두 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

## 서울시립대

[서울시립대 파이널 수업내용] 그래프의 개형(넓이)를 이용한 부등식 유도문제

다음 부등식을 증명하여라. 단,  $n$ 은 자연수이다.

논제 1.  $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$

논제 2.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \frac{1}{2}$

## 2023학년도 수리논술 적중사례



[기출문제]

모든 자연수  $n$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)^2} \right\} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

### 홍익대

[홍익대 파이널 수업내용] 좌표평면에서 점의 속도, 속력, 가속도 구하기

시각  $t$ 에서의 좌표평면 위의 동점  $P(x, y)$ 의 위치가  $x = a(1 - \cos^3 \omega t)$ ,  $y = a \sin^3 \omega t$ 로 주어질 때 다음 물음에 답하라. 단,  $a > 0, \omega > 0$ 이다.

문제 1. 점  $P$ 의 속도와 속력을 구하라.

문제 2. 점  $P$ 가 점  $(4, 0)$ 을 지나고 속력의 최댓값이 6일 때  $a$ 와  $\omega$ 의 값을 구하라.

[기출문제]

문제 1.  $t=6$ 에서 물 로켓이 머리와 추진체로 분리될 때, 머리의 높이  $y_2(6)$ 의 값을 구하시오.

문제 2.  $t=12$ 에서 추진체 밑면의 높이  $y_1(12)$ 의 값을 구하시오.

문제 3. 추진체가 착륙한 시각  $t=t_2$ 에서 머리의 높이가  $y_2(t_2) = 910m$ 일 때, 돌풍이 발생한 시각  $t_1$ 을 구하시오.

[홍익대 파이널 수업내용] 신호를 전송할 때 일어나는 오류의 확률계산

단말기는 기지국  $A$ 와  $B$ 로부터 수신하는 신호의 세기를 비교하여 하나의 기지국을 선택한다. 이때 신호의 세기가 더 큰 기지국을 선택할 확률이 0.9, 더 작은 기지국을 선택할 확률이 0.1이다. 이 단말기가 기지국  $A$ 를 선택했을 때, 기지국  $A$ 로부터 수신하는 신호의 세기가 실제로 더 컸을 확률을 구하시오.

[기출문제]

문제 1. 보통의 경우 각각의 비트가 간섭에 의해 바뀔 확률  $p$ 를 0.1이라 하자. 이때 3-반복 코드 수신기의 최종결정 비트와 송신기가 보낸 비트가 서로 달라 최종 결정 오류가 발생할 확률을 구하시오.

문제 2. 갑작스런 태양의 활동으로 각각의 비트가 바뀔 확률  $p$ 가 0.1에서 0.2로 늘어났다고 하자. 이때, 동일하게 구성된 3-반복 코드 수신기의 최종 결정 오류 확률을 구하시오. 그리고, 이 값이 문제 1에서 구한 확률의 몇 배인지 소수점 둘째 자리에서 반올림하여 구하시오.

### 송실대

[송실대 파이널 수업내용] 매개변수를 활용한 거리 및 속도 구하기

시각  $t$ 에서의 좌표평면 위의 동점  $P(x, y)$ 의 위치가  $x = a(1 - \cos^3 \omega t)$ ,  $y = a \sin^3 \omega t$ 로 주어질 때 다음 물음에 답하라. 단,  $a > 0, \omega > 0$ 이다.

문제 1. 점  $P$ 의 속도와 속력을 구하라.

문제 2. 점  $P$ 가 점  $(4, 0)$ 을 지나고 속력의 최댓값이 6일 때  $a$ 와  $\omega$ 의 값을 구하라.

[기출문제]

시각  $t$ 에서의 혜성의 위치  $(x, y)$ 가  $x = 2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2}$ ,  $y = t^2 - 2t + 3$ 으로 주어져 있다. 우주선은 직선  $\ell: y = \sqrt{2}x - 1$  위를 움직이며, 시각  $t$ 에서의 우주선의 속도는  $(\sqrt{2}, 2)$ 로 주어진다고 하자. 직선  $\ell$ 과 혜성이 움직이는 곡선은 서로 만나지 않는다.

이때 다음 문항에 답하시오. (단, 혜성과 우주선의 크기는 무시한다.)

## 2023학년도 수리논술 적중사례



논제 1. 시각  $t=0$ 에서의 우주선의 위치가  $(-2\sqrt{2}, -5)$ 라고 하자. 이때 혜성과 우주선 사이의 거리가 최소가 되는 시각  $t$ 와, 그 때의 혜성과 우주선 사이의 거리를 구하시오.

논제 2. 이번에는 시각  $t=0$ 에서의 우주선의 위치를 직선  $\ell$  위에서 조정하여 혜성을 더 가까운 거리에서 관측하려고 한다. 혜성과 우주선이 가장 가까워질 수 있도록 하는 시각  $t=0$ 에서의 우주선의 위치와, 이때 혜성과 우주선이 가장 가까워지는 시각  $t$ 를 구하시오.

### 성신여대

[성신여대 파이널 수업내용]

$f(x) = e^{-x}\sin x$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 넓이 구하기

[기출문제]

모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{n\pi + \frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x dx$ 로 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 질문에 답하시오.

논제 1.  $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}(A\sin x + B\cos x)dx$ 를 만족시키는 상수  $A, B$ 를 구하시오.

논제 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

논제 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 의 값을 구하시오.

### 숙명여대

[숙명여대 파이널 수업내용]

원에 내(외)접하는 정  $n$ 각형 문제 (정규반, 파이널수업 모두 진행)

[기출문제]

다음 보기와 수열의 극한을 이용하여 반지름의 길이가 1인 원의 넓이는  $\pi$ 임을 보이시오.

원의 넓이는 그 원에 외접하는  $n$ 각형의 넓이보다 작고 내접하는  $n$ 각형의 넓이보다 크다.

### 경희대

[경희대 파이널 수업내용] 타원의 접선 활용문제

$xy$ 평면 위의 직사각형  $ABCD$ 와 타원  $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 이 그림과 같이 네 점에서 접하고 있다. 변  $AB$ 의 기울기를  $-m$  ( $m > 0$ )이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

논제 1. 타원과 변  $AB$ 의 접점을  $(x_1, y_1)$ 으로 놓자.  $x_1, y_1$ 을  $m$ 으로 나타내시오.

논제 2. 원점  $O$ 와  $AB$ 와의 거리를  $m$ 을 이용하여 나타내시오.

[기출문제]

논제 1.  $a > b > 0$ 인 두 상수  $a, b$ 에 대하여 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점을  $F, F'$ 이라 하자.

(1)  $k > a$ 인 상수  $k$ 에 대하여 점  $A(k, 0)$ 에서 타원에 그은 접선 중 접점의  $y$ 좌표가 양수인 접선을  $l$ 이라 할 때, 그 접점을  $P$ 라고 하자. 이때  $P$ 의 좌표를  $a, b, k$ 를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오.



(2) (1)에서  $a=5, b=4, k=13$ 이라고 하자. 점  $P$ 를 지나고 접선  $l$ 에 수직인 직선  $l'$ 이  $x$ 축과 만나는 점을  $Q$ 라고 하자. 이때  $\frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} + \frac{\overline{PF'}}{\overline{QF'}}$ 의 값을 기약분수로 나타내고, 그 근거를 논술하시오.

[경희대 파이널 수업내용] 단면적을 적분하여 부피 구하는 문제

[기출문제]

두 교점의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha$ 와  $\beta$ 라 할 때,  $(\alpha-\beta)^2$ 을  $k$ 에 대한 식으로 나타내고, 그 식을  $S(k)$ 라 하자. 닫힌구간  $[4, 10]$ 의 임의의 점  $x$ 에서  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가  $6S(x)$ 인 입체도형의 부피를 구하고, 그 근거를 논술하시오.